ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. Н. Ремизов
А. Г. Максина
А. Я. Потапенко

МЕДИЦИНСКАЯ И БИОЛОГИЧЕСКАЯ ФИЗИКА







ДРОФА

А. Н. Ремизов
Медицинская и биологическая физика
4-е издание

Сканирование, оцифровка:

А. А. Шишкин
e-mail: alex-keiler@rambler.ru
Рязань
28 апреля 2006

Использование электронной версии учебника в коммерческих целях категорически запрещается.

А. Н. Ремизов, А. Г. Максина, А. Я. Потапенко

УЧЕБНИК

ПО МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Издание четвертое, переработанное и дополненное

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника по физике для студентов медицинских вузов

ДРОФА
МОСКВА · 2003

УДК 53.047:57(075.8)
ББК 22.3я73
Р38

Рецензенты:

кафедра медицинской и биологической физики Московской медицинской академии им. И. М. Сеченова (заведующий кафедрой проф. *В. Ф. Антонов*, проф. *А. М. Черныш*);
проф., д-р биологич. наук *Е. В. Кортуков* (кафедра физики Московского Государственного медико-стоматологического университета)

Ремизов А. Н.

Р38 Медицинская и биологическая физика: Учеб. для вузов / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина, А. Я. Потапенко. — 4-е изд., перераб. и дополн. — М.: Дрофа, 2003. — 560 с.: ил.

ISBN 5—7107—5001—8

Данный учебник является частью учебного комплекта, включающего также два учебных пособия: «Сборник задач по медицинской и биологической физике» А. Н. Ремизова и А. Г. Максиной и «Руководство к лабораторным работам по медицинской и биологической физике» М. Е. Блохиной, И. А. Эссауловой и Г. В. Мансуровой. Комплект соответствует действующей программе курса медицинской и биологической физики для студентов медицинских специальностей.

Отличительная особенность учебника — сочетание фундаментальности изложения общефизических сведений с четкой медико-биологической направленностью. Наряду с материалом по физике и биофизике излагаются элементы теории вероятностей и математической статистики, вопросы медицинской метрологии и электроники, основы фотомедицины, дозиметрии и др., приводятся сведения о физических методах диагностики и лечения. Содержание книги значительно обновлено по сравнению с ее третьим изданием (1999 г.) в соответствии с современными требованиями.

Для студентов и преподавателей медицинских вузов, а также студентов сельскохозяйственных вузов и биологических факультетов университетов и педагогических вузов.

ГОУ ВПО РязГМУ МЗ РФ
БИБЛИОТЕКА

ISBN 5—7107—5001—8

УДК 53.047:57(075.8)
ББК 22.3я73

© ООО «Дрофа», 2003

Оглавление

Предисловие 12
Введение 14

РАЗДЕЛ 1
Метрология. Теория вероятностей и математическая статистика

ГЛАВА 1 Введение в метрологию

§ 1.1. Основные проблемы и понятия метрологии 19
§ 1.2. Метрологическое обеспечение 21
§ 1.3. Медицинская метрология. Специфика медико-биологических измерений 22
§ 1.4. Физические измерения в биологии и медицине 24

ГЛАВА 2 Теория вероятностей

§ 2.1. Случайное событие. Вероятность 26
§ 2.2. Случайная величина. Закон распределения. Числовые характеристики 32
§ 2.3. Нормальный закон распределения 38
§ 2.4. Распределения Максвелла и Больцмана 41

ГЛАВА 3 Математическая статистика

§ 3.1. Основные понятия математической статистики 45
§ 3.2. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке . . . 50
§ 3.3. Проверка гипотез 56
§ 3.4. Корреляционная зависимость. Уравнения регрессии 60

РАЗДЕЛ 2
Механика. Акустика

ГЛАВА 4 Некоторые вопросы биомеханики

§ 4.1. Механическая работа человека. Эргометрия 64

§ 4.2. Некоторые особенности поведения человека при перегрузках и невесомости 65
§ 4.3. Вестибулярный аппарат как инерциальная система ориентации 69

ГЛАВА 5 Механические колебания и волны

§ 5.1. Свободные механические колебания (незатухающие и затухающие) 71
§ 5.2. Кинетическая и потенциальная энергии колебательного движения 77
§ 5.3. Сложение гармонических колебаний 78
§ 5.4. Сложное колебание и его гармонический спектр 83
§ 5.5. Вынужденные колебания. Резонанс 84
§ 5.6. Автоколебания 86
§ 5.7. Уравнение механической волны 87
§ 5.8. Поток энергии и интенсивность волны 89
§ 5.9. Ударные волны 90
§ 5.10. Эффект Доплера 91

ГЛАВА 6 Акустика

§ 6.1. Природа звука и его физические характеристики 93
§ 6.2. Характеристики слухового ощущения. Понятие об аудиометрии 96
§ 6.3. Физические основы звуковых методов исследования в клинике 99
§ 6.4. Волновое сопротивление. Отражение звуковых волн. Реверберация 101
§ 6.5. Физика слуха 103
§ 6.6. Ультразвук и его применения в медицине 108
§ 6.7. Инфразвук 111
§ 6.8. Вибрации 112

ГЛАВА 7 Течение и свойства жидкостей

§ 7.1. Вязкость жидкости. Уравнение Ньютона. Ньютоновские и неньютоновские жидкости 113
§ 7.2. Течение вязкой жидкости по трубам. Формула Пуазейля 114
§ 7.3. Движение тел в вязкой жидкости. Закон Стокса 118
§ 7.4. Методы определения вязкости жидкости. Клинический метод определения вязкости крови 119
§ 7.5. Турбулентное течение. Число Рейнольдса 121
§ 7.6. Особенности молекулярного строения жидкостей 123
§ 7.7. Поверхностное натяжение 124
§ 7.8. Смачивание и несмачивание. Капиллярные явления 126

ГЛАВА 8 Механические свойства твердых тел и биологических тканей

§ 8.1. Кристаллические и аморфные тела. Полимеры и биополимеры 129
§ 8.2. Жидкие кристаллы 137
§ 8.3. Механические свойства твердых тел 139
§ 8.4. Механические свойства биологических тканей 145

ГЛАВА 9 Физические вопросы гемодинамики

§ 9.1. Модели кровообращения 150
§ 9.2. Пульсовая волна 154
§ 9.3. Работа и мощность сердца. Аппарат искусственного кровообращения 157
§ 9.4. Физические основы клинического метода измерения давления крови 158
§ 9.5. Определение скорости кровотока 160

РАЗДЕЛ 3

Термодинамика. Физические процессы в биологических мембранах

ГЛАВА 10 Термодинамика

§ 10.1. Основные понятия термодинамики. Первое начало термодинамики 163
§ 10.2. Второе начало термодинамики. Энтропия 167
§ 10.3. Стационарное состояние. Принцип минимума производства энтропии 176
§ 10.4. Организм как открытая система 178
§ 10.5. Термометрия и калориметрия 180
§ 10.6. Физические свойства нагретых и холодных сред, используемых для лечения. Применение низких температур в медицине 183

ГЛАВА 11 Физические процессы в биологических мембранах

§ 11.1. Строение и модели мембран 184
§ 11.2. Некоторые физические свойства и параметры мембран 188
§ 11.3. Перенос молекул (атомов) через мембраны. Уравнение Фика 191
§ 11.4. Уравнение Нернста—Планка. Перенос ионов через мембраны 195

§ 11.5. Разновидности пассивного переноса молекул и ионов через мембраны . . . 198
§ 11.6. Активный транспорт. Опыт Уссинга . . . 200
§ 11.7. Равновесный и стационарный мембранные потенциалы. Потенциал покоя . . . 203
§ 11.8. Потенциал действия и его распространение . . . 207
§ 11.9. Активно-возбудимые среды. Автоволновые процессы в сердечной мышце . . . 213

РАЗДЕЛ 4

Электродинамика

ГЛАВА 12 Электрическое поле

§ 12.1. Напряженность и потенциал — характеристики электрического поля . . . 223
§ 12.2. Электрический диполь . . . 228
§ 12.3. Понятие о мультиполе . . . 231
§ 12.4. Дипольный электрический генератор (токовый диполь) . . . 232
§ 12.5. Физические основы электрокардиографии . . . 234
§ 12.6. Диэлектрики в электрическом поле . . . 238
§ 12.7. Пьезоэлектрический эффект . . . 242
§ 12.8. Энергия электрического поля . . . 244
§ 12.9. Электропроводимость электролитов . . . 246
§ 12.10. Электропроводимость биологических тканей и жидкостей при постоянном токе . . . 248
§ 12.11. Электрический разряд в газах. Аэроионы и их лечебно-профилактическое действие . . . 249

ГЛАВА 13 Магнитное поле

§ 13.1. Основные характеристики магнитного поля . . . 251
§ 13.2. Закон Ампера . . . 254
§ 13.3. Действие магнитного поля на движущийся электрический заряд. Сила Лоренца . . . 256
§ 13.4. Магнитные свойства вещества . . . 258
§ 13.5. Магнитные свойства тканей организма. Понятие о биомагнетизме и магнитобиологии . . . 264

ГЛАВА 14 Электромагнитные колебания и волны

§ 14.1. Свободные электромагнитные колебания . . . 265
§ 14.2. Переменный ток . . . 268
§ 14.3. Полное сопротивление в цепи переменного тока. Резонанс напряжений . . . 272

§ 14.4. Импеданс тканей организма. Дисперсия импеданса. Физические основы реографии . . . 275
§ 14.5. Электрический импульс и импульсный ток . . . 278
§ 14.6. Электромагнитные волны . . . 280
§ 14.7. Шкала электромагнитных волн. Классификация частотных интервалов, принятая в медицине . . . 282

ГЛАВА 15 Физические процессы в тканях при воздействии током и электромагнитными полями

§ 15.1. Первичное действие постоянного тока на ткани организма. Гальванизация. Электрофорез лекарственных веществ . . . 284
§ 15.2. Воздействие переменными (импульсными) токами . . . 286
§ 15.3. Воздействие переменным магнитным полем . . . 290
§ 15.4. Воздействие переменным электрическим полем . . . 291
§ 15.5. Воздействие электромагнитными волнами . . . 294

РАЗДЕЛ 5

Медицинская электроника

ГЛАВА 16 Содержание электроники. Электробезопасность. Надежность медицинской электронной аппаратуры

§ 16.1. Общая и медицинская электроника. Основные группы медицинских электронных приборов и аппаратов . . . 297
§ 16.2. Электробезопасность медицинской аппаратуры . . . 299
§ 16.3. Надежность медицинской аппаратуры . . . 304

ГЛАВА 17 Система получения медико-биологической информации

§ 17.1. Структурная схема съема, передачи и регистрации медико-биологической информации . . . 307
§ 17.2. Электроды для съема биоэлектрического сигнала . . . 308
§ 17.3. Датчики медико-биологической информации . . . 311
§ 17.4. Передача сигнала. Радиотелеметрия . . . 313
§ 17.5. Аналоговые регистрирующие устройства . . . 315
§ 17.6. Принцип работы медицинских приборов, регистрирующих биопотенциалы . . . 318

ГЛАВА 18 Усилители и генераторы и их возможные использования в медицинской аппаратуре

§ 18.1. Коэффициент усиления усилителя . . . 320
§ 18.2. Амплитудная характеристика усилителя. Нелинейные искажения . . . 321

§ 18.3. Частотная характеристика усилителя. Линейные искажения 323
§ 18.4. Усиление биоэлектрических сигналов 324
§ 18.5. Различные виды электронных генераторов. Генератор импульсных колебаний на неоновой лампе 327
§ 18.6. Электронные стимуляторы. Низкочастотная физиотерапевтическая электронная аппаратура 328
§ 18.7. Высокочастотная физиотерапевтическая электронная аппаратура. Аппараты электрохирургии 331
§ 18.8. Электронный осциллограф 333

РАЗДЕЛ 6

Оптика

ГЛАВА 19 Интерференция и дифракция света. Голография

§ 19.1. Когерентные источники света. Условия для наибольшего усиления и ослабления волн 338
§ 19.2. Интерференция света в тонких пластинках (пленках). Просветление оптики 342
§ 19.3. Интерферометры и их применение. Понятие об интерференционном микроскопе 345
§ 19.4. Принцип Гюйгенса—Френеля 348
§ 19.5. Дифракция на щели в параллельных лучах 348
§ 19.6. Дифракционная решетка. Дифракционный спектр 351
§ 19.7. Основы рентгеноструктурного анализа 357
§ 19.8. Понятие о голографии и ее возможном применении в медицине 360

ГЛАВА 20 Поляризация света

§ 20.1. Свет естественный и поляризованный. Закон Малюса 365
§ 20.2. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков 367
§ 20.3. Поляризация света при двойном лучепреломлении 368
§ 20.4. Вращение плоскости поляризации. Поляриметрия 371
§ 20.5. Исследование биологических тканей в поляризованном свете 374

ГЛАВА 21 Геометрическая оптика

§ 21.1. Геометрическая оптика как предельный случай волновой оптики 375
§ 21.2. Аберрации линз 376
§ 21.3. Понятие об идеальной центрированной оптической системе 380

§ 21.4. Оптическая система глаза и некоторые ее особенности 383
§ 21.5. Недостатки оптической системы глаза и их компенсация 388
§ 21.6. Лупа 389
§ 21.7. Оптическая система и устройство микроскопа 390
§ 21.8. Разрешающая способность и полезное увеличение микроскопа. Понятие о теории Аббе 394
§ 21.9. Некоторые специальные приемы оптической микроскопии 399
§ 21.10. Волоконная оптика и ее использование в оптических устройствах 403

ГЛАВА 22 Тепловое излучение тел

§ 22.1. Характеристики теплового излучения. Черное тело 405
§ 22.2. Закон Кирхгофа 406
§ 22.3. Законы излучения черного тела 408
§ 22.4. Излучение Солнца. Источники теплового излучения, применяемые для лечебных целей 410
§ 22.5. Теплоотдача организма. Понятие о термографии 411
§ 22.6. Инфракрасное излучение и его применение в медицине 414
§ 22.7. Ультрафиолетовое излучение и его применение в медицине 415
§ 22.8. Организм как источник физических полей 416

РАЗДЕЛ 7

Физика атомов и молекул. Элементы квантовой биофизики

ГЛАВА 23 Волновые свойства частиц. Элементы квантовой механики

§ 23.1. Гипотеза де Бройля. Опыты по дифракции электронов и других частиц 419
§ 23.2. Электронный микроскоп. Понятие об электронной оптике 422
§ 23.3. Волновая функция и ее физический смысл 425
§ 23.4. Соотношения неопределенностей 426
§ 23.5. Уравнение Шредингера. Электрон в потенциальной яме 427
§ 23.6. Применение уравнения Шредингера к атому водорода. Квантовые числа 431
§ 23.7. Понятие о теории Бора 435
§ 23.8. Электронные оболочки сложных атомов 437
§ 23.9. Энергетические уровни молекул 439

ГЛАВА 24 Излучение и поглощение энергии атомами и молекулами

§ 24.1. Поглощение света 446
§ 24.2. Рассеяние света 450
§ 24.3. Оптические атомные спектры 453
§ 24.4. Молекулярные спектры 456
§ 24.5. Различные виды люминесценции 459
§ 24.6. Фотолюминесценция 459
§ 24.7. Хемилюминесценция 465
§ 24.8. Лазеры и их применение в медицине 466
§ 24.9. Фотобиологические процессы. Понятия о фотобиологии и фотомедицине 476
§ 24.10. Биофизические основы зрительной рецепции 487

ГЛАВА 25 Магнитный резонанс

§ 25.1. Расщепление энергетических уровней атомов в магнитном поле 494
§ 25.2. Электронный парамагнитный резонанс и его медико-биологические применения 496
§ 25.3. Ядерный магнитный резонанс. ЯМР-интроскопия (магнито-резонансная томография) 501

РАЗДЕЛ 8

Ионизирующие излучения. Основы дозиметрии

ГЛАВА 26 Рентгеновское излучение

§ 26.1. Устройство рентгеновской трубки. Тормозное рентгеновское излучение 506
§ 26.2. Характеристическое рентгеновское излучение. Атомные рентгеновские спектры 508
§ 26.3. Взаимодействие рентгеновского излучения с веществом 511
§ 26.4. Физические основы применения рентгеновского излучения в медицине 514

ГЛАВА 27 Радиоактивность. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом

§ 27.1. Радиоактивность 516
§ 27.2. Основной закон радиоактивного распада. Активность 519
§ 27.3. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом . . . 521
§ 27.4. Физические основы действия ионизирующих излучений на организм 524
§ 27.5. Детекторы ионизирующих излучений 526
§ 27.6. Использование радионуклидов и нейтронов в медицине 530
§ 27.7. Ускорители заряженных частиц и их использование в медицине 532

ГЛАВА 28 Элементы дозиметрии ионизирующих излучений

§ 28.1. Доза излучения и экспозиционная доза. Мощность дозы . . . 536
§ 28.2. Количественная оценка биологического действия ионизирующего излучения. Эквивалентная доза 538
§ 28.3. Дозиметрические приборы 540
§ 28.4. Защита от ионизирующего излучения 541

Заключение 543
Предметный указатель 545

Предисловие

Изучение физики в медицинских вузах имеет целый ряд особенностей. По мнению авторов, курс физики в таком вузе наряду с фундаментальностью должен иметь четкий «медицинский адрес», т. е. быть профилизированным. Профилизация заключается в отборе материала и в иллюстрации возможных применений физики в медицине. Она не только является мотивацией для студентов в изучении физики, но и необходима в связи с достаточно ограниченным объемом курса физики в медвузах.

Одна из методических сложностей данного курса — это сочетание фундаментализации с профилизацией. В этом одна из особенностей учебника. Другая особенность связана с тем, что биофизика не выделена в виде отдельной части, а излагается в соответствующих разделах как физика живого.

В качестве вводного раздела к основному материалу рассматривается введение в метрологию, элементы теории вероятностей и математической статистики.

По сравнению с предыдущим изданием удален ряд глав (основы кибернетики, механика вращательного движения, электромагнитная индукция) и сокращено изложение отдельных тем (термодинамика, электрический ток). Увеличена «биофизическая составляющая»: автоволновые процессы, квантовая биофизика и др.

Описание аппаратуры в учебнике изложено схематично, так как более подробно оно дано в «Руководстве к лабораторным работам по медицинской и биологической физике» М. Е. Блохиной, И. А. Эссауловой, Г. В. Мансуровой (М., «Дрофа», 2001). Примеры и задачи можно найти в «Сборнике задач по медицинской и биологической физике» А. Н. Ремизова, А. Г. Максиной (М., «Дрофа», 2001). Учебник и перечисленные пособия составляют единый методический комплекс. Ссылки на эти издания будут обозначены в тексте настоящей книги как [1], [2] соответственно.

Учебник в основном соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по физике для специальностей 040100, 040200, 040300, 040400, 040600, однако он может быть использован и студентами, обучающимися по биологическим и сельскохозяйственным специальностям, а также по специальности 040500.

Глава 11 и § 3.3, 3.4, 8.1 (в соавторстве), 22.8 (в соавторстве) написаны А. Г. Максиной, главы 23, 24 и § 14.2, 14.3, 14.4 (в соавторстве) написаны А. Я. Потапенко, остальной материал написан А. Н. Ремизовым, глава 6 написана им в соавторстве с М. Р. Богомильским.

Авторы

Введение

Наиболее широким понятием, включающим в себя все, окружающее нас, и нас самих, является материя. Дать обычное логическое определение материи, при котором указывается более широкое понятие, а затем отмечается признак предмета определения, невозможно, так как более широкого понятия, чем материя, нет. Поэтому вместо определения часто просто говорят, что материя есть объективная реальность, данная нам в ощущениях.

Материя не существует без движения. Под движением понимаются все происходящие во вселенной изменения и процессы. Условно различные и многообразные формы движения можно представить четырьмя разновидностями: физическая, химическая, биологическая и социальная. Это позволяет классифицировать различные науки в зависимости от того, какой вид движения они изучают. Физика изучает физическую форму движения материи. Более детально физическую форму движения материи можно подразделить на механическую, молекулярно-тепловую, электромагнитную, атомную, внутриядерную. Естественно, что такое деление условно. Тем не менее физику как учебную дисциплину обычно представляют именно такими разделами.

Физика, как и другие науки, использует различные методы исследования, но все они в конечном счете соответствуют единству теории и практики и отражают общий научный подход к познанию окружающей действительности: наблюдение, размышление, опыт. На основе наблюдений создаются теории, формулируются законы и гипотезы, они проверяются и используются на практике. Практика является критерием теорий, она позволяет их уточнять. Формулируются новые теории и законы, они вновь проверяются практикой. Таким образом человек продвигается ко все более полному пониманию окружающего мира.

В исследовании физических явлений, процессов и систем достаточно широко используется метод *моделирования,* который основан на использовании *моделей*. Модель — это объект любой

природы, умозрительный (виртуальный) или материально реализованный, который воспроизводит явление, процесс или систему с целью их исследования или изучения. Такие известные читателю из курса средней школы понятия, как материальная точка, идеальный газ, тонкая линза и т. п., являются, по существу, моделями.

Различные формы движения материи взаимозависимы и взаимосвязаны, что обусловливает появление новых наук, лежащих на стыке прежних — биофизика, астрофизика, химическая физика и др., а также использование достижений одной науки для развития другой.

Читателя, естественно, интересует связь физики и медицины. Проникновение физических знаний, методов и аппаратуры в медицину достаточно многогранно, ниже предлагаются лишь некоторые основные аспекты этой связи.

Физические процессы в организме. Биофизика. Несмотря на сложность и взаимосвязь различных процессов в организме человека, часто среди них можно выделить процессы, близкие к физическим. Например, такой сложный физиологический процесс, как кровообращение, в своей основе является физическим, так как связан с течением жидкости (гидродинамика), распространением упругих колебаний по сосудам (колебания и волны), механической работой сердца (механика), генерацией биопотенциалов (электричество) и т. п. Дыхание связано с движением газа (аэродинамика), теплоотдачей (термодинамика), испарением (фазовые превращения) и т. п.

В организме, кроме физических макропроцессов, как и в неживой природе, имеют место молекулярные процессы, которые в конечном счете определяют поведение биологических систем. Понимание физики таких микропроцессов необходимо для правильной оценки состояния организма, природы некоторых заболеваний, действия лекарств и т. д.

Во всех этих вопросах физика настолько связана с биологией, что формирует самостоятельную науку — *биофизику* (*биологическую физику*), которая изучает физические и физико-химические процессы в живых организмах, а также ультраструктуру биологических систем на всех уровнях организации — от субмолекулярного и молекулярного до клетки и целого организма.

Физические методы диагностики заболеваний и исследования биологических систем. Многие методы диагностики и исследования основаны на использовании физических принципов и идей. Большинство современных медицинских по назначению приборов конструктивно является физическими приборами. Что-

бы это проиллюстрировать, достаточно рассмотреть некоторые примеры в рамках сведений, известных читателю из курса средней школы.

Механическая величина — давление крови — является показателем, используемым для оценки ряда заболеваний. Прослушивание звуков, источники которых находятся внутри организма, позволяет получать информацию о нормальном или патологическом поведении органов. Медицинский термометр, работа которого основана на тепловом расширении ртути, весьма распространенный диагностический прибор. За последнее десятилетие в связи с развитием электронных устройств широкое распространение получил диагностический метод, основанный на записи биопотенциалов, возникающих в живом организме. Наиболее известен метод электрокардиографии — записи биопотенциалов, отражающих сердечную деятельность. Общеизвестна роль микроскопа для медико-биологических исследований. Современные медицинские приборы, основанные на волоконной оптике, позволяют осматривать внутренние полости организма. Спектральный анализ используется в судебной медицине, гигиене, фармакологии и биологии; достижения атомной и ядерной физики — для достаточно известных методов диагностики: рентгенодиагностики и метода меченых атомов.

Воздействие физическими факторами на организм с целью лечения. В общем комплексе различных методов лечения, применяемых в медицине, находят место и физические факторы. Укажем некоторые из них. Гипсовая повязка, накладываемая при переломах, является механическим фиксатором положения поврежденных органов. Охлаждение (лед) и нагревание (грелка) с целью лечения основаны на тепловом действии. Электрическое и электромагнитное воздействия широко используются в физиотерапии. С лечебной целью применяют свет видимый и невидимый (ультрафиолетовое и инфракрасное излучения), рентгеновское и гамма-излучения.

Физические свойства материалов, используемых в медицине. Физические свойства биологических систем. Применяемые в медицине повязки, инструменты, электроды, протезы и т. п. работают в условиях воздействия окружающей среды, в том числе в непосредственном окружении биологических сред. Чтобы оценить возможность эксплуатации подобных изделий в реальных условиях, необходимо иметь сведения о физических свойствах материалов, из которых они сделаны. Например, для изготовления протезов (зубы, сосуды, клапаны и т. д.) существенно знание механической прочности, устойчивости к многократным нагрузкам,

эластичности, теплопроводности, электропроводимости и других свойств. В ряде случаев важно знать физические свойства биологических систем для оценки их жизнеспособности или способности выдержать определенные внешние воздействия. По изменению физических свойств биологических объектов возможна диагностика заболеваний.

Физические свойства и характеристики окружающей среды. Живой организм нормально функционирует только при взаимодействии с окружающей средой. Он остро реагирует на изменение таких физических характеристик среды, как температура, влажность, давление воздуха и пр. Действие внешней среды на организм учитывается не только как внешний фактор, оно может использоваться для лечения: климатотерапия и баротерапия. Эти примеры свидетельствуют о том, что врач должен уметь оценивать физические свойства и характеристики окружающей среды.

Перечисленные выше применения физики в медицине составляют *медицинскую физику* — комплекс разделов прикладной физики и биофизики, в которых рассматриваются физические законы, явления, процессы и характеристики применительно к решению медицинских задач.

Медицина и техника. Современная медицина базируется на широком использовании разнообразной аппаратуры, которая в большинстве своем является физической по конструкции. Поэтому в курсе медицинской и биологической физики рассматриваются устройство и принцип работы основной медицинской аппаратуры.

Медицина, компьютеризация и математика. Вычислительная техника получает все более широкое распространение как для обработки результатов медицинских исследований, так и для постановки диагноза заболевания. Математика, кроме того, используется для описания процессов, протекающих в живых системах, а также для создания и анализа соответствующих моделей. Математическая статистика применяется для учета вида заболеваний, распространенности эпидемий и других целей.

Физико-математические знания важны врачу еще и потому, что они способствуют формированию материалистического взгляда на живой организм и процессы, протекающие в нем.

РАЗДЕЛ

1

Метрология. Теория вероятностей и математическая статистика

В практической деятельности врач постоянно имеет дело с количественными показателями (температура тела больного, артериальное давление крови, дозировка лекарства и т. п.). Поэтому надо знать, как получены эти величины, какова их точность, в каких единицах они представлены. С количественными показателями имеет дело любая наука, а физика — в особенности.

Эти вопросы имеют отношение к метрологии, а их математической базой являются теория вероятностей и математическая статистика.

Таким образом, раздел можно рассматривать как метрологическое и математическое введение в медицинскую и биологическую физику.

ГЛАВА 1

Введение в метрологию

Метрологией называют науку об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности. В главе наряду с общими вопросами метрологии рассматриваются особенности измерений в биологии и медицине.

§ 1.1. Основные проблемы и понятия метрологии

Измерением называют нахождение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств. Измерения позволяют установить закономерности природы и являются элементом познания окружающего нас мира.

Различают измерения *прямые*, при которых результат получается непосредственно из измерения самой величины (например, измерение температуры тела медицинским термометром, измерение длины предмета линейкой), и *косвенные*, при которых искомое значение величины находят по известной зависимости между ней и непосредственно измеряемыми величинами (например, определение массы тела при взвешивании с учетом выталкивающей силы, определение вязкости жидкости по скорости падения в ней шарика). Технические средства для производства измерений (средства измерений) могут быть разных типов. Наиболее известным читателю средством измерений является ***измерительный прибор***, в котором измерительная информация представляется в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем (например, температура представлена в термометре длиной столбика ртути, сила тока — показанием стрелки амперметра или цифровым значением). К средствам измерений относят также и ***меру***, которая предназначена для воспроизведения физической величины заданного размера (например, гиря определенной массы).

Одно из распространенных средств измерений — ***измерительный преобразователь (датчик)***. Он предназначен для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования, обработки и (или) хранения (например, температура может быть представлена электрическим сигналом).

Значение физической величины, полученное при измерении, отличается от истинного. Степень приближения результатов измерения к истинному значению измеряемой величины характеризуется ***точностью измерений***. Точность измерений является качественным показателем измерений.

Количественная оценка результата измерений дается ***абсолютной погрешностью*** — *отклонением результатов измерений от истинного значения измеряемой величины*. Чем меньше погрешность, тем выше точность измерений.

Погрешности объясняются несовершенством средств измерений, неопытностью персонала, влиянием посторонних факторов и др. Из этих причин можно выделить те, которые проявляются нерегулярно и при повторных измерениях оказывают случайное количественное воздействие на результат. Такие факторы приводят к случайным погрешностям. Это случайные величины, поэтому их можно обработать, проанализировать и таким образом учесть, используя соответствующий математический аппарат: теорию вероятностей и математическую статистику (см. гл. 2 и 3).

Сведения по теории погрешностей, необходимые студентам-медикам, приведены в [1].

Одним из основных метрологических понятий является единица измерения физической величины. ***Единицей измерения*** физической величины называют стандартное значение этой физической величины, принятое по соглашению в качестве основы для ее количественной оценки.

Единицы физических величин в основном группируются в *системы единиц*. Основной является Международная система единиц (система интернациональная, СИ). Справочный материал по единицам физических величин приведен в [2]. Не останавливаясь на этих вопросах, рассмотрим лишь относительные и логарифмические величины.

В физических измерениях достаточно широкое распространение получили относительные величины, которые являются отношением физической величины к одноименной физической величине, принимаемой за исходную. В качестве примера можно указать концентрацию раствора, диэлектрическую и магнитную проницаемости, коэффициент полезного действия, относительную деформацию, коэффициент трения, вязкость крови относительно вязкости воды и т. д.

Единицы измерения относительных величин не имеют размерности и названия. Однако в ряде случаев относительную величину традиционно выражают со стократным или тысячекратным увеличением. При этом соответствующая единица измерения будет иметь название: процент (%) или промилле (‰).

Для выражения уровня звукового давления, уровня интенсивности звука, уровня усиления электрического сигнала и т. п. удобнее использовать логарифм относительной величины (наиболее распространен десятичный логарифм):

$$L = \lg\frac{a_2}{a_1},$$

где a_1 и a_2 — одноименные физические величины.

Единицей логарифмической величины является бел (Б):

$$1\ \text{Б} = \lg\frac{a_2}{a_1} \text{ при } a_2 = 10a_1,$$

если a — «энергетическая» величина (мощность, интенсивность, энергия и т. п.), или

$$1\ \text{Б} = 2\lg\frac{a_2}{a_1} \text{ при } a_2 = \sqrt{10}a_1,$$

если a — «силовая» величина (сила, механическое напряжение, давление, напряженность электрического поля и т. п.).

Достаточно распространена дольная единица — децибел (дБ): 1 дБ = 0,1 Б.

Заметим, что 1 дБ соответствует соотношению «энергетических» величин $a_2 \approx 1{,}26a_1$:

$$1\ \text{дБ} = 10\lg\frac{a_2}{a_1};\ \frac{a_2}{a_1} = 10^{1/10} \approx 1{,}26,$$

а для «силовых» величин $a_2 \approx 1{,}12a_1$:

$$1\ \text{дБ} = 20\lg\frac{a_2}{a_1};\ \frac{a_2}{a_1} = 10^{1/20} \approx 1{,}12.$$

§ 1.2. Метрологическое обеспечение

Измерения производятся с использованием *технических средств*. Результаты измерения должны соответствовать определенной точности и быть одинаковыми, если измеряются идентичные величины, независимо от того, производятся ли измерения одномоментно или в разное время, в одной лаборатории или в разных.

Для выполнения этих условий необходимо соответствующее ***метрологическое обеспечение*** — установление и применение научных и организационных основ, технических средств, правил и норм, необходимых для достижения единства и требуемой точности измерений.

Организационной основой метрологического обеспечения в нашей стране является метрологическая служба России, состоящая из государственных и ведомственных метрологических служб.

Под *единством измерений* понимают одинаковость результатов тождественных измерений независимо от места и времени их проведения, а также достоверность измерений. Единство измерений позволяет сопоставлять результаты, полученные на различных однотипных средствах измерений.

Для определения погрешностей средств измерений и установления их пригодности к применению осуществляют их *поверку*. Этот термин специфичен для метрологии, хотя в обиходе он соответствует понятию *проверка*. Поверка производится органами метрологической службы при помощи эталонов и образцовых средств измерений.

Эталонами называют средства измерений или комплексы средств измерений, обеспечивающие воспроизведение и хранение узаконенной единицы физической величины. Первичные эталоны в нашей стране обеспечивают наивысшую точность воспроизведения данной единицы. Кроме первичного есть вторичные эталоны, от которых передается размер единицы образцовым средствам измерения.

Образцовым средством измерения называется такое, которое аттестовано (аттестация — документальное подтверждение соответствия средства измерения своему назначению) в качестве образцового и применяется для поверки по нему рабочих средств измерений.

Рабочими средствами измерений называют такие, которые применяются для практических измерений в различных областях.

Таким образом, метрологическая цепочка, по которой передается размер единицы физической величины, состоит из следующих основных звеньев: эталоны — образцовые средства измерений — рабочие средства измерений.

§ 1.3. Медицинская метрология. Специфика медико-биологических измерений

Технические устройства, используемые в медицине, называют обобщенным термином *медицинская техника*. Бóльшая часть медицинской техники относится к медицинской аппаратуре, которая, в свою очередь, подразделяется на медицинские приборы и медицинские аппараты.

Медицинским прибором принято считать техническое устройство, предназначенное для диагностических или лечебных измерений (медицинский термометр, сфигмоманометр, электрокардиограф и др.).

Медицинский аппарат — техническое устройство, позволяющее создавать энергетическое воздействие терапевтического, хирургического или бактерицидного свойства, а также обеспечивать в медицинских целях определенный состав различных субстанций (аппарат УВЧ-терапии, электрохирургии, искусственной почки, кохлеарный протез и др.).

Метрологические требования к медицинским приборам как к измерительным устройствам достаточно очевидны. Многие медицинские аппараты призваны оказывать дозирующее энергетическое воздействие на организм, поэтому они также включены в сферу внимания метрологической службы.

Измерения в медицине (медицинские или медико-биологические измерения), а также соответствующие средства измерений достаточно специфичны. Эта особенность побуждает выделить в метрологии отдельное направление — *медицинскую метрологию.*

Рассмотрим некоторые проблемы, характерные для медицинской метрологии и частично для медицинского приборостроения.

1. В настоящее время медицинские измерения в большинстве случаев проводит медицинский персонал (врач, медсестра), не являющийся технически подготовленным. Поэтому целесообразно создавать медицинские приборы, градуированные в единицах физических величин, значения которых являются конечной медицинской измерительной информацией (прямые измерения).

2. Желательно, чтобы время измерения, вплоть до получения конечного результата, было как можно меньше, а информация как можно полнее. Этим противоречивым требованиям удовлетворяют измерительные комплексы, включающие вычислительные машины.

3. При метрологическом нормировании создаваемого медицинского прибора важно учитывать медицинские показания. Врач должен определить, с какой точностью достаточно представить результаты, чтобы можно было сделать диагностический вывод. При этом должны быть учтены возможные отклонения этих показаний у отдельных больных.

4. Многие медицинские приборы выдают информацию на регистрирующем устройстве (например, электрокардиограф), поэтому следует учитывать погрешности, характерные для этой формы записи (см. § 17.5).

5. Одна из проблем — терминологическая. Согласно требованиям метрологии, в названии измерительного прибора должна быть указана физическая величина или единица измерения (амперметр, вольтметр, частотомер и др.). Название для медицинских приборов не отвечает этому принципу (электрокардиограф, фонокардиограф, реограф и др.). Так, электрокардиограф следовало бы назвать милливольтметром с регистрацией показаний (или регистрирующим милливольтметром).

6. В ряде медицинских измерений может быть недостаточная информация о связи между непосредственно измеряемой физической величиной и соответствующими медико-биологическими параметрами. Так, например, при клиническом (бескровном) методе измерения давления крови (см. § 9.4) допускается, что давление воздуха внутри манжеты приблизительно равно давлению крови в плечевой артерии. На самом деле эта связь не слишком простая и зависит от ряда факторов, в том числе и от степени расслабления мускулатуры. Лабораторные измерения (*in vitro*) могут отличаться от значений соответствующего параметра в условиях организма (*in vivo*).

7. В процессе измерения медико-биологические параметры могут изменяться. В практике физико-технических измерений стремятся сделать несколько отсчетов для исключения (учета) случайных погрешностей; это целесообразно в тех случаях, когда есть уверенность в неизменности физического параметра в процессе измерения. Параметры биологической системы могут значительно измениться при длительных измерениях, например, вследствие психофизиологических факторов (воздействие окружающей обстановки: помещение, измерительный прибор, персонал и др.) или усталости мышц при многократных измерениях на динамометре. Подвижность органов или самого объекта также может приводить к разным результатам измерений.

Естественно, что при создании медицинской аппаратуры должны быть учтены и иные требования (санитарно-гигиенические, вопросы безопасности, надежности и др.); некоторые из них рассматриваются дальше.

§ 1.4. Физические измерения в биологии и медицине

Большинство измерений в медицине является измерениями физических или физико-химических величин.

В количественной диагностике это может быть давление крови, временна́я зависимость биопотенциалов, оптическая сила глаза и

др. В лабораторных анализах — вязкость крови, концентрация сахара в моче и др. При лечении важно знать дозу ионизирующего излучения, силу тока при гальванизации, интенсивность ультразвука и т. д.; отсутствие какой-либо информации подобного рода может не только снизить лечебный эффект, но и причинить вред. Количественная оценка параметров среды, окружающей человека (влажность воздуха, температура, атмосферное давление), является необходимым условием профилактики заболеваний, климатического лечения.

Всевозможные физические медико-биологические измерения могут быть классифицированы либо по функциональному признаку, либо по принадлежности к соответствующему разделу физики. Физическая классификация более близка структуре данного курса, поэтому она и приведена ниже.

Механические измерения: антропометрические параметры тела, перемещение, скорость и ускорение частей тела, крови, воздуха, акустические измерения, давление крови и жидкостей в организме и воздуха в окружающей среде, измерение вибраций и др.

Теплофизические измерения: температура органов, частей тела и окружающей среды, калориметрические измерения биологических объектов, продуктов питания и др.

Электрические и магнитные измерения: биопотенциалы, индукция магнитного поля сердца, измерение импеданса биологических объектов с диагностической целью, параметров электромагнитных полей и концентрации ионов с гигиенической целью и др.

Оптические измерения: колориметрические измерения, измерения оптических характеристик глазных сред с диагностической целью, спектральные измерения для диагностики и судебно-медицинского назначения, измерение характеристик ультрафиолетового, инфракрасного и видимого света для гигиенических целей и др.

Атомные и ядерные измерения: измерение ионизирующих излучений (дозиметрия) и др.

Кроме того, можно указать и ***физико-химические измерения***: количественное определение состава вдыхаемого и выдыхаемого воздуха, газовый состав крови, pH крови и других биологических сред.

Функциональный принцип классификации методов медико-биологических измерений проиллюстрируем на измерении параметров сердечно-сосудистой системы. Здесь встречаются механические (баллистокардиография, фонокардиография, измерение давления крови), электрические и магнитные (электрокардиография, магнитокардиография), оптические измерения (оксигеометрия). Возможно применение и других физических методов.

ГЛАВА 2

Теория вероятностей

В теории вероятностей исследуются закономерности, относящиеся к случайным событиям, величинам, процессам. Врачи редко задумываются, что постановка диагноза имеет вероятностный характер и, как остроумно замечено, лишь патологоанатомическое исследование может достоверно определить диагноз умершего человека.

§ 2.1. Случайное событие. Вероятность

Наблюдая различные явления, можно заметить, что существует два типа связей между условиями S и наступлением или ненаступлением некоторого события A. В одних случаях осуществление комплекса условий S (испытание) непременно вызывает событие A. Так, например, материальная точка массой m_0 под воздействием силы F (условие S) приобретает ускорение $a = F/m_0$ (событие A). В других случаях многократное повторение испытания может привести или не привести к появлению события A. Такие события принято называть ***случайными***: к ним можно отнести появление в кабинете врача больного с данной болезнью, выпадение определенной стороны монеты при ее бросании и др.

Не следует думать о случайных явлениях как о беспричинных, ничем не обусловленных. Известно, что многие явления связаны между собой, отдельное явление представляет следствие какого-то другого и само служит причиной последующего. Однако проследить количественно эту связь между условиями и событием часто затруднительно или даже невозможно. Так, при бросании игральной кости (однородный кубик с пронумерованными шестью гранями: 1, 2, 3, 4, 5 и 6) окончательное положение кубика зависит от движения руки в момент бросания, сопротивления воздуха, положения кубика при попадании на поверхность, особенности поверхности, на которую упал кубик, и других факторов, которые в отдельности учесть невозможно.

В быту применительно к таким *случайным событиям* употребляют слова «возможно», «вероятно», «маловероятно», «невероятно». В некоторых случаях такая оценка больше характеризует желание говорящего, чем истинную степень возможности или невозможности события. Однако и случайные события, если их число достаточно велико, подчиняются определенным закономерностям. Количественная оценка закономерностей, относящихся к случайным событиям, дается в разделе математики, называемом *теорией вероятностей*.

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие массовым (статистическим) случайным событиям.

Отдельные исторические факты, «неожиданности», «катастрофы» являются единичными, как бы неповторимыми, событиями, и количественные вероятностные суждения относительно них сделать невозможно. Исторически теория вероятностей появилась в связи с попытками подсчета возможности различных исходов в азартных играх. В настоящее же время она применяется в науке, в том числе биологии и медицине, для оценки вероятности практически важных событий. От игр остались лишь наглядные примеры, которые удобно использовать для иллюстрации теоретических положений.

Статистическое определение вероятности. Вероятность $P(A)$ в теории вероятностей выступает как числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного случайного события A при многократном повторении испытаний.

Допустим, при 1000 бросаний игральной кости цифра 4 выпадает 160 раз. Отношение $160/1000 = 0{,}16$ показывает относительную частоту выпадания цифры 4 в данной серии испытаний. В более общем случае, когда случайное событие A происходит m раз в серии n независимых испытаний, ***относительной частотой события*** в данной серии испытаний или просто частотой события A называют отношение

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

При большом числе испытаний частота события примерно постоянна: увеличение числа испытаний уменьшает колебание частоты события около постоянной величины.

Вероятностью случайного события назовем предел, к которому стремится частота события при неограниченном увеличении числа испытаний:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}. \qquad (2.2)$$

Это *статистическое определение вероятности*.

Естественно, что никто и никогда не сможет проделать неограниченное число испытаний для того, чтобы определить вероятность. В этом нет и надобности. Практически за вероятность [см. (2.2)] можно принять относительную частоту события при большом числе испытаний. Так, например, из статистических закономерностей рождения, установленных за много лет наблюдений, вероятность того события, что новорожденный будет мальчиком, оценивают в 0,515.

Классическое определение вероятности. Если при испытаниях нет каких-либо причин, вследствие которых одно случайное событие появлялось бы чаще других (***равновозможные события***), можно определить вероятность исходя из теоретических соображений. Например, выясним в случае бросания монеты частоту выпадания герба (событие A). Разными экспериментаторами при нескольких тысячах испытаний было показано, что относительная частота такого события принимает значения, близкие к 0,5. Учитывая, что появление герба и противоположной стороны монеты (событие B) являются событиями равновозможными, если монета симметрична, суждение $P(A) = P(B) = 0{,}5$ можно было бы сделать и без определения частоты этих событий. На основе понятия «равновозможности» событий формулируется другое определение вероятности.

Допустим, что в результате испытания должно произойти только одно из n равновозможных несовместных событий (***несовместными*** называют события, если их одновременное осуществление невозможно). Пусть рассматриваемое событие A происходит в m случаях, которые называются благоприятствующими A, и не происходит при остальных $n - m$, неблагоприятствующих A. Тогда ***вероятностью можно назвать отношение благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных несовместных событий***:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.3)$$

Это *классическое определение вероятности*. Рассмотрим несколько примеров.

* В урне находится 40 шаров: 10 черных и 30 белых. Найти вероятность того, что вынутый наугад один шар будет черным.

▼Число благоприятствующих случаев равно числу черных шаров в урне: $m = 10$. Общее число равновозможных событий (вынимание одного шара) равно полному числу шаров в урне: $n = 40$. Эти события несовместны, так как вынимается один и только один шар. По формуле (2.3) имеем

$$P(A) = 10/40 = 1/4.$$

* Найти вероятность выпадания четного числа при бросании игральной кости.

▼При бросании кости реализуются шесть равновозможных несовместных событий: появление одной цифры 1, 2, 3, 4, 5 или 6, т. е. $n = 6$. Благоприятствующими случаями являются выпадания одной из цифр 2, 4 или 6: $m = 3$. Искомая вероятность

$$P(A) = m/n = 3/6 = 1/2.$$

Как видно из определений вероятности события (2.2) и (2.3), для всех событий $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

События, которые при данных испытаниях не могут произойти, называются невозможными: их вероятность равна нулю.

Так, например, невозможно из урны с белыми и черными шарами вытащить красный шар, невозможно на игральной кости получить цифру 7.

Событие, которое при данном испытании обязательно произойдет, называется достоверным, его вероятность равна 1.

Примером достоверного события является извлечение белого шара из урны, в которой находятся только белые шары.

В ряде случаев вычислить вероятность события оказывается проще, если представить его в виде комбинации более простых событий. Этой цели служат некоторые теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей: ***вероятность появления одного (безразлично какого) события из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей.***

Для двух несовместных событий

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B). \qquad (2.4)$$

Докажем эту теорему. Пусть n — общее число испытаний, m_1 — число случаев, благоприятствующих событию A, m_2 — число случаев, благоприятствующих событию B. Число случаев, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно $m_1 + m_2$. Тогда

$$P(A \text{ или } B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

Отсюда, учитывая (2.3), имеем

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B).$$

* Найти вероятность выпадания 1 или 6 при бросании игральной кости.

▼События A (выпадание 1) и B (выпадание 6) являются равновозможными: $P(A) = P(B) = 1/6$, поэтому из (2.4) находим

$$P(A \text{ или } B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Сложение вероятностей справедливо не только для двух, но и для любого числа несовместных событий.

* В урне находится 50 шаров: 10 белых, 20 черных, 5 красных и 15 синих. Найти вероятность появления белого, или черного, или красного шара при однократной операции изъятия шара из урны.

▼Вероятность вынимания белого шара (событие A) равна $P(A) = 10/50 = 1/5$, черного шара (событие B) — $P(B) = 20/50 = 2/5$ и красного (событие C) — $P(C) = 5/50 = 1/10$. Отсюда по формуле сложения вероятностей получим $P(A \text{ или } B \text{ или } C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1/5 + 2/5 + 1/10 = 7/10$.

Если два события единственно возможны и несовместны, то их называют противоположными.

Такие события принято обозначать, например, A и $\bar{A}$.

Сумма вероятностей двух противоположных событий, как следует из теоремы сложения вероятностей, равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \qquad \textbf{(2.5)}$$

* Проиллюстрируем справедливость (2.5) на предыдущем примере. Пусть вынимание белого, или черного, или красного шара будет событием A_1, $P(A_1) = 7/10$. Противоположным событием $\bar{A}_1$ является доставание синего шара. Так как синих шаров 15, а общее количество шаров 50, то получаем $P(\bar{A}_1) = 15/50 = 3/10$ и $P(A_1) + P(\bar{A}_1) = 7/10 + 3/10 = 1$.

* В урне находятся белые, черные и красные шары. Вероятность доставания черного или красного шара равна 0,4. Найти вероятность доставания из урны белого шара.

▼Обозначим A событие вынимания черного или красного шара, $P(A) = 0{,}4$; противоположным событием $\bar{A}$ будет изъятие белого шара, тогда на основании (2.5) вероятность этого события $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Систему событий (A_1, A_2, ... A_k) называют полной, если при испытаниях наступит одно и только одно из этих событий. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.

* В урне имеется 40 шаров: 20 белых, 15 черных и 5 красных. Вероятность появления белого шара (событие A) равна $P(A) = 20/40 = 1/2$, для черного шара (событие B) — $P(B) = 15/40 = 3/8$ и для красного шара (событие C) — $P(C) = 5/40 = 1/8$. В этом случае система событий A_1, A_2, A_3 является полной; можно убедиться, что $P(A) + P(B) + P(C) = 1/2 + 3/8 + 1/8 = 1$.

Теорема умножения вероятностей: ***вероятность совместного появления независимых событий равна произведению их вероятностей.*** Для двух событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B). \qquad \textbf{(2.6)}$$

Докажем эту теорему. Так как события A и B независимы, то каждому из m_1 случаев, благоприятствующих A, соответствуют m_2 случаев, благоприятствующих B. Таким образом, общее число случаев, благоприятствующих совместному появлению событий A и B, равно $m_1 m_2$. Аналогично, общее число равновозможных событий равно $n_1 n_2$, где n_1 и n_2 — числа равновозможных событий соответственно для A и B. Имеем

$$P(A \text{ и } B) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B). \qquad \textbf{(2.7)}$$

* В одной урне находится 5 черных и 10 белых шаров, в другой 3 черных и 17 белых. Найти вероятность того, что при первом вынимании шаров из каждой урны оба шара окажутся: 1) черными; 2) белыми; 3) в первой урне будет вынут черный шар, а во второй — белый; 4) в первой урне будет вынут белый шар, а во второй — черный.

▼Вероятность вытаскивания черного шара из первой урны (событие A) равна $P(A) = 5/15 = 1/3$, черного шара из второй урны (событие B) — $P(B) = 3/20$, белого шара из первой урны (событие A') — $P(A') = 10/15 = 2/3$ и белого шара из первой урны (событие B') — $P(B') = 17/20$. Находим вероятность совместного появления двух независимых событий по формуле (2.6):

1) $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B) = (1/3)(3/20) = 3/60$ — оба шара черные;

2) $P(A' \text{ и } B') = P(A') \cdot P(B') = (2/3)(17/20) = 17/30$ — оба шара белые;

3) $P(A' \text{ и } B') = P(A) \cdot P(B') = (1/3)(17/20) = 17/60$ — в первой урне будет вынут черный шар, а во второй — белый;

4) $P(A' \text{ и } B) = P(A') \cdot P(B) = (2/3)(3/20) = 1/10$ — в первой урне будет вынут белый шар, а во второй — черный.

Все четыре возможных случая A и B, A' и B', A и B', A' и B образуют полную систему событий, поэтому

$$P(A \text{ и } B) + P(A' \text{ и } B') + P(A \text{ и } B') + P(A' \text{ и } B) =$$
$$= 3/60 + 17/30 + 17/60 + 1/10 = 1.$$

* Найти вероятность того, что в семье с тремя детьми все трое сыновья. Считать, что вероятность рождения мальчика равна 0,515 и пол каждого последующего ребенка не зависит от пола предыдущих детей.

▼По теореме умножения вероятностей,

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C) = 0{,}515 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}515 \approx 0{,}14.$$

Теорема умножения вероятностей усложняется, если определяется вероятность события, состоящего из совместного появления двух зависимых между собой событий. В том случае, когда событие B выполняется при условии, что событие A имело место, вероятность совместного появления двух этих событий равна

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A), \qquad \textbf{(2.8)}$$

где $P(B/A)$ — *условная вероятность*, т. е. вероятность события B при условии, что событие A состоялось.

* В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Найти вероятность того, что последовательно один за другим будут вынуты черный и белый шары.

▼Вероятность того, что первым будет изъят черный шар (событие A), равна $P(A) = m/n = 2/5$. После удаления черного шара в урне остается 4 шара: 3 белых и 1 черный. В этом случае вероятность вынимания белого шара (событие B после выполнения события A) равна $P(B/A) = 3/4$. Используя (2.8), получаем

$$P(A \text{ и } B) = (2/5) \cdot (3/4) = 3/10.$$

§ 2.2. Случайная величина. Закон распределения. Числовые характеристики

Определение случайной величины. Многие случайные события могут быть оценены количественно случайными величинами.

Случайной называют такую величину, которая принимает значения в зависимости от стечения случайных обстоятельств.

Случайными величинами являются: число больных на приеме у врача, число студентов в аудитории, число рождений в городе, продолжительность жизни отдельного человека, скорость молекулы, температура воздуха, погрешность в измерении какой-либо величины и др. Если пронумеровать шары в урне примерно так, как это делают при разыгрывании тиража лото, то произвольное вынимание шара из урны покажет число, являющееся случайной величиной.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайная величина называется дискретной, если она принимает счетное множество значений: число букв на произвольной странице книги, энергия электрона в атоме, число волос на голове человека, число зерен в колосьях, число молекул в выделенном объеме газа и т. п.

Непрерывная случайная величина принимает любые значения внутри некоторого интервала: температура тела, масса зерен в колосьях пшеницы, координата места попадания пули в цель (принимаем пулю за материальную точку) и др.

Распределение дискретной случайной величины. Дискретная случайная величина считается заданной, если указаны ее возможные значения и соответствующие им вероятности. Обозначим дискретную случайную величину X, ее значения x_1, x_2, ..., а вероятности $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2$ и т. д. ***Совокупность X и P называется распределением дискретной случайной величины*** (табл. 1).

Таблица 1

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	...

Так как все возможные значения дискретной случайной величины представляют полную систему (см. § 2.1), то сумма вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Здесь предполагается, что дискретная случайная величина имеет n значений. Выражение (2.9) называется ***условием нормировки.***

* Случайной величиной является число очков, выпадающих на верхней грани игральной кости. Указать распределение этой случайной величины (табл. 2).

Таблица 2

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

* Случайной величиной является номер вида спорта в игре «Спортлото». Общее число видов равно 49. Указать распределение этой случайной величины (табл. 3).

Таблица 3

X	1	2	3	...	49
P	1/49	1/49	1/49	...	1/49

Биномиальное распределение. Пусть некоторое испытание проводится трижды и при этом событие A происходит l раз (l — случайная величина, которая при тройном испытании может принимать значения 0, 1, 2 и 3). Вероятность наступления события A равна $P(A)$; вероятность того, что событие A не происходит, т. е. имеет место противоположное событие $\bar{A}$, равна $[1 - P(A)]$.

Значение $l = 0$ соответствует такому случаю, при котором трижды подряд событие A не происходило. Вероятность этого сложного события, по теореме умножения вероятностей (2.6), равна

$$P(\bar{A} \text{ и } \bar{A} \text{ и } \bar{A}) = [1 - P(A)][1 - P(A)][1 - P(A)] = [1 - P(A)]^3.$$

Значение $l = 1$ относится к случаю, при котором событие A произошло в одном из трех испытаний. По формуле (2.6) получаем

$$P(A \text{ и } \bar{A} \text{ и } \bar{A}) = P(A)[1 - P(A)][1 - P(A)] = P(A)[1 - P(A)]^2.$$

Так как при $l = 1$ происходят также и два других сложных события: ($\bar{A}$ и A и $\bar{A}$) и ($\bar{A}$ и $\bar{A}$ и A), то необходимо, воспользовавшись теоремой сложения вероятностей (2.4), получить полную вероятность для $l = 1$, сложив трижды предыдущее выражение:

$$P(A \text{ и } \bar{A} \text{ и } \bar{A}, \text{ или } \bar{A} \text{ и } A \text{ и } \bar{A}, \text{ или } \bar{A} \text{ и } \bar{A} \text{ и } A) = 3P(A)[1 - P(A)]^2.$$

Значение $l = 2$ соответствует случаю, при котором событие A произошло в двух из трех испытаний. Рассуждениями, подобными приведенным выше, получим полную вероятность для этого случая:

$$P(\bar{A} \text{ и } A \text{ и } A, \text{ или } A \text{ и } \bar{A} \text{ и } A, \text{ или } A \text{ и } A \text{ и } \bar{A}) = 3P^2(A)[1 - P(A)].$$

При $l = 3$ событие A появляется во всех трех испытаниях. Используя теорему умножения вероятностей, находим

$$P(A \text{ и } A \text{ и } A) = P^3(A).$$

В итоге получаем биномиальное распределение, содержащее четыре члена (табл. 4).

Таблица 4

l	0	1	2	3
P	$[1 - P(A)]^3$	$3P(A) \cdot [1 - P(A)]^2$	$3P^2(A) \cdot [1 - P(A)]$	$P^3(A)$

В общем случае биномиальное распределение позволяет определить вероятность того, что событие A произойдет l раз при n испытаниях:

$$P_{ln} = C_n^l p^l (1 - p)^{n-l}, \qquad (2.10)$$

где $p = P(A)$; C_n^l — число сочетаний из n элементов по l, равное

$$C_n^l = \frac{n(n-1)\ldots(n-l+1)}{l!} = \frac{n!}{l!(n-l)}.$$

* На основе многолетних наблюдений вызов врача в данный дом оценивается вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что в течение шести дней произойдет четыре вызова врача; $P(A) = 0{,}5$, $n = 6$, $l = 4$.

▼Воспользуемся формулой (2.10):

$$P = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}234.$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины. Во многих случаях, наряду с распределением случайной величины или вместо него, информацию об этих величинах могут дать числовые параметры, получившие название ***числовых характеристик случайной величины***. Рассмотрим наиболее употребительные из них.

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины есть сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \qquad (2.11)$$

Пусть при большом числе испытаний n дискретная случайная величина X принимает значения x_1, x_2, ..., x_n соответственно m_1, m_2, ..., m_n раз. Среднее значение равно

$$\langle X \rangle = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{n} = x_1\frac{m_1}{n} + \ldots + x_n\frac{m_n}{n}.$$

Если n велико, то относительные частоты m_1/n, m_2/n, ... будут стремиться к вероятностям, а средняя величина — к математическому ожиданию. Именно поэтому математическое ожидание часто отождествляют со средним значением.

* Найти математическое ожидание для дискретной случайной величины, которая задается цифрой на грани при бросании игральной кости (см. табл. 2).

▼Используем формулу (2.11):

$$M(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 7/2 = 3{,}5.$$

* Найти математическое ожидание для дискретной случайной величины, которая определяется тиражом «Спортлото» (см. табл. 3).

▼Согласно формуле (2.11), находим

$$M(X) = 1 \cdot 1/49 + 2 \cdot 1/49 + \ldots + 49 \cdot 1/49 = 25.$$

Возможные значения дискретной случайной величины рассеяны вокруг ее математического ожидания, часть из них превышает $M(X)$, часть — меньше $M(X)$. Как оценить степень разброса случайной величины относительно ее среднего значения? Может показаться, что для решения такой задачи следует вычислить отклонения всех случайных величин от ее математического ожидания $X - M(X)$, а затем найти математическое ожидание (среднее значение) этих отклонений: $M[X - M(X)]$. Без доказательства отметим, что эта величина равна нулю, так как отклонения случайных величин от математического ожидания имеют как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому целесообразно учитывать либо абсолютные значения отклонений $M[X - M(X)]$, либо их квадраты $M[X - M(X)]^2$. Второй вариант оказывается предпочтительнее, так приходят к понятию дисперсии случайной величины.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (2.12)$$

Без вывода приведем удобную для вычисления дисперсии формулу

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (2.13)$$

Она означает, что дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.

* Найти дисперсию случайной величины, которая задается цифрой на грани при бросании игральной кости (см. табл. 2).

▼Математическое ожидание этого распределения равно 3,5. Запишем значения квадратов отклонения случайных величин от математического ожидания: $(1 - 3{,}5)^2 = 6{,}25$; $(2 - 3{,}5)^2 = 2{,}25$; $(3 - 3{,}5)^2 = 0{,}25$; $(4 - 3{,}5)^2 = 0{,}25$; $(5 - 3{,}5)^2 = 2{,}25$; $(6 - 3{,}5)^2 = 6{,}25$. По формуле (2.12) с учетом (2.11) находим дисперсию:

$$D(X) = 6{,}25 \cdot 1/6 + 2{,}25 \cdot 1/6 + 0{,}25 \cdot 1/6 + 0{,}25 \cdot 1/6 + 2{,}25 \cdot 1/6 + 6{,}25 \cdot 1/6 = 2{,}9167.$$

Вычислим дисперсию, воспользовавшись формулой (2.13):

$$[M(X)]^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25;$$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 1/6 + 2^2 \cdot 1/6 + 3^2 \cdot 1/6 + 4^2 \cdot 1/6 + 5^2 \cdot 1/6 + 6^2 \cdot 1/6 = 15{,}1667;$$

$$D(X) = 15{,}1667 - 12{,}25 = 2{,}9167.$$

Как следует из (2.12), дисперсия имеет размерность квадрата размерности случайной величины. Для того чтобы оценивать рассеяние случайной величины в единицах той же размерности, вводят понятие ***среднего квадратического отклонения***, под которым понимают квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \qquad (2.14)$$

Распределение и характеристики непрерывной случайной величины. Непрерывную случайную величину нельзя задать тем же законом распределения, что и дискретную. В этом случае поступают следующим образом.

Пусть dP — вероятность того, что непрерывная случайная величина X принимает значения между x и $x + dx$. Очевидно, что чем больше интервал dx, тем больше и вероятность dP: $dP \sim dx$. Кроме того, вероятность должна зависеть и от самой случайной величины, вблизи которой расположен интервал, поэтому

$$dP = f(x)dx, \qquad (2.15)$$

где $f(x)$ — ***плотность вероятности,*** или ***функция распределения вероятностей.*** Она показывает, как изменяется вероятность, отнесенная к интервалу dx случайной величины, в зависимости от значения самой этой величины:

$$f(x) = dP/dx. \qquad (2.16)$$

Интегрируя выражение (2.15) в соответствующих пределах, находим вероятность того, что случайная величина принимает какое-либо значение в интервале (ab):

$$P_{ab} = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.17)$$

Условие нормировки для непрерывной случайной величины имеет вид

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (2.18)$$

Наряду с плотностью вероятности в математике используют также и ***функцию распределения непрерывной случайной величины***:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (2.19)$$

Как видно из (2.19), эта функция равна вероятности того, что случайная величина принимает значения, меньшие x:

$$F(x) = P(-\infty < X < x).$$

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание и дисперсия записываются соответственно в виде

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x, \qquad (2.20)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x. \qquad (2.21)$$

§ 2.3. Нормальный закон распределения

В теории вероятностей и математической статистике, в различных приложениях важную роль играет ***нормальный закон распределения (закон Гаусса)***. Случайная величина распределена по этому закону, если плотность вероятности ее имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.22)$$

где $a = M(X)$ — математическое ожидание случайной величины; σ — среднее квадратическое отклонение; следовательно, σ^2 — дисперсия случайной величины.

Кривая нормального закона распределения имеет колоколообразную форму (рис. 2.1), симметричную относительно прямой $x = a$ (центр рассеивания). В точке $x = a$ функция достигает максимума:

$$f(x)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

По мере возрастания $|x - a|$ функция $f(x)$ монотонно убывает, асимптотически приближаясь к нулю. С уменьшением σ кривая становится все более и более островершинной. Изменение a при постоянной σ не влияет на форму кривой, а лишь сдвигает ее вдоль оси абсцисс. Площадь, заключенная под кривой, согласно условию нормировки, равна единице. На рисунке 2.1 изображены три кривые. Для кривых *1* и *2* $a = 0$, эти кривые отличаются значением σ ($\sigma_1 < \sigma_2$); кривая *3* имеет $a \neq 0$ ($\sigma = \sigma_2$).

Вычислим функцию распределения (2.19) для этого случая:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x. \qquad (2.23)$$

Обычно используют иное выражение функции нормального распределения. Введем новую переменную $t = \frac{x-a}{\sigma}$, следовательно, $\mathrm{d}x = \sigma\mathrm{d}t$. Подставив эти значения в (2.23), получим

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma t + a} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \Phi(t) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (2.24)$$

Значения функции $\Phi(t)$ обычно находят в специально составленных таблицах (см. [2]), так как интеграл (2.24) через элементарные функции не выражается. График функции $\Phi(t)$ изображен на рисунке 2.2.

На основании (2.17) можно вычислить вероятность того, что случайная величина при нормальном распределении находится в интервале (x_1, x_2). Без вывода, по аналогии с (2.24), укажем, что эта вероятность равна

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \qquad (2.25)$$

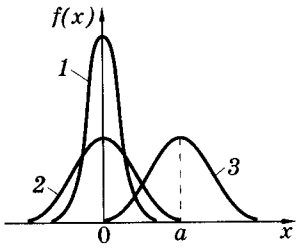


Рис. 2.1

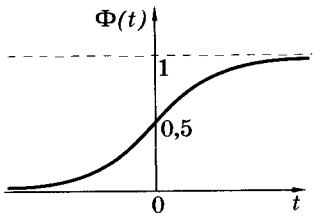


Рис. 2.2

Воспользуемся выражением (2.25) для вычисления следующих вероятностей:

$$\text{а) } P(a-\sigma<x<a+\sigma)=\Phi\left(\frac{a+\sigma-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\sigma-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1).$$

Отметим, что $\Phi(-t)=1-\Phi(t)$, поэтому $P=2\Phi(1)-1$. По таблице находим $\Phi(+1)=0{,}8413$, откуда

$$P=2\cdot 0{,}8413-1=0{,}683; \qquad \textbf{(2.26а)}$$

$$\text{б) } P(a-2\sigma<x<a+2\sigma)=\Phi\left(\frac{a+2\sigma-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-2\sigma-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1.$$

По таблице находим $\Phi(2)=0{,}9772$, откуда

$$P=2\cdot 0{,}9772-1=0{,}954; \qquad \textbf{(2.26б)}$$

$$\text{в) } P(a-3\sigma<x<a+3\sigma)=\Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1.$$

По таблице находим $\Phi(3)=0{,}9986$, откуда

$$P=2\cdot 0{,}9986-1=0{,}997. \qquad \textbf{(2.26в)}$$

На рисунке 2.3 приведено нормальное распределение ($a=0$) и штриховкой показаны области, площади которых равны вероятностям 0,683 и 0,954.

Допустим, что произвольно из нормального распределения выбираются группы по n значений случайных величин. Для каждой группы можно найти средние значения, соответственно x_1, x_2, ..., x_i, ... Эти средние значения сами образуют нормальное распределение (в отличие от изложенного выше нормального распределения здесь каждому среднему значению x_i будет соответствовать не вероятность, а относительная частота). Математическое ожидание такого «нового» нормального распределения равно математическому ожиданию исходного нормального распределения, а дисперсия (D_n) и среднее квадратическое отклонение (σ_n) отличаются соответственно в n и в $\sqrt{n}$ раз относительно этих характеристик исходного распределения:

$$D_n=\frac{D}{n} \text{ и } \sigma_n=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad \textbf{(2.27)}$$

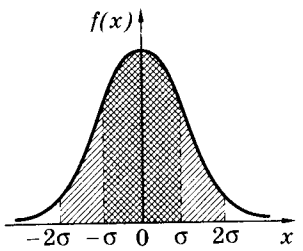


Рис. 2.3

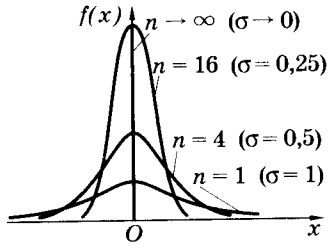


Рис. 2.4

Это положение здесь не доказывается, но его можно проиллюстрировать рисунком 2.4, на котором приведены графики нормальных распределений, полученных для групп со значениями n, равными 1, 4, 16, и $n\to\infty$. Рассмотрим крайние частные случаи. При $n=1$ приходим к исходному нормальному распределению, поэтому $\sigma_n=\sigma$. При $n\to\infty$ $\sigma_n\to 0$; фактически в этом случае «группа случайных величин» — это все исходное распределение, других групп нет, поэтому среднее значение выражается только одним числом и оно соответствует математическому ожиданию. Все распределение сводится к этому значению математического ожидания (на графике представлено вертикальной линией).

§ 2.4. Распределения Максвелла и Больцмана

Распределение Максвелла (распределение молекул газа по скоростям). В равновесном состоянии параметры газа (давление, объем и температура) остаются неизменными, однако микросостояния — взаимное расположение молекул, их скорости — непрерывно изменяются. Из-за огромного количества молекул практически нельзя определить значения их скоростей в какой-либо момент, но возможно, считая скорость молекул непрерывной случайной величиной, указать распределение молекул по скоростям.

Выделим отдельную молекулу. Хаотичность движения позволяет, например, для проекции скорости v_x молекулы принять нормальный закон распределения. В этом случае, как показал Дж. К. Максвелл, плотность вероятности записывается следующим образом:

$$f(v_x)=\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}\,e^{-\frac{m_0v_x^2}{2kT}}, \qquad \textbf{(2.28)}$$

где m_0 — масса молекулы, T — термодинамическая температура газа, k — постоянная Больцмана.

Аналогичные выражения могут быть получены для $f(v_y)$ и $f(v_z)$.

На основании формулы (2.15) можно записать вероятность того, что молекула имеет проекцию скорости, лежащую в интервале от v_x до $v_x + \mathrm{d}v_x$:

$$\mathrm{d}P_x = f(v)\mathrm{d}v_x; \qquad (2.29)$$

аналогично для других осей

$$\mathrm{d}P_y = f(v_y)\mathrm{d}v_y,\ \mathrm{d}P_z = f(v_z)\mathrm{d}v_z. \qquad (2.30)$$

Каждое из условий (2.29) и (2.30) отражает независимое событие. Поэтому вероятность того, что молекула имеет скорость, проекции которой одновременно удовлетворяют всем условиям, можно найти по теореме умножения вероятностей [см. (2.6)]:

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}P_x\mathrm{d}P_y\mathrm{d}P_z = f(v_x)f(v_y)f(v_z)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z. \qquad (2.31)$$

Используя (2.28), из (2.31) получаем

$$\mathrm{d}P = \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3}\, \mathrm{e}^{-\frac{m_0(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}}\, \mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z. \qquad (2.32)$$

Отметим, что из (2.32) можно получить максвелловскую функцию распределения вероятностей абсолютных значений скорости (***распределение Максвелла по скоростям***):

$$f(v) = 4\pi \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3}\, v^2\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \qquad (2.33)$$

и вероятность того, что скорость молекулы имеет значение, лежащее в интервале от v до $v + \mathrm{d}v$:

$$\mathrm{d}P = f(v)\mathrm{d}v = 4\pi \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3}\, v^2\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\mathrm{d}v. \qquad (2.34)$$

График функции (2.33) изображен на рисунке 2.5. ***Скорость, соответствующую максимуму кривой Максвелла, называют наивероятнейшей*** $v_в$. Ее можно определить, используя условие максимума функции:

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0,$$

или

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^3}\left(2v_в\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_в^2}{2kT}} - v_в^2\frac{2m_0 v_в}{2kT}\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_в^2}{2kT}}\right) = 0,$$

откуда

$$v_в^2 = \frac{2kT}{m_0},\ v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \qquad (2.35)$$

Среднюю скорость молекулы (математическое ожидание) можно найти по общему правилу [см. (2.20)]. Так как определяется среднее значение скорости, то пределы интегрирования берут от 0 до ∞ (математические подробности опущены):

$$\langle v\rangle = \int_0^{+\infty} 4\pi \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3}\, v^3\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad (2.36)$$

где $M = m_0 N_A$ — молярная масса газа, $R = kN_A$ — универсальная газовая постоянная, N_A — число Авогадро.

При увеличении температуры максимум кривой Максвелла смещается в сторону бóльших скоростей и распределение молекул по v видоизменяется (рис. 2.6; $T_1 < T_2$).

Распределение Максвелла позволяет вычислить число молекул, скорости которых лежат в определенном интервале Δv. Получим соответствующую формулу.

Так как общее число N молекул в газе обычно велико, то вероятность $\mathrm{d}P$ может быть выражена как отношение числа $\mathrm{d}N$ молекул, скорости которых заключены в некотором интервале $\mathrm{d}v$, к общему числу N молекул:

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}N}{N},\ \text{или}\ \mathrm{d}N = N\mathrm{d}P. \qquad (2.37)$$

Из (2.34) и (2.37) следует, что

$$\mathrm{d}N = 4\pi N \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3}\, v^2\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\mathrm{d}v. \qquad (2.38)$$

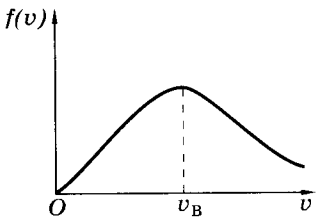


Рис. 2.5

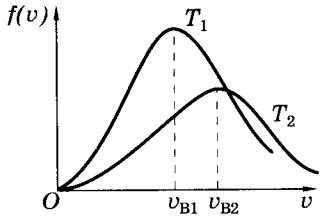


Рис. 2.6

Формула (2.38) позволяет определить число молекул, скорости которых лежат в интервале от v_1 до v_2. Для этого нужно проинтегрировать (2.38):

$$N_{12} = 4\pi N \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3} \int_{v_1}^{v_2} v^2 e^{\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv \qquad (2.39)$$

либо графически вычислить площадь криволинейной трапеции в пределах от v_1 до v_2 (рис. 2.7).

Если интервал скоростей dv достаточно мал, то число молекул, скорости которых соответствуют этому интервалу, может быть рассчитано приближенно по формуле (2.38) или графически как площадь прямоугольника с основанием dv.

На вопрос, сколько молекул имеют скорость, равную какому-либо определенному значению, следует странный, на первый взгляд, ответ: если совершенно точно задана скорость, то интервал скоростей равен нулю ($dv = 0$) и из (2.38) получаем нуль, т. е. ни одна молекула не имеет скорости, точно равной наперед заданной. Это соответствует одному из положений теории вероятностей: для непрерывной случайной величины, каковой является скорость, невозможно «угадать» совершенно точно ее значение, которое имеет по крайней мере хотя бы одна молекула в газе.

Распределение молекул по скоростям подтверждено различными опытами.

Распределение Максвелла можно рассматривать как распределение молекул не только по скоростям, но и по кинетическим энергиям (так как эти понятия взаимосвязаны).

Распределение Больцмана. Если молекулы находятся в каком-либо внешнем силовом поле, например гравитационном поле Земли, то можно найти распределение по их потенциальным энергиям, т. е. установить концентрацию частиц, обладающих некоторым определенным значением потенциальной энергии.

Распределение частиц по потенциальным энергиям в силовых полях — гравитационном, электрическом и др. — называют распределением Больцмана.

Применительно к гравитационному полю это распределение может быть записано в виде зависимости концентрации n молекул от высоты h над уровнем Земли или от потенциальной энергии молекулы m_0gh:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}. \qquad (2.40)$$

Выражение (2.40) справедливо для частиц идеального газа. Графически эта экспоненциальная зависимость изображена на рис. 2.8.

Такое распределение молекул в поле тяготения Земли можно качественно, в рамках молекулярно-кинетических представлений,

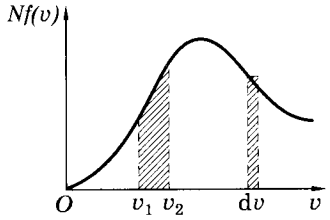


Рис. 2.7

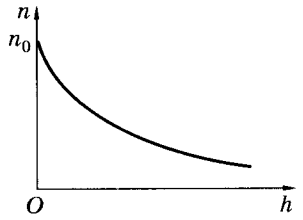


Рис. 2.8

объяснить тем, что на молекулы оказывают влияние два противоположных фактора: гравитационное поле, под действием которого все молекулы притягиваются к Земле, и молекулярно-хаотическое движение, стремящееся равномерно разбросать молекулы по всему возможному объему.

В заключение полезно заметить некоторое сходство экспоненциальных членов в распределениях Максвелла и Больцмана:

$$e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = e^{-\frac{E_к}{kT}},$$

$$e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} = e^{-\frac{E_п}{kT}}.$$

В первом распределении в показателе степени отношение кинетической энергии молекулы к kT, во втором — отношение потенциальной энергии к kT.

ГЛАВА 3

Математическая статистика

Методы математической статистики позволяют систематизировать и оценивать экспериментальные данные, которые рассматриваются как случайные величины.

§ 3.1. Основные понятия математической статистики

В главе 2 были рассмотрены некоторые понятия и закономерности, которым подчинены массовые случайные явления. Одной из практических задач, связанных с этим, является создание ме-

тодов отбора данных (статистические данные) из большой совокупности и их обработки. Такие вопросы рассматриваются в математической статистике.

Математическая статистика — наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для решения научных и практических задач. Математическая статистика тесно примыкает к теории вероятностей и базируется на ее понятиях. Однако главным в математической статистике является не распределение случайных величин, а анализ статистических данных и выяснение, какому распределению они соответствуют.

Предположим, что необходимо изучить множество объектов по какому-либо признаку. Это возможно сделать, либо проведя сплошное наблюдение (исследование, измерение), либо не сплошное, выборочное.

Выборочное, т. е. неполное, обследование может оказаться предпочтительнее по следующим причинам. Во-первых, естественно, что обследование части менее трудоемко, чем обследование целого; следовательно, одна из причин — экономическая. Во-вторых, может оказаться и так, что сплошное обследование просто нереально. Для того чтобы его провести, возможно, нужно уничтожить всю исследуемую технику или загубить все исследуемые биологические объекты. Так, например, врач, имплантирующий электроды в улитку для кохлеарного протезирования (см. § 6.5), должен иметь вероятностные представления о расположении улитки слухового аппарата. Казалось бы, наиболее достоверно такие сведения можно было получить при сплошном патологоанатомическом вскрытии всех умерших с производством соответствующих замеров. Однако достаточно собрать нужные сведения при выборочных измерениях.

Большая статистическая совокупность, из которой отбирается часть объектов для исследования, называется ***генеральной совокупностью***, а множество объектов, отобранных из нее, — ***выборочной совокупностью***, или ***выборкой***.

Свойство объектов выборки должно соответствовать свойству объектов генеральной совокупности, или, как принято говорить, выборка должна быть представительной (*репрезентативной*). Так, например, если целью является изучение состояния здоровья населения большого города, то нельзя воспользоваться выборкой населения, проживающего в одном из районов города. Условия проживания в разных районах могут отличаться (различная влажность, наличие предприятий, жилищных строений и т. п.)

и, таким образом, влиять на состояние здоровья. Поэтому выборка должна представлять случайно отобранные объекты.

Если записать в последовательности измерений все значения величины x в выборке, то получим простой статистический ряд. Например, рост мужчин (см): 171, 172, 172, 168, 170, 169, ... Такой ряд неудобен для анализа, так как в нем нет последовательности возрастания (или убывания) значений, встречаются и повторяющиеся величины. Поэтому целесообразно *ранжировать* ряд, например, в возрастающем порядке значений и указать их повторяемость. Тогда статистическое распределение выборки:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & < x_2 & \ldots < x_i & \ldots < x_k \\ n_1 & n_2 & \ldots n_i & \ldots n_k \\ p_1^* = \dfrac{n_1}{n} & p_2^* = \dfrac{n_2}{n} & \ldots p_i^* = \dfrac{n_i}{n} & \ldots p_k^* = \dfrac{n_k}{n} \end{array} \qquad (3.1)$$

Здесь x_i — наблюдаемые значения признака (*варианта*); n_i — число наблюдений варианты x_i (*частота*); p_i^* — относительная частота. Общее число объектов в выборке (*объем выборки*)

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

всего k вариант. ***Статистическое распределение*** — это совокупность вариант и соответствующих им частот (или относительных частот), т. е. это совокупность данных 1-й и 2-й строки или 1-й и 3-й строки в (3.1).

В медицинской литературе статистическое распределение, состоящее из вариант и соответствующих им частот, получило название ***вариационного ряда***.

Наряду с дискретным (точечным) статистическим распределением, которое было описано, используют *непрерывное* (*интервальное*) *статистическое распределение*:

$$\begin{array}{cccc} x_0, x_1 & x_1, x_2 & \ldots x_{i-1}, x_i & \ldots x_{k-1}, x_k \\ n_1 & n_2 & \ldots n_i & \ldots n_k \\ p_1^* = \dfrac{n_1}{n} & p_2^* = \dfrac{n_1}{n} & \ldots p_i^* = \dfrac{n_i}{n} & \ldots p_k^* = \dfrac{n_k}{n} \end{array} \qquad (3.2)$$

Здесь x_{i-1}, x_i — i-й интервал, в котором заключено количественное значение признака; n_i — сумма частот вариант, попавших в этот интервал; p_i^* — сумма относительных частот.

В качестве примера дискретного статистического распределения укажем массы новорожденных мальчиков (кг) и частоты (табл. 5).

Таблица 5

2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
1	2	3	7	8	12	13	10	7	6	5	6	6	5	3	3	2	1

Общее количество мальчиков (объем выборки)

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 100. \qquad (3.3)$$

Можно это распределение представить и как непрерывное (интервальное) (табл. 6).

Таблица 6

2,65 — 2,75	2,75 — 2,85	2,85 — 2,95	2,95 — 3,05	3,05 — 3,15	...
1	2	3	7	8	...

Для наглядности статистические распределения изображают графически в виде полигона и гистограммы.

Полигон частот — ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ... или для полигона относительных частот — с координатами $(x_1; p_1^*)$, $(x_2; p_2^*)$, ... (рис. 3.1). Рис. 3.1 относится к распределению, представленному в табл. 5.

Гистограмма частот — совокупность смежных прямоугольников, построенных на одной прямой линии (рис. 3.2), основания

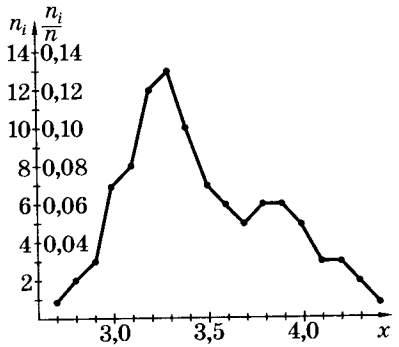


Рис. 3.1

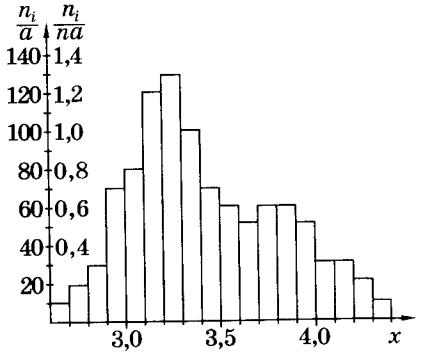


Рис. 3.2

прямоугольников одинаковы и равны a, а высоты равны отношению частоты (или относительной частоты) к a:

$$\frac{n_i}{a} \text{ или } \frac{n_i}{na} = \frac{p_i}{a}. \qquad (3.4)$$

Таким образом, площадь каждого прямоугольника равна соответственно

$$\frac{n_i}{a}a = n_i \text{ или } \frac{p_i^*}{a}a = p_i^*.$$

Следовательно, площадь гистограммы частот $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, а площадь гистограммы относительных частот

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{n}{n} = 1.$$

Наиболее распространенными характеристиками статистического распределения являются средние величины: мода, медиана и средняя арифметическая, или выборочная средняя.

Мода (Mo) равна варианте, которой соответствует наибольшая частота. В распределении массы новорожденных (см. табл. 5) $Mo = 3{,}3$ кг.

Медиана (Me) равна варианте, которая расположена в середине статистического распределения. Она делит статистический (вариационный) ряд на две равные части. При четном числе вариант за медиану принимают среднее значение из двух центральных вариант. В рассмотренном распределении (см. табл. 5) $Me = 3{,}4$ кг.

Выборочная средняя ($\bar{x}_в$) определяется как среднее арифметическое значение вариант статистического ряда:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \text{ или } \bar{x}_в = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*. \qquad (3.5)$$

Для примера (см. табл. 5)

$$\bar{x}_в = \frac{2{,}7 \cdot 1 + 2{,}8 \cdot 2 + 2{,}9 \cdot 3 + \ldots + 4{,}3 \cdot 2 + 4{,}4 \cdot 1}{100} = 3{,}468 \text{ кг}. \qquad (3.6)$$

Для характеристики рассеяния вариант вокруг своего среднего значения $\bar{x}_в$ вводят характеристику, называемую ***выборочной дисперсией,*** — среднее арифметическое квадратов отклонения вариант от их среднего значения:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2. \qquad (3.7)$$

Квадратный корень из выборочной дисперсии называют ***выборочным средним квадратическим отклонением***:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \tag{3.8}$$

Для примера (см. табл. 5)

$$D_в = \frac{(2{,}7-3{,}468)^2+2(2{,}8-3{,}468)^2+\ldots+2(4{,}3-3{,}468)^2+(4{,}4-3{,}468)^2}{100} =$$

$$=0{,}1513 \text{ кг}^2;$$

$$\sigma_в = \sqrt{0{,}1513 \text{ кг}^2} = 0{,}3896 \text{ кг}. \tag{3.9}$$

§ 3.2. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке

Предположим, что генеральная совокупность является нормальным распределением (здесь вместо вероятности следует использовать относительную частоту). Нормальное распределение полностью определено математическим ожиданием (средним значением) и средним квадратическим отклонением. Поэтому если по выборке можно оценить, т. е. приближенно найти, эти параметры, то будет решена одна из задач математической статистики — определение параметров большого массива по исследованию его части.

Как и для выборки, для генеральной совокупности можно определить генеральную среднюю $\bar{x}_г$ — среднее арифметическое значение всех величин, составляющих эту совокупность. Учитывая большой объем этой совокупности, можно полагать, что генеральная средняя равна математическому ожиданию:

$$\bar{x}_г = M(X), \tag{3.10}$$

где X — общая запись случайной величины (значения изучаемого признака) генеральной совокупности.

Рассеяние значений изучаемого признака генеральной совокупности от их генеральной средней оценивают ***генеральной дисперсией***

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_г)^2 \tag{3.11}$$

(N — объем генеральной совокупности) или ***генеральным средним квадратическим отклонением***

$$\sigma_г = \sqrt{D_г} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_г)^2}. \tag{3.12}$$

Точечная оценка. Предположим, что из генеральной совокупности производятся разные выборки; делают это так, чтобы вся генеральная совокупность сохранялась неизменной. Для определенности будем считать объемы этих выборок одинаковыми и равными n. Их выборочные средние $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots$ являются случайными величинами, которые распределены по нормальному закону (см. конец § 2.3), *а их математическое ожидание равно математическому ожиданию генеральной совокупности, т. е. генеральной средней*:

$$\bar{x}_г = M(\bar{x}_{вi}). \tag{3.13}$$

На практике иногда при достаточно большой выборке *за генеральную среднюю приближенно принимают выборочную среднюю.*

Для дисперсий положение получается несколько иным. Математическое ожидание дисперсий различных выборок $[M(D_{вi})]$, составленных из генеральной совокупности, отличается от генеральной дисперсии:

$$D_г = \frac{n}{n-1}M(D_{вi}). \tag{3.14}$$

При большом n получаем $\dfrac{n}{n-1} \approx 1$ и

$$D_г \approx M(D_{вi}). \tag{3.14а}$$

Для генерального среднего квадратического отклонения соответственно из (3.14) и (3.14а) получаем:

$$\sigma_г = \sqrt{\frac{n}{n-1}M(D_{вi})} \quad \text{и} \quad \sigma_г \approx \sqrt{M(D_{вi})}. \tag{3.15}$$

На практике иногда при достаточно большой выборке выборочное среднее квадратическое отклонение приближенно принимают за генеральное среднее квадратическое отклонение. Так, если считать, что статистическое распределение (см. табл. 5) является выборкой из некоторой генеральной совокупности, то на основании (3.6) и (3.9) можно заключить, что для этой генеральной совокупности $\bar{x}_г \approx 3{,}468$ кг и $\sigma_г \approx 0{,}3896$ кг.

Такого рода оценка параметров генеральной совокупности или каких-либо измерений определенными числами называется ***точечной оценкой***.

Интервальная оценка генеральной средней. Точечная оценка, особенно при малой выборке, может значительно отличаться от истинных параметров генеральной совокупности. Поэтому при небольшом объеме выборки пользуются ***интервальными оценками***.

В этом случае указывается интервал (***доверительный интервал***, или ***доверительные границы***), в котором с определенной (***доверительной***) ***вероятностью*** p находится генеральная средняя.

Иначе говоря, p определяет вероятность, с которой осуществляются следующие неравенства:

$$\bar{x}_в - \varepsilon < \bar{x}_г < \bar{x}_в + \varepsilon, \qquad (3.16)$$

где положительное число ε характеризует точность оценки.

Кроме доверительной вероятности используют «противоположное» понятие — ***уровень значимости***

$$\beta = 1 - p, \qquad (3.17)$$

который выражает вероятность непопадания генеральной средней в доверительный интервал.

Доверительную вероятность не следует выбирать слишком маленькой (не следует ее обесценивать). Наиболее часто p принимают равной 0,95; 0,99; 0,999. Чем больше p, тем шире интервал, т. е. тем больше ε. Чтобы установить количественную связь между этими величинами, необходимо найти выражение для доверительной вероятности. Это можно сделать, используя (2.17), однако нужно понять, что *при этом следует взять за функцию распределения вероятностей* и какие *принять пределы интегрирования*. Рассмотрим этот вопрос.

Итак, генеральная совокупность распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (средним значением) $\bar{x}_г$ и дисперсией $D_г$. Если из этой генеральной совокупности брать разные выборки с одинаковым объемом n, то можно для каждой выборки получить среднее значение $\bar{x}_в$. Эти средние значения сами являются случайными величинами. Их распределение, т. е. распределение средних значений разных выборок, полученных из одной генеральной совокупности, будет нормальным со средним значением, равным среднему значению генеральной совокупности $\bar{x}_г$, дисперсией $\frac{D_г}{n}$ и средним квадратическим отклонением $\frac{\sigma_г}{\sqrt{n}}$ (см. конец § 2.2).

Таким образом, $\bar{x}_в$ уже выступает как случайная величина, для нее можно записать следующую функцию распределения вероятностей [см. (2.22)]:

$$f(\bar{x}_в) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_г} e^{-\frac{(\bar{x}_в - \bar{x}_г)^2 n}{2\sigma_г^2}}. \qquad (3.18)$$

Из (3.16) можно записать для $\bar{x}_в$ следующие неравенства:

$$\bar{x}_г - \varepsilon < \bar{x}_в < \bar{x}_г + \varepsilon. \qquad (3.19)$$

Вероятность того, что $\bar{x}_в$ попадает в этот интервал (доверительную вероятность), можно найти по общей формуле (2.17), используя функцию (3.18). Пределы интегрирования необходимо взять из выражения (3.19):

$$p(\bar{x}_г - \varepsilon < \bar{x}_в < \bar{x}_г + \varepsilon) = \int_{x_1}^{x_г + \varepsilon} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_г} e^{-\frac{(\bar{x}_в - x_1)^2 n}{2\sigma_г^2}} d\bar{x}_в. \qquad (3.20)$$

Результаты интегрирования (3.20) найдем, используя функцию Φ (см. § 2.3). По формуле (2.25) получим

$$p(\bar{x}_г - \varepsilon < \bar{x}_в < \bar{x}_г + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\bar{x}_г + \varepsilon - \bar{x}_г}{\sigma_г}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{x}_г - \varepsilon - \bar{x}_г}{\sigma_г}\sqrt{n}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right). \qquad (3.21)$$

Обозначая

$$\tau = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_г} \qquad (3.22)$$

и учитывая (см. § 2.3), что $\Phi(-\tau) = 1 - \Phi(\tau)$, получим из (3.21):

$$p = \Phi(\tau) - \Phi(-\tau) = \Phi(\tau) - 1 + \Phi(\tau) = 2\Phi(\tau) - 1. \qquad (3.23)$$

Для нахождения p по τ или τ по p можно воспользоваться табл. 7 или таблицей функции Φ (см. [2]).

Таблица 7

τ	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8389	8315	8340	8365	8389
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767

Хотя неравенства (3.16) и (3.19) по существу идентичны, но для практических целей важнее запись (3.16), так как она позволяет решить главную задачу — при заданной доверительной вероятности и найденной выборочной средней найти доверительный интервал, в который попадает генеральная средняя.

Запишем неравенство (3.16), подставив в него выражение $\varepsilon = \frac{\tau\sigma_г}{\sqrt{n}}$ из формулы (3.22):

$$\bar{x}_в - \frac{\tau\sigma_г}{\sqrt{n}} < \bar{x}_г < \bar{x}_в + \frac{\tau\sigma_г}{\sqrt{n}}. \qquad (3.24)$$

Практически при нахождении доверительного интервала по формуле (3.24) берут выборочную среднюю некоторой конкретной выборки (объем $n \geqslant 30$), а вместо генеральной средней квадратичной используют выборочную среднюю квадратичную этой же выборки.

Поясним это некоторым примером. Вновь обратимся к данным табл. 5, считая их выборкой. Найдем доверительный интервал для генеральной средней, из которой эта выборка получена, считая доверительную вероятность равной $p = 0{,}95$. Из (3.23) для такой доверительной вероятности получаем: $\Phi(\tau) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$. В табл. 7 левый вертикальный столбец содержит значения τ с точностью до десятых долей, а верхняя горизонтальная строчка дает сотые доли τ, поэтому для $\Phi(\tau) = 0{,}975$ имеем $\tau = 1{,}9 + 0{,}06 = 1{,}96$. Подставляя это значение τ, выборочную среднюю (3.6), выборочное среднее квадратическое отклонение (3.9) и объем выборки ($n = 100$) в выражение (3.24), имеем:

$$3{,}468 - 1{,}96\frac{0{,}3896}{\sqrt{100}} < \bar{x}_г < 3{,}468 + 1{,}96\frac{0{,}3896}{\sqrt{100}},$$

или

$$3{,}392 \text{ кг} < \bar{x}_г < 3{,}544 \text{ кг}. \qquad (3.25)$$

Интервальная оценка генеральной средней при малой выборке. При достаточно большом объеме выборки можно сделать вполне надежные заключения о генеральной средней. Однако на практике часто имеют дело с выборками небольшого объема ($n < 30$). В этом случае в выражении доверительного интервала (3.16) точность оценки определяется по следующей формуле:

$$\varepsilon = \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}}, \qquad (3.26)$$

где t — параметр, называемый коэффициентом Стьюдента (его находят из распределения Стьюдента; оно здесь не рассматривается), который зависит не только от доверительной вероятности p, но и от объема выборки n. Коэффициент Стьюдента можно найти из табл. 8.

Запишем неравенство (3.16), подставив в него выражение $\varepsilon = \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}}$ из формулы (3.26):

$$\bar{x}_в - \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}} < \bar{x}_г < \bar{x}_в + \frac{t\sigma_в}{\sqrt{n-1}}, \qquad (3.27)$$

Таблица 8

Объем выборки, n	Доверительная вероятность, p			
	0,9	0,95	0,99	0,999
2	6,31	12,70	63,66	—
3	2,92	4,30	9,93	31,60
10	1,83	2,26	3,25	4,78
15	1,76	2,15	2,95	4,07

Поясним использование формулы (3.26) следующим примером. Предположим, что из генеральной совокупности, которую использовали при составлении выборки (см. табл. 5), взяли 10 случайных данных и получили следующее распределение (табл. 9):

Таблица 9

Масса, кг	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0	4,4
Частота	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Отсюда можно вычислить $\bar{x}_в = 3{,}54$ кг, $D_в = 0{,}19156$ кг^2 и $\sigma_в = 0{,}43767$ кг. Задав доверительную вероятность $p = 0{,}95$, находим из табл. 8 для объема выборки $n = 10$ параметр $t = 2{,}26$. Подставляя эти данные в (3.26), получаем для доверительного интервала [см. (3.27)]:

$$3{,}54 - \frac{2{,}26 \cdot 0{,}43767}{\sqrt{10-1}} < x_г < 3{,}54 + \frac{2{,}26 \cdot 0{,}43767}{\sqrt{10-1}}$$

или

$$3{,}21 \text{ кг} < x_г < 3{,}87 \text{ кг}. \qquad (3.28)$$

Полезно сопоставить соотношения, полученные для большой (3.25) и малой (3.28) выборок.

Интервальная оценка истинного значения измеряемой величины. Интервальная оценка генеральной средней может быть использована для оценки истинного значения измеряемой величины.

Пусть несколько раз измеряют одну и ту же физическую величину. При этом по разным случайным причинам, вообще говоря, получают разные значения: x_1, x_2, x_3, ... Будем считать, что нет преобладающего влияния какого-либо фактора на эти измерения.

Истинное значение измеряемой величины ($x_{ист}$) совершенно точно измерить невозможно хотя бы по причине несовершенства измерительных приборов. Однако можно дать интервальную оценку для этого значения.

Если значения x_1, x_2, x_3, ... рассматривать как варианты выборки, а истинное значение измеряемой величины $x_{ист}$ как аналог генеральной средней, то можно по описанным выше правилам найти доверительный интервал, в который с доверительной вероятностью p попадает истинное значение измеряемой величины. Применительно к малому числу измерений ($n < 30$) из (3.27) получим:

$$\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n-1}} < x_{ист} < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n-1}}, \qquad (3.29)$$

где $\bar{x}$ — среднее арифметическое значение из полученных измерений, а σ — соответствующее им среднее квадратическое отклонение, t — коэффициент Стьюдента.

Более подробно и разносторонне оценка результатов измерений рассматривается в практикуме (см. [1]).

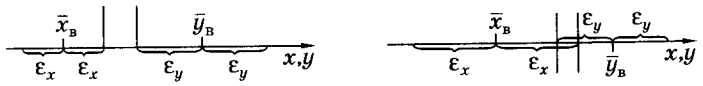
§ 3.3. Проверка гипотез

В медико-биологических исследованиях актуальной является задача сравнения выборок, полученных в результате эксперимента, заключающегося в том или ином воздействии на объект. Фактически конечный результат исследования зависит от достоверности различий значений случайной величины в контроле (до воздействия или без него) и опыте (после воздействия). Наиболее просто решается задача определения достоверности различий статистических распределений, если предварительно для выборок рассчитаны доверительные интервалы. Положим, есть два статистических распределения некоторых случайных величин X и Y. Пусть генеральные средние этих распределений с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$ находятся в доверительных интервалах $(\bar{x}_в \pm \varepsilon_x)$ и $(\bar{y}_в \pm \varepsilon_y)$, и пусть при этом $\bar{y}_в > \bar{x}_в$. Если соблюдается неравенство $(\bar{y}_в - \varepsilon_y) > (\bar{x}_в + \varepsilon_x)$, то не вызывает сомнения, что случайная величина Y существенно больше случайной величины X (см. рис. 3.3, *а*). Вероятность этого превышает 0,95.

На рис. 3.3, *б* представлен вариант, когда выборки частично пересекаются, т. е. когда выполняется неравенство $(\bar{y}_в - \varepsilon_y) < (\bar{x}_в + \varepsilon_x)$. В этом случае целесообразно оценивать достоверность различий выборочных средних $\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$ с помощью дополнительных расчетов. Наиболее просто это сделать, предполагая, что случайные величины X и Y распределены по нормальному закону. Условием существенности различия двух опытных распределений, являющихся выборками из различных генеральных совокупностей, является выполнение следующего неравенства для опытного и теоретического значений критерия Стьюдента: $t_{оп} > t_{теор}$. Для нахождения значения $t_{оп}$ используют следующую формулу:

$$t_{оп} = \frac{|\bar{x}_в - \bar{y}_в|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}. \qquad (3.30)$$

Здесь σ_x и σ_y — выборочные средние квадратические отклонения, n_x и n_y — число вариант в выборках (объемы выборок), $\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$ — выборочные средние значения.



а) *б*)

Рис. 3.3

Теоретическое значение $t_{теор}$ находят по таблице 10, входными величинами которой являются доверительная вероятность p и параметр f, связанный с числом вариант в выборках. Этот параметр определяют следующим образом. Если $\sigma_x \approx \sigma_y$, то $f = n_x + n_y - 2$. Если же σ_x и σ_y различаются на порядок и более, то величина f определяется по формуле:

$$f = (n_x + n_y - 2)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^4 + \sigma_y^4}\right). \qquad (3.31)$$

Таблица 10. Значения критерия Стьюдента $t_{теор}$ при различной доверительной вероятности и значениях параметра f

f	Доверительная вероятность, p			f	Доверительная вероятность, p		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
1	12,71	63,60		21	2,08	2,83	3,82
2	4,30	9,93	31,60	22	2,07	2,82	3,79
3	3,18	5,84	12,94	23	2,07	2,81	3,77
4	2,78	4,60	8,61	24	2,06	2,80	3,75
5	2,57	4,03	6,86	25	2,06	2,79	3,73
6	2,45	3,71	5,96	26	2,06	2,78	3,71
7	2,37	3,50	5,41	27	2,05	2,77	3,69
8	2,31	3,36	5,04	28	2,05	2,76	3,67
9	2,26	3,25	4,78	29	2,04	2,76	3,66
10	2,23	3,17	4,59	30	2,04	2,75	3,65
11	2,20	3,11	4,44	40	2,02	2,70	3,55
12	2,18	3,06	4,32	50	2,01	2,68	3,50
13	2,16	3,01	4,22	60	2,00	2,66	3,46
14	2,15	2,98	4,14	80	1,99	2,64	3,42
15	2,13	2,95	4,07	100	1,98	2,63	3,39
16	2,12	2,92	4,02	120	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	200	1,97	2,60	3,34
18	2,10	2,88	3,92	500	1,96	2,59	3,31
19	2,09	2,86	3,88		1,96	2,58	3,29
20	2,09	2,85	3,85				

Используя этот способ оценки достоверности различия выборочных средних значений двух выборок, следует придерживаться такой последовательности действий. Во-первых, по экспериментальным данным нужно найти значения выборочных средних и средних квадратических отклонений для каждой выборки. Затем, сравнив величины σ_x и σ_y, найти величину f. После этого следует задать определенное значение доверительной вероятности и по таблице 10 найти $t_{теор}$. Затем по формуле (3.30) рассчитать $t_{оп}$.

Если при сравнении теоретического и опытного критериев Стьюдента окажется, что $t_{оп} > t_{теор}$, то различие между выборочными средними значениями случайных величин X и Y можно считать существенным с заданной доверительной вероятностью. В противоположном случае различия несущественны.

Представленный выше способ оценки достоверности различий выборок по выборочным средним является довольно простым. Существует большое число тестов и критериев для сравнения выборок и составления заключения о достоверности их различий. Как правило, при этом рассматривают вероятность двух взаимоисключающих гипотез. Одна из них, условно называемая «нулевой» гипотезой, заключается в том, что наблюдаемые различия между выборками случайны (т. е. фактически различий нет). Альтернативная гипотеза означает, что наблюдаемые различия статистически достоверны. При этом для оценки обоснованности вывода о достоверности различий используют три основных доверительных уровня, при которых принимается или отвергается нулевая гипотеза. Первый уровень соответствует уровню значимости $\beta_0 < 0{,}05$; для второго уровня $\beta_0 < 0{,}01$. Наконец, третий доверительный уровень имеет $\beta_0 < 0{,}001$. При соблюдении соответствующего условия нулевая гипотеза считается отвергнутой. Чем выше доверительный уровень, тем более обоснованным он считается. Фактически значимость вывода соответствует вероятности $p = 1 - \beta_0$. В медицинских и биологических исследованиях считают достаточным уже первый уровень, хотя наиболее ответственные выводы предпочтительнее делать с большей точностью. Одной из методик, позволяющих судить о достоверности различий статистических распределений, является ранговый тест Уилкоксона. Под рангом (R_i) понимают номер, под которым стоят исходные данные в ранжированном ряду. Если в двух сравниваемых выборках данному номеру соответствуют одинаковые варианты, то рангом этих вариант является среднее арифметическое двух рангов — данного и следующего за ним (см. пример). Покажем, как используется этот тест на примере сравнения двух равных по объему выборок.

* Измеряли массу 13 недоношенных новорожденных (в граммах) в двух районах А и Б большого промышленного центра, один из которых (Б) отличался крайне неблагоприятной экологической обстановкой. Получены два статистических распределения (А) и (Б):

А: 970 990 1080 1090 1110 1120 1130 1170 1180 1180 1210 1230 1270

Б: 780 870 900 900 990 1000 1000 1020 1030 1050 1070 1070 1100

Следует решить вопрос о том, достоверны ли различия между этими статистическими распределениями.

▼Составим общий ранжированный ряд с указанием номеров соответствующих вариант ($R_{А,Б}$) — рангов (строки А и Б соответствуют выборкам):

А:								970	990											1080	1090			1110 ...
$R_А$:								5	6,5											15	16			18
Б:	780	870	900	90,0				990	1000	1000	1020	1030	1050	1070	1070				1100					
$R_Б$:	1	2	3	4				6,5	8	9	10	11	12	13	14				17					

Как видно, варианта 990 встречается в первой и второй выборках, поэтому для нее рангом является среднее арифметическое значение 6 и 7.

Далее в ряду остаются лишь варианты первой выборки, поэтому ряд не закончен. Нулевая гипотеза состоит в том, что различий между выборками нет (они случайны и потому несущественны). Ранговый тест учитывает общее размещение вариант и размеры выборок, но не требует знания типа распределения. Основной вывод о верности нулевой гипотезы делается на основании анализа минимальной суммы рангов (из двух сумм для сравниваемых выборок), т. е. критерием является величина $T = \sum R_Б$ (учитывая, что $\sum R_В < \sum R_А$). При этом пользуются специальными таблицами. В частности, если число вариант в выборках одинаково ($n_1 = n_2$), то используется таблица 11.

Таблица 11. Критические значения величины T (теста Уилкоксона) при $n_1 = n_2 = n$ для разных значений уровня значимости

n	0,05	0,01	n	0,05	0,01	n	0,05	0,01
5	17	15	12	115	105	19	303	283
6	26	23	13	136	125	20	337	315
7	36	32	14	160	147	21	373	349
8	49	43	15	184	171	22	411	386
9	62	56	16	211	196	23	451	424
10	78	71	17	240	223	24	492	464
11	96	87	18	270	252	25	536	505

Примечание. Нулевая гипотеза отбрасывается при $T < T_{0,05}$ или $T < T_{0,01}$.

В этой таблице указаны две входные величины: число вариант в выборках (n) и значение третьего и второго уровней значимости ($\beta_0 = 0{,}05$ и 0,01). В нашем случае $T = \sum R_Б = 110{,}5$, что меньше табличного значения для $n = 13$ и $\beta_0 < 0{,}01$. Следовательно, на втором уровне значимости ($p > 0{,}99$) можно отвергнуть нулевую гипотезу. Таким образом, различия выборок достоверны с вероятностью, превышающей 0,99.

§ 3.4. Корреляционная зависимость. Уравнения регрессии

Функциональные зависимости достаточно хорошо знакомы читателю. Часто эти зависимости можно выразить аналитически. Например, площадь круга зависит от радиуса ($S = \pi r^2$), ускорение тела — от силы и массы ($a = F/m_0$) и т. д.

При изучении объектов в биологии и медицине приходится иметь дело с функциональными связями другого рода. При этом определенному значению одного признака соответствует не одно значение другого, а целое распределение значений. Такая связь называется ***корреляционной связью***, или просто ***корреляцией***. Корреляционная связь, например, между возрастом и ростом детей выражается в том, что каждому значению возраста соответствует определенное распределение роста (а не одно единственное значение). При этом с увеличением возраста (до определенных пределов) возрастает и среднее значение роста.

Количественную характеристику взаимосвязи изучаемых признаков можно дать на основании вычисления показателя силы связи между ними (коэффициента корреляции) и определения зависимости одного признака от изменений другого (уравнения регрессии). Коэффициент корреляции определяет не только степень, но и направление связей между величинами. Если отсутствие функциональной зависимости между величинами условно соответствует нулевой корреляции, а полная функциональная зависимость — корреляции, равной единице, то сила корреляционной связи, вообще говоря, измеряется промежуточными значениями (от 0 до +1). При этом при положительном коэффициенте корреляции с увеличением одной величины возрастает и другая. Если же коэффициент корреляции отрицателен, то возрастание одного параметра сопровождается уменьшением другого.

В простом случае при линейной зависимости между исследуемыми параметрами используют коэффициент корреляции Бравэ—Пирсона, вычисляемый по формуле:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)(y_i - \bar{y}_в)}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad (3.32)$$

Здесь n — количество пар анализируемых признаков, $\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$ — выборочные средние значения в распределениях соответствующих параметров, σ_x и σ_y — средние квадратические отклонения. Рассчитанный по формуле (3.32) коэффициент корреляции сравнивают с теоретическим, который находят в специальной таблице с учетом определенного уровня значимости и объема выборки (см. табл. 12). Входными значениями таблицы являются число пар исследуемых признаков (n) и уровень значимости (0,05 или 0,01). При этом нулевая гипотеза заключается в том, что корреляционной связи между исследуемыми параметрами не существует. Если получают значения коэффициента корреляции больше табличного, с определенной степенью вероятности полагают, что корреляция в генеральной совокупности отличается от нуля.

Таблица 12. Критические значения выборочного коэффициента корреляции r для двух уровней значимости

n	0,05	0,01	n	0,05	0,01	n	0,01	0,01	n	0,05	0,01
4	950	990	15	514	641	26	388	496	80	219	288
5	878	959	16	497	623	27	381	487	90	206	272
6	811	917	17	482	66	28	371	478	100	196	258
7	754	874	18	468	590	29	367	470	125	175	230
8	707	834	19	456	575	33	361	463	150	163	210
9	666	798	20	444	561	35	332	435	200	138	182
10	632	765	21	433	549	40	310	407	250	142	163
11	602	735	22	423	537	45	292	384	300	113	148
12	576	708	23	413	523	50	277	364	400	098	128
13	553	684	24	404	515	60	253	333	500	088	115
14	532	661	25	396	505	70	234	308	1000	062	081

Примечание. Нуль целых и запятая в значениях r опущены. Нулевая гипотеза отбрасывается при $r > r_0$ с данным уровнем значимости (0,05 или 0,01).

Покажем на примере, как рассчитывают коэффициент корреляции Бравэ—Пирсона.

* Оценить взаимосвязь частоты пульса X и максимального артериального давления Y у детей:

X (удары/мин)	121,8	119,2	111,3	113,3	98,3	93,8
Y (мм. рт. ст.)	99,5	103,0	103,1	106,8	99,1	99,2

▼Согласно нулевой гипотезе, корреляционной связи между изучаемыми параметрами нет. Рассчитаем выборочные средние значения и средние квадратичные отклонения для приведенных выше выборок исследуемых параметров: $\bar{x}_в = 109{,}6$; $\bar{y}_в = 101{,}8$; $\sigma_x = 10{,}29$ и $\sigma_y = 2{,}81$. По формуле (3.32) рассчитываем коэффициент корреляции $r = 0{,}44$. Затем обращаемся к таблице 12 и находим для шести пар признаков ($n = 6$), теоретическое значение коэффициента корреляции 0,811 при уровне зна-

чимости 0,05 и 0,917 при уровне значимости 0,01. В том и другом случае нулевая гипотеза оказывается справедливой и корреляционной связи между анализируемыми признаками не существует с вероятностью 0,95 и 0,99.

Количественное представление зависимости изменений одного признака от изменений другого позволяет получить показатели *регрессии*. Как правило, анализ регрессии начинают с графического изображения данных. При большом числе исходных данных для выявления общей закономерности вычисляются средние значения одного признака (y) в группах (классах), соответствующих определенному интервалу значений другого признака (x). При построении графика по усредненным данным точки на графике располагаются вдоль так называемой эмпирической линии регрессии. Затем проводят подбор и составление уравнения регрессии. С помощью такого уравнения можно теоретически рассчитать значения, которые должен принимать один признак при определенных значениях другого (уравнение прогноза).

Если предполагается существование линейной зависимости между исследуемыми признаками (линейная регрессия), то проводить регрессионный анализ наиболее просто. Часто при этом применяют графический метод. Для проведения линии регрессии используют прозрачную линейку, придавая ей такое положение, чтобы выше и ниже предполагаемой линии регрессии оказалось приблизительно одинаковое число эмпирических точек. На полученной прямой определяют координаты двух наиболее отдаленных точек x_1, y_1 и x_2, y_2. Затем составляют систему двух уравнений:

$$y_1 = a + bx_1,$$

$$y_2 = a + bx_2.$$

Из полученной системы уравнений определяют неизвестные $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, $a = y_1 - bx_1 = y_2 - bx_2$. Наконец, при известных коэффициентах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ записывают уравнение прогноза, на основании которого можно рассчитать значение параметра y при известном значении x.

В настоящее время при статистическом анализе экспериментальных данных широко используются компьютерные вычислительные программы, позволяющие проводить корреляционный и регрессионный анализ. Более подробно практическое применение этого вида анализа рассматривается в курсе социальной гигиены и организации здравоохранения.

РАЗДЕЛ

2

Механика. Акустика

Механикой называют раздел физики, в котором изучается механическое движение материальных тел. Под механическим движением понимают изменение положения тела или его частей в пространстве с течением времени. Механика, в основу которой положены законы Ньютона, называется классической. В ней рассматриваются движения макроскопических тел, происходящие со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме. Вопросы данного раздела могут, в частности, быть использованы для следующих целей:

— понимания механики движения целого организма и механики опорно-двигательного аппарата человека;

— знания механических свойств биологических тканей и жидкостей;

— знания общих закономерностей периодических процессов, протекающих в организме;

— понимания работы уха и вестибулярного аппарата как физических устройств, сердца как насоса и т. п.;

— выяснения биофизического механизма действия ультразвука и др.

ГЛАВА 4

Некоторые вопросы биомеханики

Биомеханикой называют раздел биофизики, в котором рассматриваются механические свойства живых тканей и органов, а также механические явления, происходящие как с целым организмом, так и с отдельными его органами. Говоря кратко, биомеханика — это механика живых систем.

§ 4.1. Механическая работа человека. Эргометрия

Механическая работа, которую способен совершить человек в течение дня, зависит от многих факторов, поэтому трудно указать какую-либо предельную величину. Это замечание относится и к мощности. Так, при кратковременных усилиях человек может развивать мощность порядка нескольких киловатт. Если спортсмен массой 70 кг подпрыгивает с места так, что его центр масс поднимается на 1 м по отношению к нормальной стойке, а фаза отталкивания длится 0,2 с, то он развивает мощность около 3,5 кВт.

При ходьбе человек совершает работу, так как при этом энергия затрачивается на периодическое небольшое поднятие тела и на ускорение и замедление конечностей, главным образом ног.

Человек массой 75 кг при ходьбе со скоростью 5 км/ч развивает мощность около 60 Вт. С возрастанием скорости эта мощность быстро увеличивается, достигая 200 Вт при скорости 7 км/ч. При езде на велосипеде положение центра масс человека изменяется гораздо меньше, чем при ходьбе, а ускорение ног тоже меньше. Поэтому мощность, затрачиваемая при езде на велосипеде, значительно меньше: 30 Вт при скорости 9 км/ч, 120 Вт при 18 км/ч.

Работа обращается в нуль, если перемещения нет. Поэтому, когда груз находится на опоре или подставке или подвешен на нити, сила тяжести не совершает работы. Однако каждому из нас

знакома усталость мышц руки и плеча, если держать неподвижно на вытянутой руке гирю или гантель. Точно так же устают мышцы спины и поясничной области, если сидящему человеку поместить на спину груз. В обоих случаях груз неподвижен и работы нет. Усталость же свидетельствует о том, что мышцы совершают работу. Такую работу называют ***статической работой мышц.***

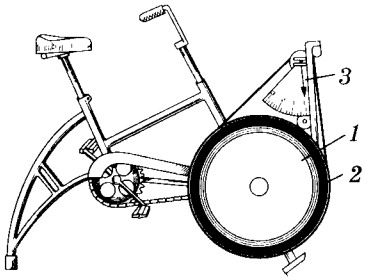


Рис. 4.1

Статики (неподвижности) такой, как ее понимают в механике, на самом деле нет. Происходят очень мелкие и частые, незаметные глазу сокращения и расслабления, и при этом совершается работа против сил тяжести. Таким образом, статическая работа человека на самом деле является обычной динамической работой.

Для измерения работы человека применяют приборы, называемые ***эргометрами.*** Соответствующий раздел измерительной техники называется ***эргометрией.***

Примером эргометра служит тормозной велосипед (велоэргометр; рис. 4.1). Через обод вращающегося колеса *1* перекинута стальная лента *2*. Сила трения между лентой и ободом колеса измеряется динамометром *3*. Вся работа испытуемого затрачивается на преодоление силы трения (остальными видами работ пренебрегаем). Умножив длину окружности колеса на силу трения, найдем работу, совершаемую при каждом обороте, а зная число оборотов и время испытания, определим полную работу и среднюю мощность.

§ 4.2. Некоторые особенности поведения человека при перегрузках и невесомости

В обычных условиях на человека действуют сила тяжести и сила реакции опоры. При отсутствии ускорения эти силы равны и противоположно направлены. Такое состояние естественно для человека.

При ускоренном движении системы могут возникнуть особые состояния, называемые перегрузками и невесомостью.

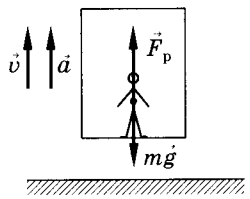


Рис. 4.2

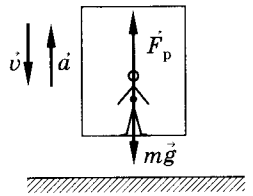


Рис. 4.3

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть человек находится в кабине лифта (в ракете), который поднимается вверх с ускорением $\vec{a}$ (рис. 4.2). На человека действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{F}_р$. По второму закону Ньютона, $\vec{F}_р + m\vec{g} = m\vec{a}$, или в скалярной форме с учетом направления сил

$$F_р - mg = ma;\ F_р = m(g + a). \qquad \textbf{(4.1)}$$

В этом случае сила реакции опоры больше силы тяжести ($F_р > mg$), и возникают перегрузки. Так, если $a = g$, то $F_р = 2mg$ (двукратная перегрузка), если $a = 2g$, то $F_р = 3mg$ (трехкратная перегрузка) и т. д. Перегрузка выражается отношением $\eta = \dfrac{F_р}{mg}$.

Другой пример: человек находится в кабине лифта (внутри спускаемого космического аппарата), который замедленно, т. е. с торможением, опускается вниз (рис. 4.3). Направления сил и ускорения соответствуют предыдущему примеру, поэтому и в этом случае получаем формулу (4.1). Человек испытывает перегрузки.

Перегрузки могут оказывать существенное влияние на организм человека, так как в этих состояниях происходит отток крови, изменяется взаимное давление внутренних органов друг на друга, возникает их деформация и т. п. Поэтому человек способен выдерживать лишь ограниченные перегрузки. На рис. 4.4 схематически показаны положения тела и приведены соответствующие значения перегрузок, которые может в течение по крайней мере нескольких минут выносить здоровый человеческий организм без того, чтобы произошли какие-либо серьезные нарушения.

Если лифт (или космический корабль) ускоренно движется вниз (рис. 4.5) или замедленно вверх, то

$$mg - F_р = ma \text{ или } F_р = m(g - a). \qquad \textbf{(4.2)}$$

Как видно, реакция опоры меньше силы тяжести $F_р < mg$. Если $a = g$, то $F_р = 0$ — состояние невесомости. Это такое состояние,

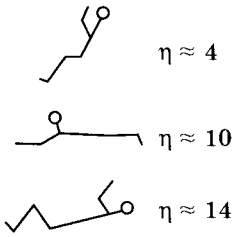


Рис. 4.4

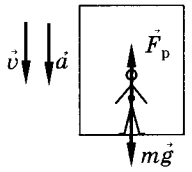


Рис. 4.5

при котором действующие на систему внешние силы не вызывают взаимных давлений частиц системы друг на друга.

Для биологических объектов невесомость — необычное состояние, хотя и в обыденной жизни встречаются кратковременные периоды частичной невесомости: прыжки, качели, начало движения вниз скоростного лифта и т. п.

Отсутствие действия опоры при невесомости приводит к общей детренированности и связанному с этим снижению работоспособности; при этом уменьшается мышечная масса, происходит деминерализация костной ткани. Поэтому космонавтам в условиях невесомости приходится проводить специальные тренировочные физические упражнения или носить особые костюмы, которые, затрудняя движение, позволяют догружать работу мышц.

В обычных условиях гидростатическое давление ρgh крови в верхней части тела меньше, чем в нижней. В невесомости кровь равномерно распределяется в организме; это означает, что верхняя часть тела переполнена кровью по сравнению с обычным состоянием, ощущается тяжесть в голове, появляется отечность лица.

Вестибулярный аппарат (см. § 4.3) на невесомость будет реагировать так, как будто отсутствует гравитационное поле, возникнут вестибулярные расстройства.

Рассмотрим подробнее особенности движения тела человека в условиях невесомости.

Практическое освоение человеком законов механики происходит с раннего детства: мы учимся сидеть, стоять, ходить, бегать, совершать физические упражнения, работать, кататься на велосипеде и т. п. Все это постигается нами в основном без теоретических знаний соответствующих законов. Человек привыкает к бессознательному совершению механических действий. Так, при толкании ядра человек инстинктивно упирается ногой, чтобы не упасть при «отдаче»; ударяя молотком, рабочий непроизвольно напрягает мышцы, препятствующие вращению корпуса, и т. д.

Парадоксально, но человек настолько привыкает к законам механики, что начинает замечать их проявление в особых, редких и малопривычных случаях.

К таким особенностям и практически важным проявлениям законов механики относится двигательная деятельность человека в условиях невесомости или, как принято говорить, в безопорном пространстве. Нетрудно подсчитать, пользуясь законом сохранения импульса, что если человек массой 100 кг в состоянии невесомости бросит тело массой 0,1 кг со скоростью 3 м/с, то сам он начинает двигаться в противоположную сторону со скоростью 0,3 см/с. Если бросок сделать с размахом руки, то тело человека начнет поворачиваться. Таково необычное, по сравнению с земными условиями, проявление законов сохранения импульса и момента импульса. Остановиться человек сможет, только взаимодействуя с другими телами. Если человек в состоянии невесомости захочет сделать упражнение «угол», которое достаточно четко выполняют гимнасты в обычных условиях, то движение ног вызовет встречный поворот корпуса (рис. 4.6). Поворот корпуса в условиях невесомости, в том числе и при свободном падении, совершают путем вращения конечностями. Так, например, конусообразные вращательные движения рукой над головой вызовут вращение корпуса вокруг оси симметрии (рис. 4.7).

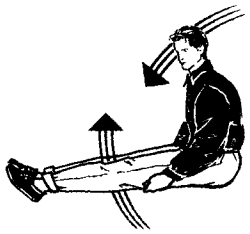


Рис. 4.6



Рис. 4.7

Если в условиях невесомости человек будет завинчивать гайку, то он сам начнет вращаться в противоположном направлении.

В условиях невесомости действуют те же известные законы Ньютона, но в силу необычности условий человек должен привыкать к движениям в невесомости. Резкие движения головой, руками или ногами, отбрасывание каких-либо предметов могут существенно изменить движение тела человека.

Это учитывается космонавтами как при подготовке к космическим полетам, так и во время полета. Первый человек планеты, вышедший в открытый космос, А. А. Леонов пишет в своей книге, что «...после некоторой подготовки человек сможет даже при безопорном «плавании» в невесомости быстро и точно ориентировать свое тело в любом направлении исключительно за счет мышечных усилий, не прибегая к помощи технических средств». И далее: «По-видимому, в невесомости, при наличии самой незначительной точки опоры, можно выполнять любые работы без заметных нарушений координации движений»[1].

§ 4.3. Вестибулярный аппарат как инерциальная система ориентации

В обычных условиях положение свободно подвешенного маятника указывает направление силы тяжести (рис. 4.8, *а*). Если маятник покоится относительно ускоренно движущейся системы отсчета (неинерциальная система отсчета), то его положение зависит от ускорения системы $\vec{a}$ (рис. 4.8, *б*). Как следует из рисунка, по второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_н + m\vec{g} = \vec{F}_р = m\vec{a},$$

где результирующая сила равна по величине

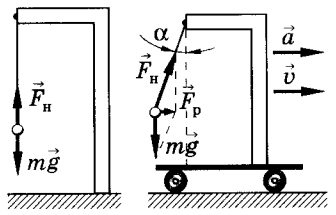
$$F_р = mg \operatorname{tg} \alpha, \text{ или } ma = mg \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$a = g \operatorname{tg} \alpha. \qquad (4.3)$$

Следовательно, даже простой математический маятник в принципе может быть использован для определения модуля и направления ускорения системы.

Более удобным индикатором ускорения системы является устройство, изображенное на рис. 4.9, — тело известной массы укреплено на шести пружинках. По деформации пружин можно оп-



а) *б*)

Рис. 4.8

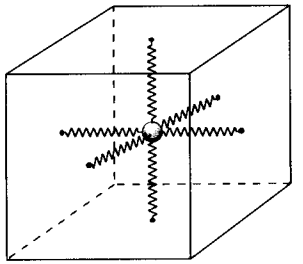


Рис. 4.9

[1] Леонов А. А., Лебедев В. И. Психологические особенности деятельности космонавтов. М., 1971.

ределить значение и направление силы, действующей на тело, а отсюда и ускорение системы, если учесть ускорение свободного падения. Такого рода индикаторы используются в инерциальной навигации, получившей развитие в связи с решением космических задач.

В самом деле, если известно ускорение системы, например ракеты, в каждый момент времени, то можно найти зависимость скорости от времени:

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt. \qquad (4.4)$$

Определив $\vec{v} = f(t)$, можно найти положение системы в любой момент:

$$x = \int v_x dt,\ y = \int v_y dt,\ z = \int v_z dt. \qquad (4.5)$$

Таким образом, можно без помощи средств, находящихся вне ракеты, автономно установить ее местоположение, скорость и ускорение в любой момент времени.

Соответствующие устройства называются ***инерциальными системами ориентации.***

В человеческом организме имеется орган, который тоже, по существу, является инерциальной системой ориентации, — это ***вестибулярный аппарат***[1]. Он расположен во внутреннем ухе и состоит из трех взаимно перпендикулярных полукружных каналов K и полости — преддверия B (рис. 4.10). На внутренней поверхности стенок преддверия и в части полукружных каналов находятся группы чувствительных нервных клеток, имеющих свободные окончания в форме волосков. Внутри преддверия и полукружных каналов есть студенистая масса (эндолимфа), содержащая мелкие кристаллы фосфорнокислого и углекислого кальция (отолиты). Ускоренное перемещение головы вызывает перемещение эндолимфы и отолитов, что воспринимается нервными клетками (через волоски). Вестибулярный аппарат, как и любая другая физическая система, не отличает гравитационное воздействие от воздействий, возникающих при ускоренном движении системы.

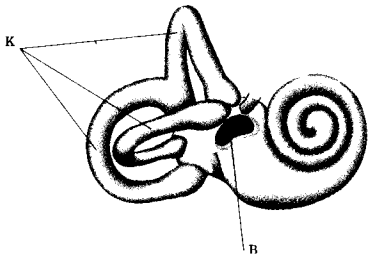


Рис. 4.10

[1] От системы, изображенной на рис. 4.9, вестибулярный аппарат принципиально отличается тем, что не способен количественно определить ускорение человека. Это обстоятельство не позволяет человеку, едущему в закрытой кабине машины, определить местонахождение автомобиля.

Наш организм приспособился к действию силы тяжести; соответствующую привычную информацию клетки вестибулярного аппарата сообщают в мозг, поэтому состояния невесомости и перегрузок воспринимаются нами посредством вестибулярного аппарата (и других органов) как необычные состояния, к которым необходимо приспособиться.

Если оказывается периодическое воздействие на вестибулярный аппарат человека, например, при качке корабля, то это может привести организм в особое состояние, называемое ***морской болезнью.***

ГЛАВА 5

Механические колебания и волны

Повторяющиеся движения или изменения состояния называют колебаниями (переменный электрический ток, движение маятника, работа сердца и т. п.). Всем колебаниям, независимо от их природы, присущи некоторые общие закономерности. В зависимости от характера взаимодействия колеблющейся системы с окружающими телами различают колебания свободные, вынужденные и автоколебания. Колебания распространяются в среде в виде волн. В данной главе рассматриваются механические колебания и волны.

§ 5.1. Свободные механические колебания (незатухающие и затухающие)

Свободными (собственными) колебаниями называют такие, которые совершаются без внешних воздействий за счет первоначально полученной телом энергии. Характерными моделями таких механических колебаний являются материальная точка на пружине (пружинный маятник) и материальная точка на нерастяжимой нити (математический маятник).

В этих примерах колебания возникают либо за счет первоначальной потенциальной энергии (отклонение материальной точки от положения равновесия и движение без начальной скорости), либо за счет кинетической (телу сообщается скорость в начальном

положении равновесия), либо за счет и той и другой энергии (сообщение скорости телу, отклоненному от положения равновесия).

Рассмотрим пружинный маятник. В положении равновесия (рис. 5.1, *а*) упругая сила $\vec{F}_1$ уравновешивает силу тяжести $m\vec{g}$. Если оттянуть пружину на расстояние x (рис. 5.1, *б*), то на материальную точку будет действовать бóльшая упругая сила. Изменение значения упругой силы (F), согласно закону Гука, пропорционально изменению длины пружины или смещению x точки:

$$F = -kx, \qquad (5.1)$$

где k — коэффициент пропорциональности между силой и смещением, который в данном случае является жесткостью пружины; знак минус показывает, что сила всегда направлена в сторону положения равновесия: $F < 0$ при $x > 0$, $F > 0$ при $x < 0$.

Другой пример. Математический маятник (рис. 5.2) отклонен от положения равновесия на такой небольшой угол α, чтобы можно было считать траекторию движения материальной точки прямой линией, совпадающей с осью OX. При этом выполняется приближенное равенство:

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \frac{x}{l}, \qquad (5.2)$$

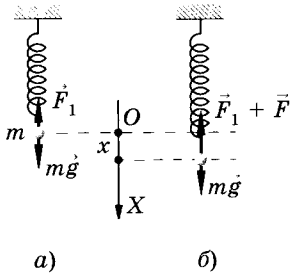
где x — смещение материальной точки относительно положения равновесия, l — длина нити маятника.

На материальную точку (рис. 5.2) действуют сила натяжения нити $\vec{F}_н$ и сила тяжести $m\vec{g}$, модуль их равнодействующей равен

$$|F| = mg\operatorname{tg}\alpha = mg\frac{x}{l} = kx, \qquad (5.3)$$

где k — коэффициент пропорциональности между силой и смещением, который в данном случае равен

$$k = \frac{mg}{l}. \qquad (5.4)$$



а) *б*)

Рис. 5.1

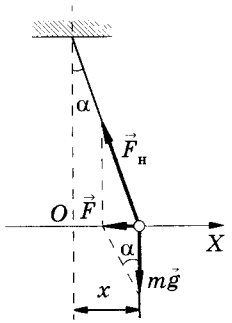


Рис. 5.2

Сравнивая (5.3) и (5.1), видим, что в этом примере равнодействующая сила подобна упругой, так как пропорциональна смещению материальной точки и направлена к положению равновесия. Такие силы, неупругие по природе, но аналогичные по свойствам силам, возникающим при малых деформациях упругих тел, называют ***квазиупругими***.

На материальные точки, рассмотренные в этих примерах, кроме упругой и квазиупругой силы действует и сила сопротивления (трения), модуль которой обозначим F_c (на рисунках не показана).

Дифференциальное уравнение, описывающее движение материальной точки, получаем на основании второго закона Ньютона (произведение массы тела на его ускорение равно сумме всех действующих сил):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_c. \qquad (5.5)$$

Выражение для смещения материальной точки, которое получается из решения этого уравнения, рассмотрим для некоторых частных случаев.

Незатухающие колебания. Рассмотрим модель, в которой пренебрегают силой сопротивления ($F_c = 0$). Из (5.5) имеем: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. Заменяя

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad (5.6)$$

и преобразуя, получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (5.7)$$

Его решение, в чем можно убедиться подстановкой, приводит к ***гармоническому колебанию***:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (5.8)$$

где $\omega_0 t + \varphi_0 = \varphi$ — фаза колебаний, φ_0 — начальная фаза (при $t = 0$), ω_0 — круговая частота колебаний, A — их амплитуда.

Амплитуда и начальная фаза колебаний определяются начальными условиями движения, т. е. положением и скоростью материальной точки в момент $t = 0$.

Среди различных видов колебаний гармоническое колебание является наиболее простой формой.

Таким образом, материальная точка, подвешенная на пружине (пружинный маятник) или нити (математический маятник), совершает гармонические колебания, если не учитывать силы сопротивления.

При преобразовании дифференциального уравнения гармонического колебания величина ω_0 была введена формально [см. (5.6)], однако она имеет важный физический смысл, так как определяет частоту колебаний $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$ системы и показывает, от каких факторов (параметров) эта частота зависит: от жесткости пружины и массы в одном примере, длины нити и ускорения свободного падения в другом.

Период колебаний может быть найден из формулы

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (5.9)$$

Используя (5.6), получаем *период колебаний пружинного маятника*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (5.10)$$

подставляя вместо k выражение (5.4), находим *период колебаний математического маятника*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (5.11)$$

Очень удобно изображать гармонические колебания с помощью векторных диаграмм. Этот метод состоит в следующем. Из начала оси абсцисс проведем вектор $\vec{A}$ (рис.5.3), проекция которого на ось OX равна $A\cos\varphi$. Если вектор $\vec{A}$ будет равномерно вращаться с угловой скоростью ω_0 против часовой стрелки, то $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, где φ_0 — начальное значение φ, и проекция вектора $\vec{A}$ на ось OX будет изменяться со временем по закону (5.8). В таком представлении амплитуда колебаний есть модуль равномерно вращающегося вектора $\vec{A}$, фаза колебаний — угол между вектором $\vec{A}$ и осью OX, начальная фаза — начальное значение этого угла, круговая частота колебаний — угловая скорость вращения вектора $\vec{A}$, смещение x колеблющейся точки — проекция вектора $\vec{A}$ на ось OX.

Чтобы найти скорость материальной точки при гармоническом колебании, нужно взять производную от выражения (5.8) по времени:

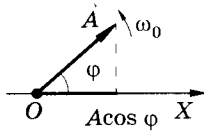


Рис. 5.3

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= -\upsilon_m\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (5.12)$$

где $\upsilon_m = A\omega_0$ — максимальная скорость (амплитуда скорости).

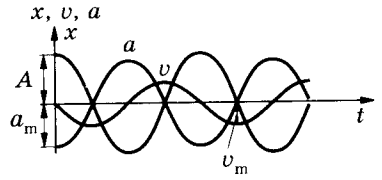


Рис. 5.4

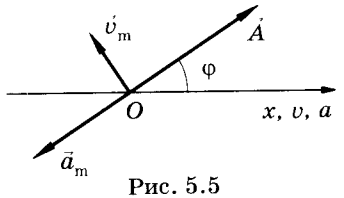


Рис. 5.5

На основании тригонометрических формул преобразуем (5.12):

$$\upsilon = \upsilon_m\cos\left[\frac{\pi}{2} + (\omega_0 t + \varphi_0)\right]. \qquad (5.13)$$

Сравнивая (5.13) и (5.8), замечаем, что фаза скорости на $\pi/2$ больше фазы смещения, т. е. скорость опережает по фазе смещение на $\pi/2$.

Продифференцировав (5.12), найдем ускорение:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (5.14)$$

где $a_m = A\omega_0$ — максимальное ускорение (амплитуда ускорения).

Вместо (5.14) запишем

$$a = a_m\cos[\pi + (\omega_0 t + \varphi_0)]. \qquad (5.15)$$

Из сравнения (5.15) и (5.8) следует, что фазы ускорения и смещения различаются на π, т. е. эти величины изменяются в противофазе. Графики зависимости смещения, скорости и ускорения от времени показаны на рис. 5.4, а их векторные диаграммы — на рис. 5.5.

Затухающие колебания. В реальном случае на колеблющееся тело действуют силы сопротивления (трения), характер движения изменяется, и колебание становится ***затухающим***. Для того чтобы из уравнения (5.5) найти временную зависимость затухающего колебания, необходимо знать, от каких параметров и как зависит сила сопротивления. Обычно предполагают, что при не очень больших амплитудах и частотах эта сила пропорциональна скорости движения и, естественно, направлена противоположно скорости: $\vec{F}_c = -r\vec{\upsilon}$, где r — коэффициент трения (сопротивления), характеризующий свойства среды оказывать сопротивление.

Применительно к одномерному движению последней формуле придадим следующий вид:

$$F_c = -r\frac{dx}{dt}. \qquad (5.16)$$

Подставим выражение (5.16) в уравнение (5.5) и получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}. \qquad (5.17)$$

Разделив обе части уравнения на m, запишем его в стандартной форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (5.18)$$

После замены $\frac{r}{m} = 2\beta$ и $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ получаем окончательную запись дифференциального уравнения свободных колебаний с учетом сил сопротивления:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (5.19)$$

где β — *коэффициент затухания*; ω_0 — круговая *частота собственных колебаний* системы (без затухания).

Решение (5.19) существенно зависит от знака разности $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, где ω — круговая частота затухающих колебаний. При $\omega^2 - \beta^2 > 0$ круговая частота ω является действительной величиной и решение уравнения (5.19) будет следующим:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (5.20)$$

График этой функции показан на рис. 5.6 сплошной кривой *1*; штриховой линией *2* изображено изменение амплитуды:

$$A = \pm A_0 e^{-\beta t}, \qquad (5.21)$$

где значение A_0 приведено на рисунке.

Период затухающих колебаний зависит от коэффициента трения и определяется формулой:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (5.22)$$

При очень малом трении ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) период затухающего колебания близок к периоду незатухающего свободного колебания: $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Быстрота убывания амплитуды колебаний определяется коэффициентом затухания: чем сильнее тормозящее действие среды, тем больше β и тем быстрее уменьшается амплитуда. На практике, однако, степень затухания часто характеризуют ***логарифмическим декрементом затухания***, понимая под этим величину, равную натуральному логарифму отношения двух последователь-

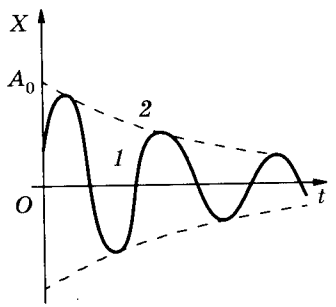


Рис. 5.6

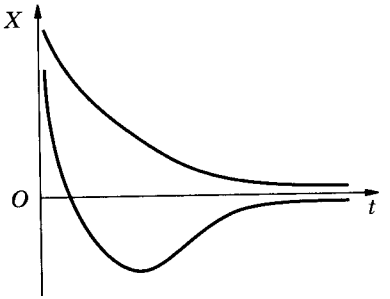


Рис. 5.7

ных амплитуд, разделенных интервалом времени, равным периоду колебаний:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln(e^{\beta T}) = \beta T;$$

следовательно, коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания связаны достаточно простой зависимостью:

$$\lambda = \beta T. \qquad (5.23)$$

При сильном затухании ($\beta^2 > \omega^2$) из формулы (5.22) видно, что период колебания является мнимой величиной. Движение в этом случае уже не будет периодическим и называется ***апериодическим***[1].

Возможные апериодические движения представлены в виде графиков на рис. 5.7. Этот случай применительно к электрическим явлениям рассматривается в гл. 14.

§ 5.2. Кинетическая и потенциальная энергии колебательного движения

Кинетическую энергию материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону, можно вычислить по известной формуле, используя выражение (5.12):

$$E_к = \frac{1}{2}mv_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1/2\ mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (5.24)$$

[1] Заметим, что если некоторая физическая величина принимает мнимые значения, то это означает какую-то необычность, экстраординарность соответствующего явления. В рассмотренном примере экстраординарность заключается в том, что процесс перестает быть периодическим.

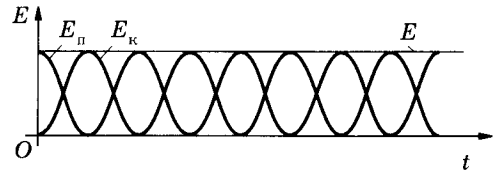


Рис. 5.8

Потенциальную энергию колебательного движения найдем, исходя из общей формулы для потенциальной энергии упругой деформации $E_п = \frac{1}{2}kx^2$ и используя выражение (5.8):

$$E_п = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (5.25)$$

Складывая кинетическую (5.24) и потенциальную (5.25) энергии, получаем полную механическую энергию материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону:

$$E = E_к + E_п = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}kA^2. \qquad (5.26)$$

При отсутствии сил трения полная механическая энергия системы не изменяется:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \qquad (5.27)$$

Графически зависимости кинетической, потенциальной и полной механической энергий колеблющейся системы от времени показаны на рис. 5.8.

§ 5.3. Сложение гармонических колебаний

Материальная точка может одновременно участвовать в нескольких колебаниях. В этом случае, чтобы найти уравнение и траекторию результирующего движения, следует сложить колебания. Наиболее просто выполняется сложение гармонических колебаний. Рассмотрим две такие задачи.

Сложение гармонических колебаний, направленных по одной прямой. Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях, происходящих вдоль одной линии. Аналитически такие колебания выражаются следующими уравнениями:

$$x_1 = A_1\cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}),\ x_2 = A_2\cos(\omega_{02}t + \varphi_{02}).$$

Допустим, что частоты складываемых колебаний одинаковы ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$), тогда результирующее смещение точки

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) + A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_{02}). \qquad (5.28)$$

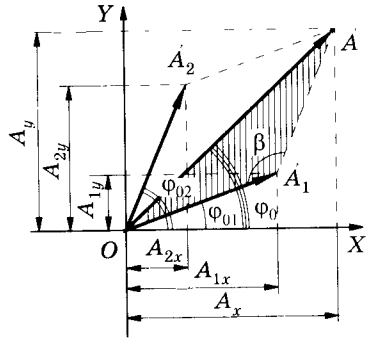


Рис. 5.9

Выполним такое сложение с помощью векторной диаграммы. Изобразим положение векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ в начальный момент времени (рис. 5.9), углы между этими векторами и осью OX равны начальным фазам слагаемых колебаний φ_{01} и φ_{02}. Вектор $\vec{A}$ — амплитуда результирующего колебания. Так как $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью, то и сумма их — вектор $\vec{A}$ — будет вращаться с той же угловой скоростью, т. е. результирующее движение является гармоническим с круговой частотой ω_0:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (5.29)$$

Выразим амплитуду A этого колебания и начальную фазу φ_0 через заданные значения A_1, A_2, φ_{01} и φ_{02}. Применяя теорему косинусов к треугольнику, заштрихованному на рис. 5.9, получаем

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\beta.$$

Так как $-\cos\beta = -\cos[\pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})] = \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$, то

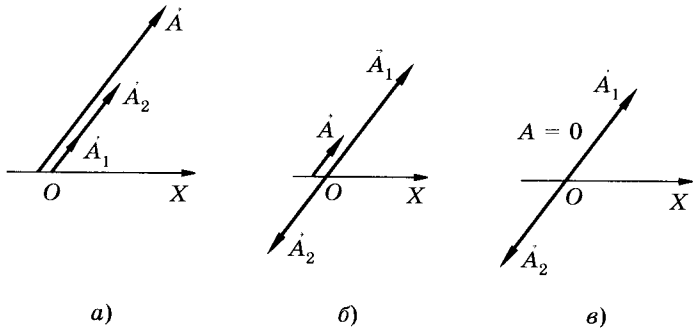
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \qquad (5.30)$$

Как видно из рис. 5.9, tg φ равен отношению проекции $\vec{A}$ на ось OY к проекции $\vec{A}$ на ось OX, т. е. A_y/A_x. Учитывая, что проекция суммы равна сумме проекций, имеем:

$$A_y = A_{1y} + A_{2y} = A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02},$$

$$A_x = A_{1x} + A_{2x} = A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}. \qquad (5.31)$$



а) *б)* *в)*

Рис. 5.10

Таким образом, поставленная задача решена: по формулам (5.30) и (5.31) можно найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Из выражения (5.30) вытекают следующие частные случаи:

1) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi$, $\cos 2k\pi = +1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, и тогда

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2, \qquad (5.32)$$

т. е. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд слагаемых колебаний, если разность начальных фаз равна четному числу π (рис. 5.10, *а*);

2) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k + 1)\pi$, $\cos(2k + 1)\pi = -1$, тогда

$$A = \sqrt{A_1^2 - A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|, \qquad (5.33)$$

т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд слагаемых колебаний, если разность начальных фаз равна нечетному числу π (рис. 5.10, *б*). В частности, при $A_1 = A_2$ имеем $A = 0$, т. е. колебания нет (рис. 5.10, *в*). Это достаточно очевидно: если материальная точка участвует одновременно в двух колебаниях, имеющих одинаковую амплитуду и совершающихся в противофазе, то точка неподвижна. Если частоты складываемых колебаний не одинаковы, то сложное колебание уже не будет гармоническим.

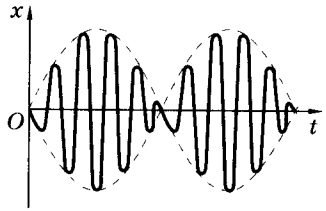


Рис. 5.11

Интересен случай, когда частоты слагаемых колебаний мало отличаются друг от друга: $\omega_{01} \approx \omega_{02}$.

Результирующее колебание при этом подобно гармоническому, но с медленно изменяющейся амплитудой (амплитудная модуляция). Такие колебания называются биениями (рис. 5.11).

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях: одно направлено вдоль оси OX, другое — вдоль оси OY. Колебания заданы следующими уравнениями:

$$x = A_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}); \; y = A_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_{02}). \qquad (5.34)$$

Допустим, что частоты колебаний одинаковы, т. е. $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, тогда

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}); \; y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}). \qquad (5.35)$$

Уравнения (5.35) задают траекторию движения материальной точки в параметрической форме. Если в эти уравнения подставлять разные значения t, то можно определить координаты x и y, а совокупность координат и есть траектория. Более наглядно траекторию можно представить в виде зависимости $y = f(x)$, для получения которой следует исключить время из уравнений (5.35). Произведя математические преобразования, получим уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \qquad (5.36)$$

Таким образом, ***при одновременном участии в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях одинаковой частоты материальная точка движется по эллиптической траектории*** (рис. 5.12).

Из выражения (5.36) вытекают некоторые частные случаи:

1) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k + 1)\pi/2$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\cos[(2k + 1)\pi/2] = 0$, $\sin[(2k + 1)\pi/2] = 1$, и тогда

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \qquad (5.37)$$

Это каноническая форма уравнения эллипса, соответствующая симметричному расположению его относительно осей координат (рис. 5.13, *а*). Из (5.37) при $A_1 = A_2 = R$ (рис. 5.13, *б*) получаем уравнение окружности радиусом R:

$$x^2 + y^2 = R^2; \qquad (5.38)$$

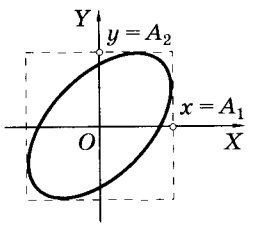
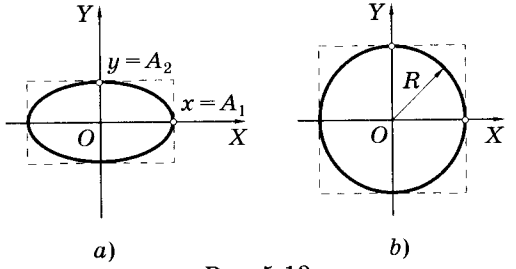
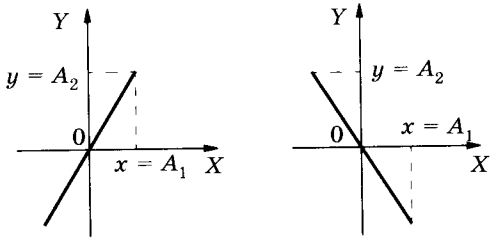


Рис. 5.12



а) *б)*

Рис. 5.13



а) *б)*

Рис. 5.14

2) $\varphi_{02} - \varphi_{01} = k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\cos k\pi = \pm 1$, $\sin^2 k\pi = 0$, и тогда

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} \pm 2\frac{xy}{A_1 A_2} = 0, \qquad (5.39)$$

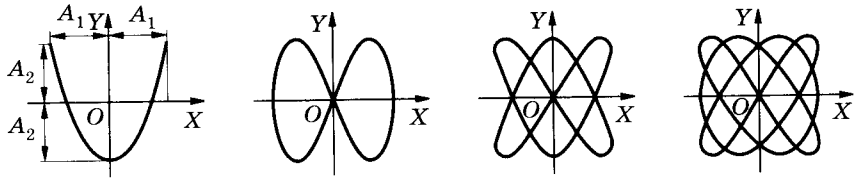
или после преобразований

$$\left(\frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0, \quad \frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0, \quad y = \pm \frac{A_2}{A_1} x. \qquad (5.40)$$

Это уравнение ***прямой линии***, в которую вырождается эллипс [рис. 5.14, *а* соответствует знаку «+» в уравнении (5.40); рис. 5.14, *б* — знаку «−»].

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот получаются различные траектории материальной точки, названные ***фигурами Лиссажу***.

Вид фигур Лиссажу зависит как от соотношения амплитуд A_1 и A_2, так и от отношения частот ω_1/ω_2 и разности начальных фаз $\varphi_{01} - \varphi_{02}$ слагаемых колебаний (рис. 5.15):



$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$, $\varphi_{01} - \varphi_{02} = 0$; *а)*

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$, $\varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$; *б)*

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$, $\varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$; *в)*

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4}$, $\varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$. *г)*

Рис. 5.15

§ 5.4. Сложное колебание и его гармонический спектр

Как видно из § 5.3, сложение колебаний приводит к более сложным формам колебаний. Для практических целей бывает необходимой противоположная операция: разложение сложного колебания на простые, обычно гармонические, колебания.

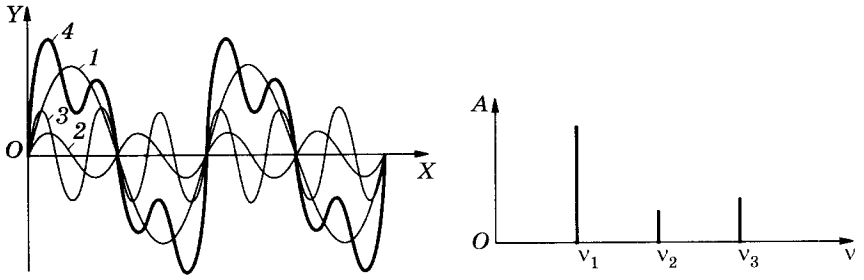
Ж. Фурье показал, что периодическая функция любой сложности может быть представлена в виде суммы гармонических функций, частоты которых кратны частоте сложной периодической функции.

Такое разложение периодической функции на гармонические составляющие и, следовательно, разложение различных периодических процессов (механические, электрические и т. п.) на гармонические колебания называется ***гармоническим анализом***. Существуют математические выражения, которые позволяют найти составляющие гармонические функции. Автоматически гармонический анализ колебаний, в том числе и для целей медицины, осуществляется специальными приборами — ***анализаторами***.

Совокупность гармонических колебаний, на которые разложено сложное колебание, называется ***гармоническим спектром сложного колебания***.

Гармонический спектр удобно представить как набор частот (или круговых частот) отдельных гармоник совместно с соответствующими им амплитудами. Наиболее наглядно такое представление выполняется графически. В качестве примера на рис. 5.16, *а* изображены графики сложного колебания (кривая *4*) и составляющих его гармонических колебаний (кривые *1*, *2* и 3); на рис. 5.16, *б* показан гармонический спектр, соответствующий этому примеру.

Гармонический анализ позволяет достаточно детально описать и проанализировать любой сложный колебательный процесс, он находит применение в акустике, радиотехнике, электронике и других областях науки и техники.



а) *б)*

Рис. 5.16

§ 5.5. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденными колебаниями называются колебания, возникающие в системе при участии внешней силы, изменяющейся по периодическому закону.

Предположим, что на материальную точку, кроме квазиупругой силы и силы трения, действует внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

где F_0 — амплитуда, ω — круговая частота колебаний вынуждающей силы. Составим дифференциальное уравнение (второй закон Ньютона):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 = f_0 \cos \omega t, \qquad (5.41)$$

где $f_0 = F_0/m$.

Решение дифференциального уравнения (5.41) является суммой двух слагаемых. Одно из них, соответствующее уравнению затухающих колебаний (5.20), играет роль только при установлении колебаний (см. рис. 5.6). Со временем им можно пренебречь. Другое слагаемое описывает смещение материальной точки в установившихся вынужденных колебаниях:

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_0), \qquad (5.42)$$

где

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (5.43)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \qquad (5.44)$$

Как видно из (5.42), установившееся вынужденное колебание, происходящее под воздействием гармонически изменяющейся вынуждающей силы, тоже является гармоническим. Частота вынужденного колебания равна частоте вынуждающей силы. Вынужденные колебания, график которых представлен на рис. 5.17, сдвинуты по фазе относительно вынуждающей силы.

Амплитуда вынужденного колебания (5.43) прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и имеет сложную зависимость от коэффициента затухания среды и круговых частот собственного и вынужденного колебаний. Если ω_0 и β для системы

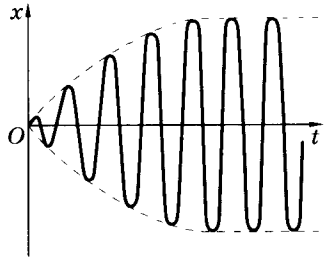


Рис. 5.17

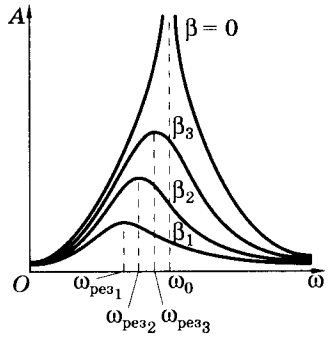


Рис. 5.18

заданы, то амплитуда вынужденных колебаний имеет максимальное значение при некоторой определенной частоте вынуждающей силы, называемой ***резонансной***. Само явление — ***достижение максимальной амплитуды вынужденных колебаний для заданных ω_0 и β*** — называют ***резонансом***.

Резонансную круговую частоту можно найти из условия минимума знаменателя в (5.43):

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (5.45)$$

Подставив (5.45) в (5.43), находим амплитуду при резонансе:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (5.46)$$

Из (5.46) видно, что при отсутствии сопротивления ($\beta = 0$) амплитуда вынужденных колебаний при резонансе неограниченно возрастает. При этом из (5.45) следует, что $\omega_{рез} = \omega_0$, т. е. резонанс в системе без затухания наступает тогда, когда частота вынуждающей силы совпадает с частотой собственных колебаний. Графическая зависимость амплитуды вынужденных колебаний от круговой частоты вынуждающей силы при разных значениях коэффициента затухания показана на рис. 5.18.

Механический резонанс может быть как полезным, так и вредным явлением. Вредное действие резонанса связано главным образом с разрушением, которое он может вызвать. Так, в технике, учитывая разные вибрации, необходимо предусматривать возможное возникновение резонансных условий, в противном случае могут быть разрушения и катастрофы. Тела обычно имеют несколько собственных частот колебаний и соответственно несколько резонансных частот.

Если бы коэффициент затухания внутренних органов человека был невелик, то резонансные явления, возникшие в этих органах под воздействием внешних вибраций или звуковых волн, могли бы привести к трагическим последствиям: разрыву органов, повреждению связок и т. п. Однако такие явления при умеренных внешних воздействиях практически не наблюдаются, так как коэффициент затухания биологических систем достаточно велик. Тем не менее резонансные явления при действии внешних механических колебаний происходят во внутренних органах. В этом, видимо, одна из причин отрицательного воздействия инфразвуковых колебаний и вибраций на организм человека (см. § 6.7 и 6.8).

§ 5.6. Автоколебания

Как было показано в § 5.5, незатухающие колебания могут поддерживаться в системе даже при наличии сил сопротивления, если на систему периодически оказывается внешнее воздействие (вынужденные колебания). Это внешнее воздействие не зависит от самой колеблющейся системы, в то время как амплитуда и частота вынужденных колебаний зависят от этого внешнего воздействия.

Однако существуют и такие колебательные системы, которые *сами регулируют* периодическое восполнение растраченной энергии и поэтому могут колебаться длительное время.

Незатухающие колебания, существующие в какой-либо системе с затуханием при отсутствии переменного внешнего воздействия, называются автоколебаниями, а сами системы — автоколебательными.

Амплитуда и частота автоколебаний зависят от свойств самой автоколебательной системы, в отличие от вынужденных колебаний они не определяются внешними воздействиями.

Во многих случаях автоколебательные системы можно представить тремя основными элементами: 1) собственно колебательная система; 2) источник энергии; 3) регулятор поступления энергии в собственно колебательную систему. Колебательная система каналом обратной связи (рис. 5.19) воздействует на регулятор, информируя регулятор о состоянии этой системы.

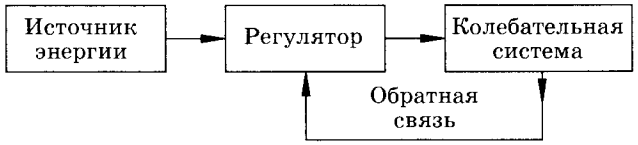


Рис. 5.19

Классическим примером механической автоколебательной системы являются часы, в которых маятник или баланс являются колебательной системой, пружина или поднятая гиря — источником энергии, а анкер — регулятором поступления энергии от источника в колебательную систему.

Многие биологические системы (сердце, легкие и др.) являются автоколебательными. Характерный пример электромагнитной автоколебательной системы — генераторы электромагнитных колебаний (см. гл. 18).

§ 5.7. Уравнение механической волны

Механической волной называют механические возмущения, распространяющиеся в пространстве и несущие энергию.

Различают два основных вида механических волн: ***упругие волны (распространение упругих деформаций)*** и ***волны на поверхности жидкости.***

Упругие волны возникают благодаря связям, существующим между частицами среды: перемещение одной частицы от положения равновесия приводит к перемещению соседних частиц. Этот процесс распространяется в пространстве с конечной скоростью.

Уравнение волны выражает зависимость смещения колеблющейся точки (s), участвующей в волновом процессе, от координаты ее равновесного положения и времени. Для волны, распространяющейся вдоль направления OX, эта зависимость записывается в общем виде:

$$s = f(x, t).$$

Если s и x направлены вдоль одной прямой, то волна ***продольная***, если они взаимно перпендикулярны, то волна ***поперечная***.

Выведем уравнение плоской волны. Пусть волна распространяется вдоль оси OX (рис. 5.20) без затухания так, что амплитуды колебаний всех точек одинаковы и равны A. Зададим колебание точки с координатой $x = 0$ (источник колебаний) уравнением

$$s = A \cos \omega t.$$

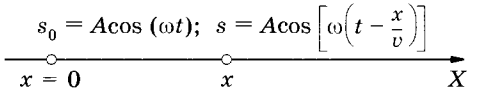


Рис. 5.20

До точки с некоторой произвольной координатой x возмущение от начала координат дойдет через время τ, поэтому колебания этой точки запаздывают:

$$s = A\cos[\omega(t-\tau)]. \qquad (5.47)$$

Так как время и скорость распространения волны связаны зависимостью $\tau = x/v$, то вместо (5.47) получаем

$$s = A\cos[\omega(t - x/v)]. \qquad (5.48)$$

Это и есть ***уравнение плоской волны***, которое позволяет определить смещение любой точки, участвующей в волновом процессе, в любой момент времени. Аргумент при косинусе $\varphi = \omega(t - x/v)$ называют ***фазой*** волны. Множество точек, имеющих одновременно одинаковую фазу, называют ***фронтом волны***. Для рассмотренного случая фронтом волны будет плоскость x = const (плоскость, перпендикулярная оси OX), всем точкам которой соответствует одновременно одинаковая фаза. Отсюда и название — ***плоская*** волна.

Скорость распространения фиксированной фазы колебаний называют ***фазовой***. Предположим, что $\varphi = \omega(t - x/v) = \text{const}$. Продифференцировав это равенство, получим $0 = \omega(dt - dx/v)$, откуда $v = dx/dt$.

Следовательно, **скорость распространения фиксированной фазы колебаний и есть скорость распространения волны.**

Кроме фазовой скорости различают еще ***групповую*** скорость, которую вводят тогда, когда реальная волна не может быть представлена одним гармоническим уравнением (5.48), а является суммой группы синусоидальных волн.

Длиной волны называют расстояние между двумя точками, фазы которых в один и тот же момент времени отличаются на 2π. Она равна расстоянию, пройденному волной за период колебания:

$$\lambda = Tv. \qquad (5.49)$$

Уравнение волны (5.48) — одно из возможных решений общего дифференциального уравнения с частными производными, описывающего процесс распространения возмущения в среде. Такое уравнение называют ***волновым***.

Чтобы иметь представление о волновом уравнении, продифференцируем (5.48) дважды по времени t и дважды по координате x.

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -A\omega\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right],\quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -A\omega_2\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]; \qquad (5.50)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = A\frac{\omega}{v}\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right],\quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{v^2}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]. \qquad (5.51)$$

Сравнивая вторые производные в (5.50) и (5.51), получаем одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \qquad (5.52)$$

Решение уравнений с частными производными выходит за пределы данного курса. Одно из решений (5.48) известно. Однако важно отметить следующее. Если изменение какой-либо физической величины: механической, тепловой, электрической, магнитной и т. д. — отвечает уравнению (5.52), то это означает, что соответствующая физическая величина распространяется в виде волны со скоростью v.

§ 5.8. Поток энергии и интенсивность волны

Волновой процесс связан с распространением энергии. Количественной характеристикой перенесенной энергии является ***поток энергии***.

Поток энергии волн (Ф) характеризуется средней энергией, переносимой волнами в единицу времени через некоторую поверхность. Усреднение должно быть сделано за время, значительно большее периода колебаний.

Единицей потока энергии волн является *ватт* (Вт).

Найдем связь потока энергии волн с энергией колеблющихся точек и скоростью распространения волны.

Выделим объем среды, в которой распространяется волна, в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.21); площадь его основания S, а длина ребра численно равна скорости v и совпадает с направлением распространения волны. В соответствии с этим за 1 с сквозь площадку S пройдет та энергия, которой обладают колеблющиеся частицы в объеме параллелепипеда Sv. Это и есть поток энергии волн:

$$\Phi = \langle w_\rho\rangle Sv, \qquad (5.53)$$

где $\langle w_\rho\rangle$ — ***средняя объемная плотность энергии колебательного движения*** (среднее значение энергии колебательного движения частиц, участвующих в волновом процессе и расположенных в 1 м^3).

Поток энергии волн, отнесенный к площади, ориентированной перпендикулярно направлению распространения волн, называют плотностью потока энергии волн, или интенсивностью волн:

$$I = \Phi/S = \langle w_\rho\rangle v. \qquad (5.54)$$

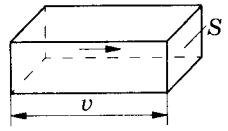


Рис. 5.21

Единицей плотности потока энергии волн является *ватт на квадратный метр* (Вт/м^2).

Энергия, переносимая упругой волной, складывается из потенциальной энергии деформации и кинетической энергии колеблющихся частиц. Приведем без вывода выражение для средней объемной плотности энергии волн:

$$\langle w \rangle_{\rho} = \rho A^2 \omega^2 / 2, \qquad (5.55)$$

где A — амплитуда колебаний точек среды, ρ — плотность.

Подставляя (5.55) в (5.54), имеем

$$I = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} v. \qquad (5.56)$$

Таким образом, **плотность потока энергии упругих волн пропорциональна плотности среды, квадрату амплитуды колебаний частиц, квадрату частоты колебаний и скорости распространения волны.**

§ 5.9. Ударные волны

Один из распространенных примеров механической волны — ***звуковая волна*** (см. гл. 6). В этом случае максимальная скорость колебаний отдельной молекулы воздуха составляет несколько сантиметров в секунду даже для достаточно большой интенсивности, т. е. значительно меньше скорости распространения волны (скорость звука в воздухе около 300 м/с). Это соответствует, как принято говорить, малым возмущениям среды.

Однако при больших возмущениях (взрыв, сверхзвуковое движение тел, мощный электрический разряд и т. п.) скорость колеблющихся частиц среды может уже стать сравнимой со скоростью звука, возникает ударная волна.

При взрыве высоконагретые продукты, обладающие большой плотностью, расширяются и сжимают слои окружающего воздуха. С течением времени объем сжатого воздуха возрастает. Тонкую переходную область, которая отделяет сжатый воздух от невозмущенного, в физике называют ***ударной волной***. Схематично скачок плотности газа при распространении в нем ударной волны показан на рис. 5.22, *а*. Для сравнения на этом же рисунке показано изменение плотности среды при прохождении звуковой волны (рис. 5.22, *б*).

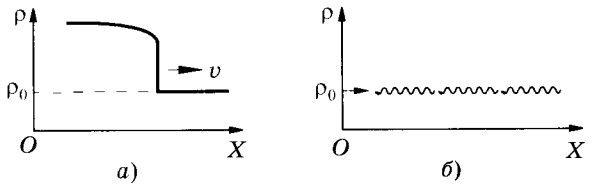


Рис. 5.22

Ударная волна может обладать значительной энергией, так, при ядерном взрыве на образование ударной волны в окружающей среде затрачивается около 50% энергии взрыва. Поэтому ударная волна, достигая биологических и технических объектов, способна причинить смерть, увечья и разрушения.

§ 5.10. Эффект Доплера

Эффектом Доплера называют изменение частоты волн, воспринимаемых наблюдателем (приемником волн), вследствие относительного движения источника волн и наблюдателя.

Представим себе, что наблюдатель приближается со скоростью $v_н$ к неподвижному относительно среды источнику волн. При этом он встречает за один и тот же интервал времени больше волн, чем при отсутствии движения. Это означает, что воспринимаемая частота ν' больше частоты волны, испускаемой источником. Но так как длина волны, частота и скорость распространения волны связаны соотношением $\nu = \frac{v}{\lambda}$, то $\nu' = \frac{v + v_н}{\lambda}$, или с учетом $\lambda = \frac{v}{\nu}$

$$\nu' = \frac{v + v_н}{v} \nu. \qquad (5.57)$$

Другой случай: источник волн *И* движется со скоростью $v_и$ к неподвижному относительно среды наблюдателю (рис. 5.23, *а*). Так как источник движется вслед за испускаемой волной, то длина волны будет меньше, чем при неподвижном источнике. В самом деле, длина волны равна расстоянию между двумя точками с разностью фаз 2π. За время T, равное одному периоду, волна распространится на расстояние λ (рис. 5.23, *б*), источник волн переместится на расстояние $AB = v_и T$. Фазы точек B и C при этом различаются на 2π; следовательно, расстояние между ними равно длине волны λ', образуемой при движении источника излучения. Используя рис. 5.23 и зная, что $\nu = \frac{v}{\lambda}$, выполним некоторые вычисления:

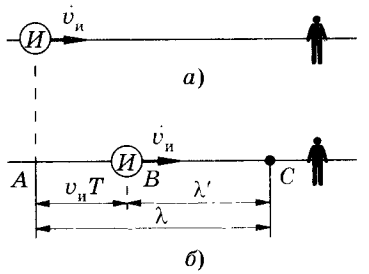


Рис. 5.23

$$\lambda' = \lambda - \frac{v_и}{\nu} = \frac{v}{\nu} - \frac{v_и}{\nu} = \frac{(v - v_и)}{\nu}. \qquad (5.58)$$

В этом случае наблюдатель воспринимает волну, частота колебаний которой

$$\nu'' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_и}\nu. \qquad (5.59)$$

При одновременном движении друг к другу наблюдателя и источника формула для воспринимаемой частоты получается подстановкой в формулу (5.59) ν' [см. (5.57)] вместо ν:

$$\nu''' = \frac{v}{v - v_и}\frac{v + v_н}{v}\nu = \frac{v + v_н}{v - v_и}\nu. \qquad (5.60)$$

Как видно из (5.60), при сближении источника волн и наблюдателя воспринимается частота больше испускаемой. Изменив знаки у $v_н$ и $v_и$ в (5.60), можно получить аналогичную формулу при удалении источника от наблюдателя (приемника). Таким образом, можно записать общую формулу

$$\nu''' = \frac{v \pm v_н}{v \mp v_и}\nu, \qquad (5.61)$$

где «верхние» знаки в формуле относятся к сближению источника и приемника волн, а «нижние» — соответственно к удалению.

Эффект Доплера можно использовать для определения скорости движения тела в среде. Для медицинских применений это имеет особое значение. Рассмотрим подробнее такой случай.

Пусть генератор ультразвука совмещен с приемником в виде некоторой технической системы (рис. 5.24). Техническая система неподвижна относительно среды. В среде со скоростью v_0 движется объект (тело). Генератор излучает ультразвук с частотой $\nu_г$. Движущимся объектом, как наблюдателем, воспринимается частота ν_1, которая может быть найдена по формуле (5.57):

$$\nu_1 = \frac{v + v_0}{v}\nu_г, \qquad (5.62)$$

где v — скорость распространения механической волны (ультразвука).

Ультразвуковая волна с частотой ν_1 отражается движущимся объектом в сторону технической системы. Приемник воспринимает уже другую частоту (эффект Доплера), которую можно выразить, используя формулу (5.59)

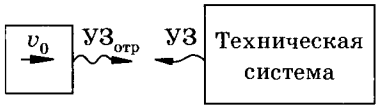


Рис. 5.24

$$\nu_{пр} = \frac{v}{v - v_0}\nu_1, \text{ или с учетом (5.62)}$$

$$\nu_{пр} = \frac{v}{v - v_0}\frac{v + v_0}{v}\nu_г = \frac{v + v_0}{v - v_0}\nu_г. \qquad (5.63)$$

Таким образом, разница частот равна

$$\nu_д = \nu_{пр} - \nu_г = \frac{v + v_0}{v - v_0}\nu_г - \nu_г = \frac{v + v_0 - v + v_0}{v - v_0}\nu_г = \frac{2v_0}{v - v_0}\nu_г \qquad (5.64)$$

и называется ***доплеровским сдвигом частоты.***

В медицинских приложениях скорость ультразвука значительно больше скорости движения объекта ($v \gg v_0$). Для этих случаев из (5.64) имеем

$$\nu_д = \frac{2v_0}{v}\nu_г. \qquad (5.65)$$

Эффект Доплера используется для определения скорости кровотока (см. § 9.5), скорости движения клапанов и стенок сердца (доплеровская эхокардиография) и других органов.

ГЛАВА 6

Акустика

Акустика — область физики, исследующая упругие колебания и волны от самых низких частот до предельно высоких (~10^{13} Гц). Современная акустика охватывает широкий круг вопросов, в ней выделяют ряд разделов: физическая акустика, которая изучает особенности распространения упругих волн в различных средах; физиологическая акустика, изучающая устройство и работу звуковоспринимающих и звукообразующих органов у человека и животных, и др. В узком смысле слова под акустикой понимают учение о звуке, т. е. об упругих колебаниях и волнах в газах, жидкостях и твердых телах, воспринимаемых человеческим ухом (частоты от 16 до 20 000 Гц).

§ 6.1. Природа звука и его физические характеристики

Звуковые колебания и волны — частный случай механических колебаний и волн. Однако в связи с важностью акустических понятий для оценки слуховых ощущений, а также и в связи с медицинскими приложениями, целесообразно некоторые вопросы разобрать специально.

Принято различать следующие звуки: 1) тоны, или музыкальные звуки; 2) шумы; 3) звуковые удары.

Тоном называется звук, являющийся периодическим процессом. Если этот процесс *гармонический*, то тон называется ***простым*** или ***чистым***, а соответствующая плоская звуковая волна описывается уравнением (5.48). Основной физической характеристикой чистого тона является частота. *Ангармоническому*[1] колебанию соответствует ***сложный*** тон. Простой тон издает, например, камертон, сложный тон создается музыкальными инструментами, аппаратом речи (гласные звуки) и т. п.

Сложный тон может быть разложен на простые. Наименьшая частота ν_0 такого разложения соответствует ***основному тону***, остальные гармоники (***обертоны***) имеют частоты, равные $2\nu_0$, $3\nu_0$ и т. д. Набор частот с указанием их относительной интенсивности (или амплитуды A) называется ***акустическим спектром*** (см. § 5.4). Спектр сложного тона линейчатый; на рис. 6.1 показаны акустические спектры одной и той же ноты ($\nu_0 = 100$ Гц), взятой на рояле (*а*) и кларнете (*б*). Таким образом, акустический спектр — важная физическая характеристика сложного тона.

Шумом называют звук, отличающийся сложной неповторяющейся временно́й зависимостью.

К шуму относятся звуки от вибрации машин, аплодисменты, шум пламени горелки, шорох, скрип, согласные звуки речи и т. п.

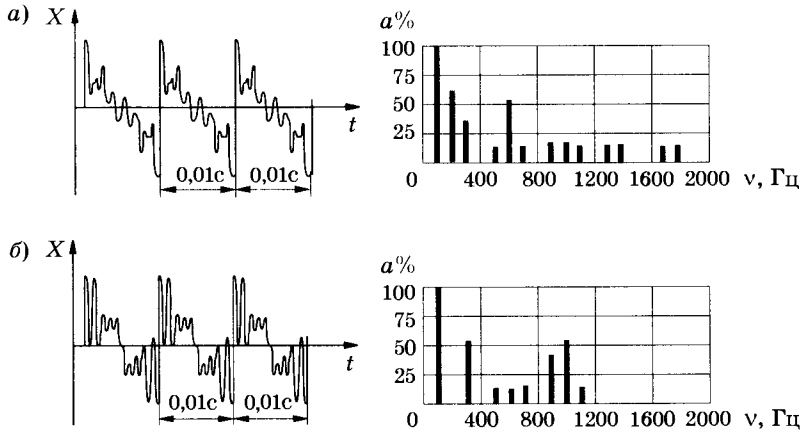


Рис. 6.1

[1] Ангармоническое — негармоническое колебание.

Шум можно рассматривать как сочетание беспорядочно изменяющихся сложных тонов. Если попытаться с некоторой степенью условности разложить шум в спектр, то окажется, что этот спектр будет сплошным, например спектр, полученный от шума горения бунзеновской газовой горелки (рис. 6.2).

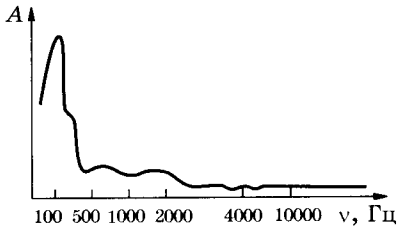


Рис. 6.2

Звуковой удар — это кратковременное звуковое воздействие: *хлопок, взрыв и т. п. Не следует путать звуковой удар с ударной волной* (см. § 5.9).

Энергетической характеристикой звука как механической волны является интенсивность (см. § 5.8).

На практике для оценки звука удобнее использовать не интенсивность, а *звуковое давление*, дополнительно возникающее при прохождении звуковых волн в жидкой или газообразной среде. Для плоской волны интенсивность связана со звуковым давлением p зависимостью

$$I = p^2/(2\rho c)^1,$$

где ρ — плотность среды, c — скорость звука.

Нормальное человеческое ухо воспринимает довольно широкий диапазон интенсивностей звука: так, например, на частоте 1 кГц от $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2 или $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па (порог слышимости) до $I_{max} = 10$ Вт/м^2 или $p_{max} = 60$ Па (порог болевого ощущения). Отношение этих интенсивностей равно 10^{13}, поэтому удобнее использовать логарифмические единицы (см. § 1.1) и логарифмическую шкалу. Шкала уровней интенсивностей звука создается следующим образом: значение I_0 принимают за начальный уровень шкалы, любую другую интенсивность I выражают через десятичный логарифм ее отношения к I_0 (в белах, см. § 1.1):

$$L_Б = \lg (I/I_0), \qquad \textbf{(6.1)}$$

а для звукового давления

$$L_Б = 2\lg (p/p_0).$$

При использовании децибел соответственно имеем

$$L_{дБ} = 10\lg(I/I_0) \text{ и } L_{дБ} = 20\lg(p/p_0). \qquad \textbf{(6.2)}$$

[1] Строго говоря, в этой формуле под p следует понимать амплитуду звукового давления.

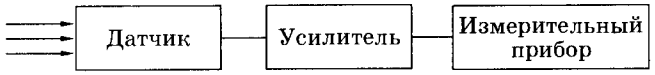


Рис. 6.3

Измерение звукового давления в газах производится измерительным микрофоном, который состоит из датчика, преобразующего акустическую величину в электрический сигнал, электронного усилителя и электрического измерительного прибора (рис. 6.3). Эта схема является частным случаем общей структурной схемы (см. § 17.1).

§ 6.2. Характеристики слухового ощущения. Понятие об аудиометрии

В § 6.1 рассматривались объективные характеристики звука, которые могли быть оценены соответствующими приборами независимо от человека. Однако звук является объектом слуховых ощущений, поэтому оценивается человеком также и субъективно.

Воспринимая тоны, человек различает их по высоте.

Высота тона — субъективная характеристика, обусловленная прежде всего частотой основного тона.

В значительно меньшей степени высота зависит от сложности тона и его интенсивности: звук большей интенсивности воспринимается как звук более низкого тона.

Тембр звука почти исключительно определяется спектральным составом.

На рис. 6.1, *а, б* разные акустические спектры соответствуют разному тембру, хотя основной тон и, следовательно, высота тона одинаковы.

Громкость — еще одна субъективная оценка звука, которая характеризует уровень слухового ощущения.

Несмотря на субъективность, громкость может быть оценена количественно путем сравнения слухового ощущения от двух источников.

В основе создания шкалы уровней громкости лежит важный **психофизический закон Вебера—Фехнера: если раздражение увеличивается в геометрической прогрессии (т. е. в одинаковое число раз), то ощущение этого раздражения возрастает в арифметической прогрессии (т. е. на одинаковую величину).** Применительно к звуку это означает, что если интенсивность звука принимает ряд последовательных значений, например aI_0, a^2I_0, a^3I_0

(a — некоторый коэффициент, $a > 1$) и т. д., то соответствующие им ощущения громкости звука E_0, $2E_0$, $3E_0$ и т. д.

Математически это означает, что громкость звука пропорциональна логарифму интенсивности звука. Если действуют два звуковых раздражения с интенсивностями I и I_0, причем I_0 — порог слышимости, то на основании закона Вебера—Фехнера громкость относительно I_0 связана с интенсивностью следующим образом:

$$E = k\lg(I/I_0), \qquad (6.3)$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от частоты и интенсивности.

Если бы коэффициент k был постоянным, то из (6.1) и (6.3) следовало бы, что логарифмическая шкала интенсивностей звука соответствует шкале громкостей. В этом случае громкость звука, так же как и интенсивность, выражалась бы в белах или децибелах. Однако сильная зависимость k от частоты и интенсивности звука не позволяет измерение громкости свести к простому использованию формулы (6.3).

Условно считают, что на частоте 1 кГц шкалы громкости и интенсивности звука полностью совпадают, т. е. $k = 1$ и $E_Б = \lg(I/I_0)$, или, по аналогии с (6.2),

$$E_ф = 10\lg(I/I_0). \qquad (6.4)$$

Для отличия от шкалы интенсивности звука в шкале громкости децибелы называют ***фонами*** (фон), поэтому введено обозначение $E_ф$.

Громкость на других частотах можно измерить, сравнивая исследуемый звук со звуком частотой 1 кГц. Для этого с помощью ***звукового генератора***[1] создают звук частотой 1 кГц. Изменяют интенсивность звука до тех пор, пока не возникнет слуховое ощущение, аналогичное ощущению громкости исследуемого звука. Интенсивность звука частотой 1 кГц в децибелах, измеренная по прибору, равна громкости этого звука в фонах.

Для того чтобы найти соответствие между громкостью и интенсивностью звука на разных частотах, пользуются кривыми рав-

[1] Звуковым генератором называют электронный прибор, генерирующий электрические колебания с частотами звукового диапазона. Однако сам звуковой генератор не является источником звука. Если же создаваемое им колебание подать на динамик, то возникает звук, тональность которого соответствует частоте генератора. В звуковом генераторе предусмотрена возможность плавного изменения амплитуды и частоты колебаний.

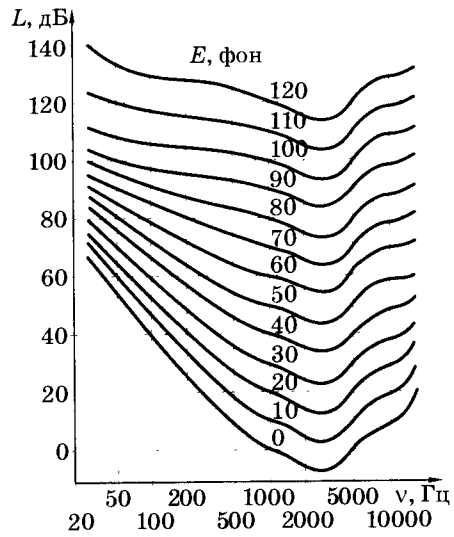


Рис. 6.4

ной громкости (рис. 6.4). Эти кривые построены на основании средних данных, которые были получены у людей с нормальным слухом при измерениях, проводимых по описанному выше методу.

Нижняя кривая соответствует интенсивностям самых слабых слышимых звуков — порогу слышимости: для всех частот $E_ф = 0$, для 1 кГц соответствующая интенсивность звука $I_0 = 10^{-12}$Вт/м^2. Из приведенных кривых видно, что среднее человеческое ухо наиболее чувствительно к частотам 2500—3000 Гц. Каждая промежуточная кривая отвечает одинаковой громкости, но разной интенсивности звука для разных частот. По отдельной кривой равной громкости можно найти интенсивности, которые при определенных частотах вызывают ощущение этой громкости. Используя совокупность кривых равной громкости, можно найти для разных частот громкости, соответствующие определенной интенсивности. Например, пусть интенсивности звука частотой 100 Гц соответствует $L = 60$ дБ. Какова громкость этого звука? На рис. 6.4 находим точку с координатами 100 Гц, 60 дБ. Она лежит на кривой, соответствующей уровню громкости 30 фон, что и является ответом.

Чтобы иметь определенные представления о различных по характеру звуках, приведем их физические характеристики (табл. 13). Метод измерения остроты слуха называют ***аудиометрией.***

Таблица 13

Примерный характер звука	Интенсивность звука, Вт/м^2	Звуковое давление, Па	Уровень интеисивиости звука относительно порога слышимости, дБ (или уровень громкости звука для частоты 1 кГц, фон)
Порог слышимости	10^{-12}	0,00002	0
Сердечные тоны через стетоскоп	10^{-11}	0,000064	10
Шепот	10^{-10}	0,0002	20
	10^{-9}	0,00064	30
Разговор:			
тихий	10^{-8}	0,002	40
нормальный	10^{-7}	0,0064	50
громкий	10^{-6}	0,02	60
Шум на оживленной улице	10^{-5}	0,064	70
Крик	10^{-4}	0,2	80
Шум:			
в поезде метро	10^{-3}	0,64	90
мотоцикла (максимальный)	10^{-2}	2	100
двигателя самолета	10^{-1}	6,4	110
то же, вблизи	10^{0}	20	120
Порог болевого ощущения	10^{1}	64	130

При аудиометрии на специальном приборе (***аудиометре***) определяют порог слухового ощущения на разных частотах; полученная кривая называется ***аудиограммой.*** Сравнение аудиограммы больного человека с нормальной кривой порога слухового ощущения помогает диагностировать заболевание органов слуха.

Для объективного измерения уровня громкости шума используется ***шумомер.*** Структурно он соответствует схеме, изображенной на рис. 6.3. Свойства шумомера приближаются к свойствам человеческого уха (см. кривые равной громкости на рис. 6.4), для этого для разных диапазонов уровней громкости используются корректирующие электрические фильтры.

§ 6.3. Физические основы звуковых методов исследования в клинике

Звук, как и свет, является источником информации, и в этом главное его значение.

Звуки природы, речь окружающих нас людей, шум работающих машин многое сообщают нам. Чтобы представить значение

звука для человека, достаточно временно лишить себя возможности воспринимать звук — закрыть уши.

Естественно, что звук может быть и источником информации о состоянии внутренних органов человека.

Распространенный звуковой метод диагностики заболеваний — ***аускультация*** (выслушивание) — известен еще со II в. до н. э. Для аускультации используют ***стетоскоп*** или ***фонендоскоп***. Фонендоскоп (рис. 6.5) состоит из полой капсулы *1* с передающей звук мембраной *2*, прикладываемой к телу больного, от нее идут резиновые трубки *3* к уху врача. В полой капсуле возникает резонанс столба воздуха, вследствие чего усиливается звучание и улучшается аускультация.

При аускультации легких выслушивают дыхательные шумы, разные хрипы, характерные для заболеваний. По изменению тонов сердца и появлению шумов можно судить о состоянии сердечной деятельности. Используя аускультацию, можно установить наличие перистальтики желудка и кишечника, прослушать сердцебиение плода.

Для одновременного выслушивания больного несколькими исследователями с учебной целью или при консилиуме используют систему, в которую входят микрофон, усилитель и громкоговоритель или несколько телефонов.

Для диагностики состояния сердечной деятельности применяется метод, подобный аускультации и называемый ***фонокардиографией*** (ФКГ). Этот метод заключается в графической регистрации тонов и шумов сердца и их диагностической интерпретации. Запись фонокардиограммы производят с помощью фонокардиографа (рис. 6.6), состоящего из микрофона, усилителя, системы частотных фильтров и регистрирующего устройства. На рис. 6.7 показана нормальная фонокардиограмма.

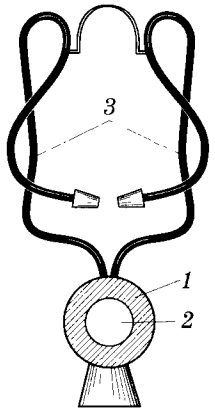


Рис. 6.5

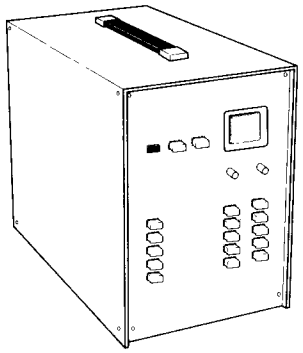

Рис. 6.6


Рис. 6.7

Принципиальные отличия от двух изложенных выше звуковых методов имеет ***перкуссия***. В этом методе выслушивают звучание отдельных частей тела при простукивании их.

Представим замкнутую полость внутри какого-нибудь тела, заполненную воздухом. Если вызвать в этом теле звуковые колебания, то при определенной частоте звука воздух в полости начнет резонировать, выделяя и усиливая тон, соответствующий размеру и положению полости. Схематично тело человека можно представить как совокупность газонаполненных (легкие), жидких (внутренние органы) и твердых (кость) объемов. При ударе по поверхности тела возникают колебания, частоты которых имеют широкий диапазон. Из этого диапазона одни колебания погаснут довольно быстро, другие же, совпадающие с собственными колебаниями пустот, усилятся и вследствие резонанса будут слышимы. Опытный врач по тону перкуторных звуков определяет состояние и топографию внутренних органов.

§ 6.4. Волновое сопротивление. Отражение звуковых волн. Реверберация

Звуковое давление p зависит от скорости v колеблющихся частиц среды. Вычисления показывают, что

$$\frac{p}{\rho} = \rho c \text{ или } p = \rho c v, \qquad \textbf{(6.5)}$$

где ρ — плотность среды, c — скорость звуковой волны в среде. Произведение ρc называют ***удельным акустическим импедансом***, для плоской волны его называют также ***волновым сопротивлением***.

Волновое сопротивление — важнейшая характеристика среды, определяющая условия отражения и преломления волн на ее границе.

Представим себе, что звуковая волна попадает на границу раздела двух сред. Часть волны отражается, а часть — преломляется. Законы отражения и преломления звуковой волны аналогичны законам отражения и преломления света. Преломленная волна может поглотиться во второй среде, а может выйти из нее.

Допустим, что плоская волна падает нормально к границе раздела, интенсивность ее в первой среде I_1, интенсивность преломленной (прошедшей) волны во второй среде I_2. Назовем

$$\beta = I_2/I_1 \qquad (6.6)$$

коэффициентом проникновения звуковой волны.

Рэлей показал, что коэффициент проникновения звука определяется формулой

$$\beta = 4\frac{\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}}{\left(\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}+1\right)^2}. \qquad (6.7)$$

Из (6.6) видно, что наибольшее значение, которое может иметь β, равно 1. Из (6.7) получаем, что $\beta = 1$, если $c_1\rho_1 = c_2\rho_2$. Итак, при равенстве волновых сопротивлений двух сред звуковая волна (при нормальном падении) пройдет границу раздела без отражения.

Если волновое сопротивление второй среды весьма велико по сравнению с волновым сопротивлением первой среды ($c_2\rho_2 \gg c_1\rho_1$), то вместо (6.7) имеем

$$\beta \approx 4\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}, \qquad (6.8)$$

так как $\frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2} \ll 1$. Приведем волновые сопротивления некоторых веществ при 20 °С (табл. 14).

Таблица 14

Материал	ρc, кг · м$^{-2}$ · с$^{-1}$	Материал	ρc, кг · м$^{-2}$ · с$^{-1}$
Железо	40 000 000	Резина	60 000
Бетон	4 800 000	Воздух	430
Вода	1440 000	Масло	1 350 000

Используем (6.8) для вычисления коэффициента проникновения звуковой волны из воздуха в бетон и в воду:

$$\beta = \frac{4 \cdot 430}{4\ 800\ 000}100\% = 0{,}036\%;$$

$$\beta = \frac{4 \cdot 430}{1\ 400\ 000}100\% = 0{,}123\%.$$

Эти данные производят впечатление: оказывается, только очень малая часть энергии звуковой волны проходит из воздуха в бетон и в воду.

Во всяком закрытом помещении отраженный от стен, потолков, мебели звук падает на другие стены, полы и пр., вновь отражается и поглощается и постепенно угасает. Поэтому даже после того, как источник звука прекратит действие, в помещении все еще имеются звуковые волны, которые создают гул. Особенно это заметно в больших просторных залах. Процесс постепенного затухания звука в закрытых помещениях после выключения источника называют ***реверберацией.***

Реверберация, с одной стороны, полезна, так как восприятие звука усиливается за счет энергии отраженной волны, но, с другой стороны, чрезмерно длительная реверберация может существенно ухудшить восприятие речи, музыки, так как каждая новая часть текста перекрывается предыдущими. В связи с этим обычно указывают некоторое оптимальное время реверберации, которое учитывается при постройке аудиторий, театральных и концертных залов и т. п. Например, время реверберации заполненного Колонного зала Дома союзов в Москве равно 1,70 с, заполненного Большого театра — 1,55 с. Для этих помещений (пустых) время реверберации соответственно 4,55 и 2,06 с.

§ 6.5. Физика слуха

Рассмотрим некоторые вопросы физики слуха на примере наружного, среднего и внутреннего уха.

Наружное ухо состоит из ушной раковины *1* и наружного слухового прохода *2* (рис. 6.8).

Ушная раковина у человека не играет существенной роли для слуха. Она способствует определению локализации источника звука при его расположении в передне-заднем направлении. Поясним это. Звук от источника попадает в ушную раковину. В зависимости от положения источника в вертикальной плоскости

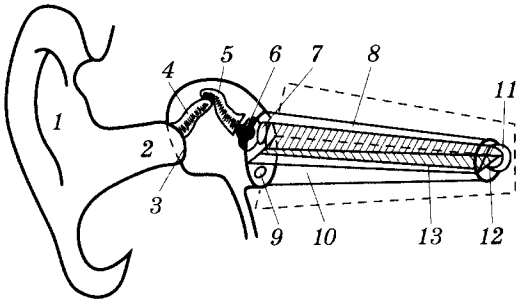


Рис. 6.8

(рис. 6.9) звуковые волны будут по-разному дифрагировать на ушной раковине из-за ее специфической формы. Это приведет и к изменению спектрального состава звуковой волны, попадающей в слуховой проход (более детально вопросы дифракции рассматриваются в гл. 19). Человек в результате опыта научился ассоциировать изменение спектра звуковой волны с направлением на источник звука (направления *А*, *Б* и *В* на рис. 6.9).

Обладая двумя звукоприемниками (ушами), человек и животные способны установить направление на источник звука и в горизонтальной плоскости (бинауральный эффект; рис. 6.10). Это объясняется тем, что звук от источника до разных ушей проходит разное расстояние и возникает разность фаз для волн, попадающих в правую и левую ушные раковины. Связь между разностью этих расстояний (δ) и разностью фаз ($\Delta\varphi$) выведена в § 19.1 при объяснении интерференции света [см. (19.9)]. Если источник звука находится прямо перед лицом человека, то $\delta = 0$ и $\Delta\varphi = 0$, если источник звука расположен сбоку против одной из ушных раковин, то в другую ушную раковину он попадет с запаздыванием. Будем считать приближенно, что в этом случае δ есть расстояние между ушными раковинами. По формуле (19.9) можно рассчитать для $\nu = 1$ кГц и $\delta = 0{,}15$ м разность фаз. Она приблизительно равна 180°.

Различным направлениям на источник звука в горизонтальной плоскости будут соответствовать разности фаз между 0° и 180° (для приведенных выше данных). Считают, что человек с нормальным слухом может фиксировать направления на источник звука с точностью до 3°, этому соответствует разность фаз 6°. Поэтому можно полагать, что человек способен различать изменение разности фаз звуковых волн, попадающих в его уши, с точностью до 6°.

Кроме фазового различия бинауральному эффекту способствует неодинаковость интенсивностей звука у разных ушей, а также и «акустическая тень» от головы для одного уха. На рис. 6.10 схематично показано, что звук от источника попадает в левое ухо в результате дифракции (гл. 19).

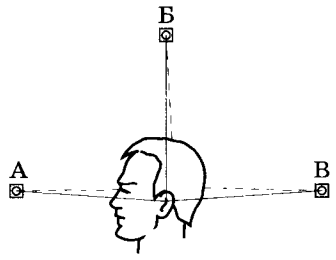


Рис. 6.9

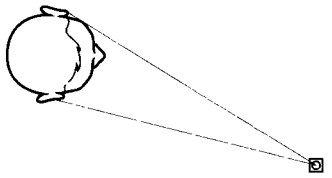


Рис. 6.10

Звуковая волна проходит через слуховой проход и частично отражается от барабанной перепонки *3* (см. рис. 6.8). В результате интерференции падающей и отраженной волн может возникнуть акустический резонанс. В этом случае длина волны в четыре раза больше длины наружного слухового прохода. Длина слухового прохода у человека приблизительно равна 2,3 см; следовательно, акустический резонанс возникает при частоте

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^2}{4 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-2}} \approx 3 \text{ кГц}.$$

Наиболее существенной частью среднего уха являются барабанная перепонка *3* и слуховые косточки: молоточек *4*, наковальня *5* и стремечко *6* с соответствующими мышцами, сухожилиями и связками. Косточки осуществляют передачу механических колебаний от воздушной среды наружного уха к жидкой среде внутреннего. Жидкая среда внутреннего уха имеет волновое сопротивление, приблизительно равное волновому сопротивлению воды. Как было показано (см. § 6.4), при прямом переходе звуковой волны из воздуха в воду передается лишь 0,123% падающей интенсивности. Это слишком мало. Поэтому основное назначение среднего уха — способствовать передаче внутреннему уху большей интенсивности звука. Используя технический язык, можно сказать, что среднее ухо согласует волновые сопротивления воздуха и жидкости внутреннего уха.

Система косточек (см. рис. 6.8) на одном конце молоточком связана с барабанной перепонкой (площадь $S_1 = 64$ мм^2), на другом — стремечком — с овальным окном *7* внутреннего уха (площадь $S_2 = 3$ мм^2).

На барабанную перепонку действует звуковое давление p_1, что обусловливает силу

$$F_1 = p_1 S_1. \qquad \textbf{(6.9)}$$

На овальное окно внутреннего уха при этом действует сила F_2, создающая звуковое давление p_2 в жидкой среде. Связь между ними:

$$F_2 = p_2 S_2. \qquad \textbf{(6.10)}$$

Система косточек работает как рычаг относительно оси O с выигрышем в силе со стороны внутреннего уха в 1,3 раза у человека (схематичное изображение дано на рис. 6.11), поэтому можно записать

$$F_1/F_2 = l_2/l_1. \qquad \textbf{(6.11)}$$

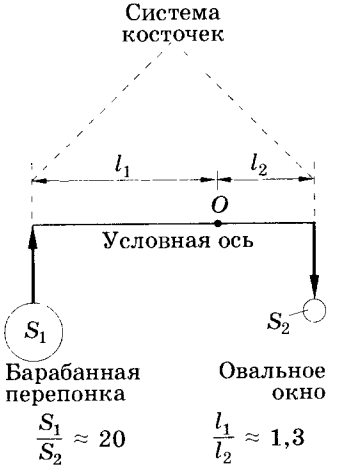


Рис. 6.11

Разделив (6.9) на (6.10) и сопоставляя это соотношение с (6.11), получаем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{p_1 S_1}{p_2 S_2} = \frac{l_2}{l_1},$$

откуда

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} = 20 \cdot 1{,}3 = 26,$$

или в логарифмических единицах (см. § 1.1)

$$L_{\text{дБ}} = 20\lg(p_2/p_1) = 20\lg 26 = 20 \cdot 1{,}415 \approx 28 \text{ дБ}.$$

На таком уровне увеличивает среднее ухо передачу наружного звукового давления внутреннему уху.

Еще одна из функций среднего уха — ослабление передачи колебаний в случае звука большой интенсивности. Это осуществляется рефлекторным расслаблением мышц косточек среднего уха.

Среднее ухо соединяется с атмосферой через слуховую (евстахиеву) трубу.

Наружное и среднее ухо относятся к звукопроводящей системе. Звуковоспринимающей системой является внутреннее ухо.

Главной частью внутреннего уха является улитка, преобразующая механические колебания в электрический сигнал. Кроме улитки к внутреннему уху относится вестибулярный аппарат (см. § 4.3), который к слуховой функции отношения не имеет.

Улитка человека является костным образованием длиной около 35 мм и имеет форму конусообразной спирали с $2^3/_4$ завитков. Диаметр у основания около 9 мм, высота равна приблизительно 5 мм.

На рис. 6.8 улитка (ограничена штриховой линией) показана схематично развернутой для удобства рассмотрения. Вдоль улитки проходят три канала. Один из них, который начинается от овального окна *7*, называется ***вестибулярной лестницей*** *8*. Другой канал идет от круглого окна *9*, он называется ***барабанной лестницей*** *10*. Вестибулярная и барабанная лестницы соединены в области купола улитки посредством маленького отверстия — ***геликотремы*** *11*. Таким образом, оба эти канала в некотором роде представляют единую систему, наполненную перилимфой. Колебания стремечка *6* передаются мембране овального окна *7*, от нее перилимфе и «выпячивают» мембрану круглого окна *9*. Пространство между вестибулярной и барабанной лестницами называется ***улитковым каналом*** *12*, он заполнен эндолимфой. Между улитковым каналом и барабанной лестницей вдоль улитки проходит ***основная (базилярная) мембрана*** *13*. На ней находится кортиев орган, содержащий рецепторные (волосковые) клетки, от улитки идет слуховой нерв (на рис. 6.8 эти подробности не показаны).

Кортиев орган (спиральный орган) и является преобразователем механических колебаний в электрический сигнал.

Длина основной мембраны около 32 мм, она расширяется и утончается в направлении от овального окна к верхушке улитки (от ширины 0,1 до 0,5 мм). Основная мембрана — весьма интересная для физики структура, она обладает частотно-избирательными свойствами. На это обратил внимание еще Гельмгольц, который представлял основную мембрану аналогично ряду настроенных струн пианино. Лауреат Нобелевской премии Бекеши установил ошибочность этой резонаторной теории. В работах Бекеши было показано, что основная мембрана является неоднородной линией передачи механического возбуждения. При воздействии акустическим стимулом по основной мембране распространяется волна. В зависимости от частоты эта волна по-разному затухает. Чем меньше частота, тем дальше от овального окна распространится волна по основной мембране, прежде чем она начнет затухать. Так, например, волна с частотой 300 Гц до начала затухания распространится приблизительно до 25 мм от овального окна, а волна с частотой 100 Гц достигает своего максимума вблизи 30 мм.

На основании этих наблюдений были разработаны теории, согласно которым восприятие высоты тона определяется положением максимума колебания основной мембраны. Таким образом, во внутреннем ухе прослеживается определенная функциональная цепь: колебание мембраны овального окна — колебание перилимфы — сложные колебания основной мембраны — раздражение волосковых клеток (рецепторы кортиева органа) — генерация электрического сигнала.

Некоторые формы глухоты связаны с поражением рецепторного аппарата улитки. В этом случае улитка не генерирует электрические сигналы при воздействии механических колебаний. Можно помочь таким глухим, для этого необходимо имплантировать электроды в улитку и подавать на них электрические сигналы, соответствующие тем, которые возникают при воздействии механического стимула.

Такое протезирование основной функции улитки (кохлеарное протезирование) разрабатывается в ряде стран. В России кохлеарное протезирование разработано и осуществлено в Российском медицинском университете. Кохлеарный протез показан на рис. 6.12, здесь *1* — основной корпус, *2* — заушина с микрофоном, *3* — вилка электрического разъема для подсоединения к имплантируемым электродам.

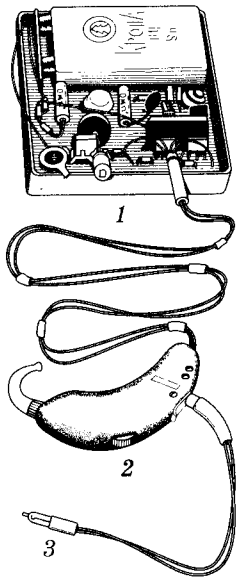


Рис. 6.12

§ 6.6. Ультразвук и его применения в медицине

Ультразвуком (УЗ) называют механические колебания и волны с частотами более 20 кГц.

Верхним пределом ультразвуковых частот условно можно считать 10^9—10^{10} Гц. Этот предел определяется межмолекулярными расстояниями и поэтому зависит от агрегатного состояния вещества, в котором распространяется ультразвуковая волна.

Для генерирования УЗ используются устройства, называемые ***УЗ-излучателями***. Наибольшее распространение получили ***электромеханические излучатели***, основанные на явлении обратного пьезоэлектрического эффекта (см. § 12.7). Обратный пьезоэффект заключается в механической деформации тел под действием электрического поля. Основной частью такого излучателя (рис. 6.13, *а*) является пластина или стержень *1* из вещества с хорошо выраженными пьезоэлектрическими свойствами (кварц, сегнетова соль, керамический материал на основе титаната бария и др.). На поверхность пластины в виде проводящих слоев нанесены электроды *2*. Если к электродам приложить переменное электрическое напряжение от генератора *3*, то пластина благодаря обратному пьезоэффекту начнет вибрировать, излучая механическую волну соответствующей частоты.

Наибольший эффект излучения механической волны возникает при выполнении условия резонанса (см. § 5.5). Так, для пластин толщиной 1 мм резонанс возникает для кварца на частоте 2,87 МГц, сегнетовой соли — 1,5 МГц и титаната бария — 2,75 МГц.

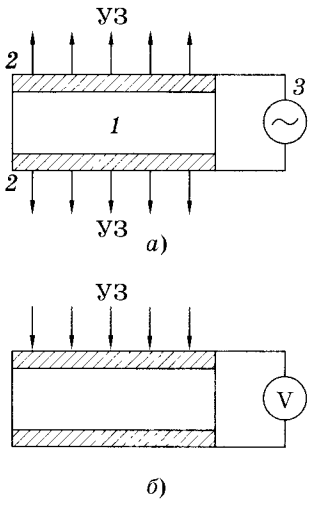


Рис. 6.13

Приемник УЗ можно создать на основе пьезоэлектрического эффекта (прямой пьезоэффект). В этом случае под действием механической волны (УЗ-волны) возникает деформация кристалла (рис. 6.13, *б*), которая приводит при пьезоэффекте к генерации переменного электрического поля; соответствующее электрическое напряжение может быть измерено.

Применение УЗ в медицине связано с особенностями его распространения и характерными свойствами. Рассмотрим этот вопрос.

По физической природе УЗ, как и звук, является механической (упругой) волной. Однако длина волны УЗ существенно меньше длины звуковой волны. Так, например, в воде длины волн равны 1,4 м (1 кГц, звук), 1,4 мм (1 МГц, УЗ) и 1,4 мкм (1 ГГц, УЗ). Дифракция волн (см. § 19.5) существенно зависит от соотношения длины волны и размеров тел, на которых волна дифрагирует. Непрозрачное (для звука) тело размером 1 м не будет препятствием для звуковой волны с длиной 1,4 м, но станет преградой для УЗ-волны с длиной 1,4 мм: возникнет «УЗ-тень». Это позволяет в некоторых случаях не учитывать дифракцию УЗ-волн, рассматривая при преломлении и отражении эти волны как лучи (аналогично преломлению и отражению световых лучей).

Отражение УЗ на границе двух сред зависит от соотношения их волновых сопротивлений (см. § 6.4). Так, УЗ хорошо отражается на границах мышца — надкостница — кость, на поверхности полых органов и т. д. Поэтому можно определить расположение и размер неоднородных включений, полостей, внутренних органов и т. п. (УЗ-локация). При УЗ-локации используют как непрерывное, так и импульсное излучения. В первом случае исследуется стоячая волна, возникающая при интерференции падающей и отраженной волн от границы раздела. Во втором случае наблюдают отраженный импульс и измеряют время распространения ультразвука до исследуемого объекта и обратно. Зная скорость распространения ультразвука, определяют глубину залегания объекта.

Волновое сопротивление биологических сред в 3000 раз больше волнового сопротивления воздуха. Поэтому если УЗ-излучатель приложить к телу человека, то УЗ не проникнет внутрь, а будет отражаться из-за наличия тонкого слоя воздуха между излучателем и биологическим объектом (см. § 6.4). Чтобы исключить воздушный слой, поверхность УЗ-излучателя покрывают слоем масла.

Скорость распространения ультразвуковых волн и их поглощение существенно зависят от состояния среды; на этом основано использование ультразвука для изучения молекулярных свойств вещества. Исследования такого рода являются предметом молекулярной акустики.

Как видно из (5.56), интенсивность волны пропорциональна квадрату круговой частоты, поэтому можно получить УЗ значительной интенсивности даже при сравнительно небольшой амплитуде колебаний. Ускорение частиц, колеблющихся в УЗ-волне, также может быть большим [см. (5.14)], что говорит о наличии существенных сил, действующих на частицы в биологических тканях при облучении УЗ.

Сжатия и разрежения, создаваемые ультразвуком, приводят к образованию разрывов сплошности жидкости — *кавитаций*.

Кавитации существуют недолго и быстро захлопываются, при этом в небольших объемах выделяется значительная энергия, происходит разогревание вещества, а также ионизация и диссоциация молекул.

Физические процессы, обусловленные воздействием УЗ, вызывают в биологических объектах следующие основные эффекты:

— микровибрации на клеточном и субклеточном уровне;

— разрушение биомакромолекул;

— перестройку и повреждение биологических мембран, изменение проницаемости мембран (см. гл. 11);

— тепловое действие;

— разрушение клеток и микроорганизмов.

Медико-биологические приложения ультразвука можно в основном разделить на два направления: *методы диагностики и исследования* и *методы воздействия*.

К первому направлению относятся локационные методы с использованием главным образом импульсного излучения. Это ***эхоэнцефалография*** — определение опухолей и отека головного мозга (на рис. 6.14 показан ***эхоэнцефалограф*** «Эхо-12»); ***ультразвуковая кардиография*** — измерение размеров сердца в динамике; в офтальмологии — ***ультразвуковая локация*** для определения размеров глазных сред. С помощью ультразвукового эффекта Доплера изучают характер движения сердечных клапанов и измеряют скорость кровотока. С диагностической целью по скорости ультразвука находят плотность сросшейся или поврежденной кости.

Ко второму направлению относится ***ультразвуковая физиотерапия***. На рис. 6.15 показан используемый для этих целей аппарат УТП-3М. Воздействие ультразвуком на пациента производят с помощью специальной излучательной головки аппарата.

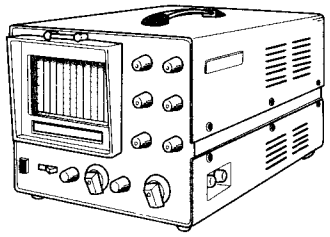


Рис. 6.14

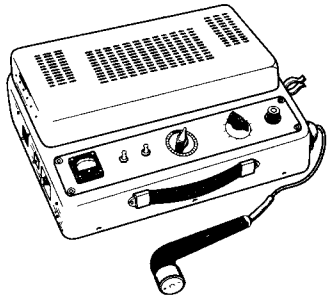


Рис. 6.15

Обычно для терапевтических целей применяют ультразвук частотой 800 кГц, средняя его интенсивность около 1 Вт/см^2 и меньше.

Первичными механизмами ультразвуковой терапии являются механическое и тепловое действия на ткань.

При операциях ультразвук применяют как «ультразвуковой скальпель», способный рассекать и мягкие, и костные ткани.

Способность ультразвука дробить тела, помещенные в жидкость, и создавать эмульсии используется в фармацевтической промышленности при изготовлении лекарств. При лечении таких заболеваний, как туберкулез, бронхиальная астма, катар верхних дыхательных путей, применяют аэрозоли различных лекарственных веществ, полученные с помощью ультразвука.

В настоящее время разработан новый метод «сваривания» поврежденных или трансплантируемых костных тканей с помощью ультразвука (***ультразвуковой остеосинтез***).

Губительное воздействие ультразвука на микроорганизмы используется для стерилизации.

Интересно применение ультразвука для слепых. Благодаря ультразвуковой локации с помощью портативного прибора «Ориентир» можно обнаруживать предметы и определять их характер на расстоянии до 10 м.

Перечисленные примеры не исчерпывают всех медико-биологических применений ультразвука, перспектива расширения этих приложений поистине огромна. Так, можно ожидать, например, появления принципиально новых методов диагностики с внедрением в медицину ультразвуковой голографии (см. § 19.8).

§ 6.7. Инфразвук

Инфразвуком называют механические (упругие) волны с частотами, меньшими тех, которые воспринимает ухо человека (< 20 Гц).

Источниками инфразвука могут быть как естественные объекты (море, землетрясение, грозовые разряды и др.), так и искусственные (взрывы, автомашины, станки и др.).

Инфразвук часто сопровождается слышимым шумом, например в автомашине, поэтому возникают трудности при измерении и исследовании собственно инфразвуковых колебаний.

Для инфразвука характерно слабое поглощение разными средами, поэтому он распространяется на значительное расстояние. Это позволяет по распространению инфразвука в земной коре об-

наруживать взрыв на большом удалении его от источника, по измеренным инфразвуковым волнам прогнозировать цунами и т. д. Так как длина волны инфразвука больше, чем у слышимых звуков, то инфразвуковые волны сильнее дифрагируют и проникают в помещения, обходя преграды.

Инфразвук оказывает неблагоприятное влияние на функциональное состояние ряда систем организма: вызывает усталость, головную боль, сонливость, раздражение и др. Предполагается, что первичный механизм действия инфразвука на организм имеет резонансную природу. Резонанс наступает при близких значениях частоты вынуждающей силы и частоты собственных колебаний (см. § 5.5). Частоты собственных колебаний тела человека в положении лежа (3—4 Гц), стоя (5—12 Гц), частоты собственных колебаний грудной клетки (5—8 Гц), брюшной полости (3—4 Гц) и т. д. соответствуют частоте инфразвуков.

Снижение уровня интенсивности инфразвуков в жилых, производственных и транспортных помещениях — одна из задач гигиены.

§ 6.8. Вибрации

В технике механические колебания различных конструкций и машин получили название ***вибраций***.

Они оказывают воздействие и на человека, который соприкасается с вибрирующими объектами. Это воздействие может быть как вредным и приводящим в определенных условиях к вибрационной болезни, так и полезным, лечебным (вибротерапия и вибромассаж).

Основные физические характеристики вибраций совпадают с характеристиками механических колебаний тел, это:

— частота колебаний или гармонический спектр ангармонического колебания;

— амплитуды смещения, скорости и ускорения;

— энергия и средняя мощность колебаний.

Кроме того, для понимания действия вибраций на биологический объект важно представлять себе распространение и затухание колебаний в теле. При исследовании этого вопроса используют модели, состоящие из инерционных масс, упругих и вязких элементов (см. § 8.3).

Вибрации являются источником слышимых звуков, ультразвуков и инфразвуков.

ГЛАВА 7

Течение и свойства жидкостей

К жидкостям относят вещества, которые по своим свойствам занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами. Жидкие среды составляют наибольшую часть организма, их перемещение обеспечивает обмен веществ и снабжение клеток кислородом, поэтому механические свойства и течение жидкостей представляют особый интерес для медиков и биологов.

Материал, изложенный в главе, имеет отношение к гидродинамике — разделу физики, в котором изучают вопросы движения несжимаемых жидкостей и взаимодействие их при этом с окружающими твердыми телами, и к реологии — учению о деформациях и текучести вещества.

§ 7.1. Вязкость жидкости. Уравнение Ньютона. Ньютоновские и неньютоновские жидкости

При течении реальной жидкости отдельные слои ее воздействуют друг на друга с силами, касательными к слоям. Это явление называют ***внутренним трением*** или ***вязкостью***.

Рассмотрим течение вязкой жидкости между двумя твердыми пластинками (рис. 7.1), из которых нижняя неподвижна, а верхняя движется со скоростью $v_в$. Условно представим жидкость в виде нескольких слоев *1*, *2*, *3* и т. д. Слой, «прилипший» ко дну, неподвижен. По мере удаления от дна (нижняя пластинка) слои жидкости имеют все большие скорости ($v_1 < v_2 < v_3 < \ldots$), максимальная скорость $v_в$ будет у слоя, который «прилип» к верхней пластинке.

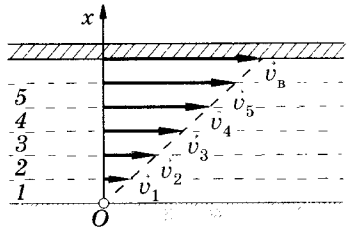


Рис. 7.1

Слои воздействуют друг на друга. Так, например, третий слой стремится ускорить движение второго, но сам испытывает торможение с его

стороны, а ускоряется четвертым слоем и т. д. Сила внутреннего трения пропорциональна площади S взаимодействующих слоев и тем больше, чем больше их относительная скорость. Так как разделение на слои условно, то принято выражать силу в зависимости от изменения скорости на некотором участке в направлении x, перпендикулярном скорости, отнесенного к длине этого участка, т. е. от величины $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}x$ — ***градиента скорости*** (***скорости сдвига***):

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} S. \qquad \textbf{(7.1)}$$

Это ***уравнение Ньютона***. Здесь η — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом внутреннего трения, или ***динамической вязкостью*** (или просто ***вязкостью***). Вязкость зависит от состояния и молекулярных свойств жидкости (или газа).

Единицей вязкости является *паскаль-секунда* (Па · с). В системе СГС вязкость выражают в *пуазах* (П): 1 Па · с = 10 П.

Для многих жидкостей вязкость не зависит от градиента скорости, такие жидкости подчиняются уравнению Ньютона (7.1), и их называют ***ньютоновскими***. Жидкости, не подчиняющиеся уравнению (7.1), относят к ***неньютоновским***. Иногда вязкость ньютоновских жидкостей называют ***нормальной***, а неньютоновских — ***аномальной***.

Жидкости, состоящие из сложных и крупных молекул, например растворы полимеров, и образующие благодаря сцеплению молекул или частиц пространственные структуры, являются неньютоновскими. Их вязкость при прочих равных условиях много больше, чем у простых жидкостей. Увеличение вязкости происходит потому, что при течении этих жидкостей работа внешней силы затрачивается не только на преодоление истинной, ньютоновской, вязкости, но и на разрушение структуры. *Кровь является неньютоновской жидкостью.*

§ 7.2. Течение вязкой жидкости по трубам. Формула Пуазейля

Течение вязкой жидкости по трубам представляет для медицины особый интерес, так как кровеносная система состоит в основном из цилиндрических сосудов разного диаметра.

Вследствие симметрии ясно, что в трубе частицы текущей жидкости, равноудаленные от оси, имеют одинаковую скорость. Наибольшей скоростью обладают частицы, движущиеся вдоль оси трубы; примыкающий к трубе слой жидкости неподвижен.

Примерное распределение скорости слоев υ жидкости в сечении трубы показано на рис. 7.2.

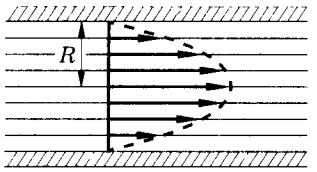


Рис. 7.2

Для определения зависимости скорости слоев от их расстояния r от оси выделим мысленно цилиндрический объем жидкости некоторого радиуса r и длины l (рис. 7.3, *а*). На торцах этого цилиндра поддерживаются давления p_1 и p_2 соответственно, что обусловливает результирующую силу

$$F = p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = (p_1 - p_2)\pi r^2. \qquad \textbf{(7.2)}$$

На боковую поверхность цилиндра со стороны окружающего слоя жидкости действует сила внутреннего трения, равная [см. (7.1)]

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} S = \eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}r} 2\pi r l, \qquad \textbf{(7.3)}$$

где $S = 2\pi r l$ — площадь боковой поверхности цилиндра. Так как жидкость движется равномерно, то силы, действующие на выделенный цилиндр, уравновешены: $F = F_{\text{тр}}$. Подставляя в это равенство (7.2) и (7.3), получаем

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}r} 2\pi r l. \qquad \textbf{(7.4)}$$

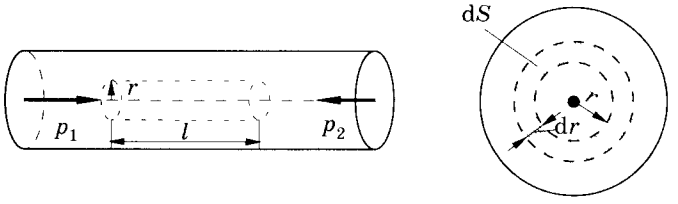
Знак «−» в правой части уравнения обусловлен тем, что $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}r < 0$ (скорость уменьшается с увеличением r). Из (7.4) имеем

$$\mathrm{d}\upsilon = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r \mathrm{d}r.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\int_0^{\upsilon} \mathrm{d}\upsilon = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \int_R^r r \mathrm{d}r, \qquad \textbf{(7.5)}$$

здесь нижние пределы соответствуют слою, «прилипшему» к внутренней поверхности трубы ($\upsilon = 0$ при $r = R$), а верхние пределы —



а) *б*)

Рис. 7.3

переменные. После интегрирования (7.5) получаем параболическую зависимость скорости слоев жидкости от расстояния их до оси трубы (см. огибающую концов векторов скорости на рис. 7.2):

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2). \qquad (7.6)$$

Наибольшую скорость имеет слой, текущий вдоль оси трубы ($r = 0$):

$$v_{max} = (p_1 - p_2)R^2/(4l\eta).$$

Установим, от каких факторов зависит объем Q жидкости, протекающей через горизонтальную трубу за 1 с. Для этого выделим цилиндрический слой радиусом r и толщиной dr. Площадь сечения этого слоя (рис. 7.3, *б*) $dS = 2\pi r dr$. Так как слой тонкий, то можно считать, что он перемещается с одинаковой скоростью v. За 1 с слой переносит объем жидкости

$$dQ = v dS = v \cdot 2\pi r dr. \qquad (7.7)$$

Подставляя (7.6) в (7.7), получаем

$$dQ = \pi\frac{p_1 - p_2}{2l\eta}(R^2 - r^2)r dr,$$

откуда интегрированием по всему сечению находим

$$Q = \pi\frac{p_1 - p_2}{2l\eta}\int_0^R (R^2 - r^2)r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{l}. \qquad (7.8)$$

Зависимость объема жидкости Q, протекающей через горизонтальную трубу радиуса R за 1 с, определяется ***формулой Пуазейля*** (7.8), где η — вязкость жидкости, а $p_1 - p_2$ — разность давлений, поддерживаемая на торцах трубы длиной l.

Как видно из (7.8), при заданных внешних условиях (p_1 и p_2) через трубу протекает тем больший объем жидкости, чем меньше ее вязкость и больше радиус трубы.

Проведем аналогию между формулой Пуазейля (7.8) и законом Ома для участка цепи без источника тока. Разность потенциалов соответствует разности давлений на концах трубы, сила тока — объему жидкости, протекающей через сечение трубы в 1 с, электрическое сопротивление — ***гидравлическому сопротивлению***:

$$X = 8\eta l/(\pi R^4). \qquad (7.9)$$

Гидравлическое сопротивление тем больше, чем больше вязкость η, длина l трубы и меньше площадь поперечного сечения. Аналогия между электрическим и гидравлическим сопротивлениями позволяет в некоторых случаях использовать правило нахождения электрического сопротивления последовательного и параллельного соединений проводников для определения гидравлического сопротивле-

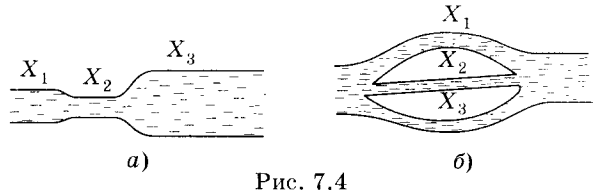


Рис. 7.4

ния системы последовательно или параллельно соединенных труб. Так, например, общее гидравлическое сопротивление трех труб, соединенных последовательно (рис. 7.4, *а*) и параллельно (рис. 7.4, *б*), вычисляется соответственно по формулам:

$$X = X_1 + X_2 + X_3, \qquad (7.10)$$

$$X = \left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3}\right)^{-1}. \qquad (7.11)$$

Чтобы придать уравнению Пуазейля более общее выражение, справедливое и для труб переменного сечения, заменим $(p_1 - p_2)/l$ градиентом давления dp/dl, и тогда

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{dp}{dl}. \qquad (7.12)$$

Установим в разных местах горизонтальной цилиндрической трубы разного сечения, по которой течет вязкая жидкость, манометрические трубки (рис. 7.5, *а*). Они показывают, что статическое давление вдоль трубы переменного сечения убывает пропорционально l: $dp/dl = \text{const}$. Так как величина Q одинакова (несжимаемая жидкость), то [см. (7.12)] градиент давления больше в трубах меньшего радиуса. График зависимости давления от расстояния вдоль труб разного радиуса приближенно показан на рис. 7.5, *б*.

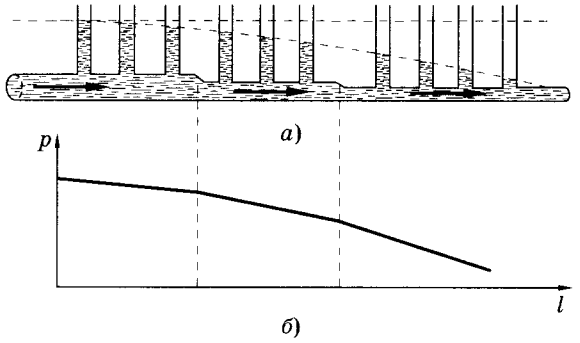


Рис. 7.5

§ 7.3. Движение тел в вязкой жидкости. Закон Стокса

Вязкость проявляется при движении не только жидкости по трубам, но и тел в жидкости. При небольших скоростях сила сопротивления движущемуся телу в соответствии с уравнением Ньютона пропорциональна вязкости жидкости, скорости движения тела и зависит от размеров тела. Так как невозможно указать общую формулу для силы сопротивления, то ограничимся рассмотрением частного случая.

Наиболее простой формой тела является сфера. Для сферического тела (шарика) зависимость силы сопротивления при его движении в сосуде с жидкостью от перечисленных выше факторов выражается ***законом Стокса***:

$$F_{тр} = 6\pi\eta r v, \qquad (7.13)$$

где r — радиус шарика, v — скорость движения. Этот закон получен в предположении, что стенки сосуда не влияют на движение тела.

При падении шарика в вязкой среде (рис. 7.6) на него действуют три силы: а) сила тяжести $mg = {}^4/_3\,\rho\pi r^3 g$; б) выталкивающая (архимедова) сила $F_A = m_ж g = {}^4/_3\,\rho_ж \pi r^3 g$, где $m_ж$ — масса вытесненной шаром жидкости, $\rho_ж$ — ее плотность; в) $F_{тр}$ — сила сопротивления, вычисляемая по формуле (7.13).

При попадании шарика в вязкую жидкость его скорость уменьшается. Так как сила сопротивления прямо пропорциональна скорости, то и она будет уменьшаться до тех пор, пока движение не станет равномерным. В этом случае (рис. 7.6)

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_{тр} = 0$$

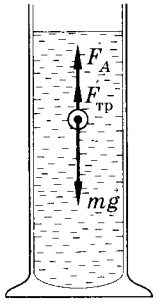


Рис. 7.6

или в скалярной форме при подстановке соответствующих выражений для сил

$${}^4/_3\pi r^3\rho g - {}^4/_3\pi r^3\rho_ж g - 6\pi\eta r v_0 = 0, \qquad (7.14)$$

где v_0 — скорость равномерного движения (падения) шарика. Из (7.14) получаем

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_ж)r^2 g}{9\eta}. \qquad (7.15)$$

Формула (7.15) справедлива для движения шарика не только в жидкости, но и в газе. Она может быть использована, в частности, для вычисления времени выпадения пыли в воздухе. Поясним это следующим примером. Для воздуха — среды, в которой взвешены различные частицы пыли, — вязкость $\eta = 0{,}000175$ П. Около 80% пыли, обнаруженной в легких умерших людей, составляют частицы размером от 5 до 0,2 мкм. Если считать пылинки шарообразными, а плотность пыли равной плотности земли ($\rho = 2{,}5$ г/см^3), то, вычисляя скорость падения этих пылинок по формуле (7.15), найдем, что ее значения находятся в пределах 0,2—0,0003 см/с. Для полного выпадения такой пыли в комнате высотой 3 м потребуется около 12 суток при условии полной неподвижности воздуха и отсутствия броуновского движения.

§ 7.4. Методы определения вязкости жидкости. Клинический метод определения вязкости крови

Совокупность методов измерения вязкости называют ***вискозиметрией***, а приборы, используемые для таких целей, — ***вискозиметрами***. Рассмотрим наиболее распространенные методы вискозиметрии.

Капиллярный метод основан на формуле Пуазейля и заключается в измерении времени протекания через капилляр жидкости известной массы под действием силы тяжести при определенном перепаде давлений. ***Капиллярные вискозиметры*** различной формы показаны на рис. 7.7, *а, б* (*1* — измерительные резервуары, M_1 и M_2 — метки, обозначающие границы этих резервуаров, *2* — капилляры, *3* — приемные сосуды).

Капиллярный вискозиметр применяется для определения вязкости крови.

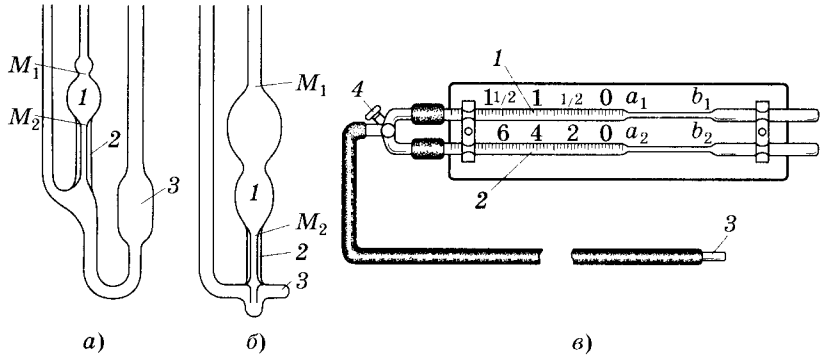


Рис. 7.7

Капиллярными вискозиметрами измеряют вязкость от значений 10^{-5} Па · с, свойственных газам, до значений 10^4 Па · с, характерных для консистентных смазок.

Метод падающего шарика используется в вискозиметрах, основанных на законе Стокса. Из формулы (7.15) находим

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_ж)r^2 g}{9v_0}.$$

Таким образом, зная величины, входящие в правую часть этой формулы, и измеряя скорость равномерного падения шарика, можно найти вязкость данной жидкости.

Предел измерений вискозиметров с движущимся шариком составляет $6 \cdot 10^4 - 250$ Па · с.

Применяются также ***ротационные вискозиметры***, в которых жидкость находится в зазоре между двумя соосными телами, например цилиндрами. Один из цилиндров (ротор) вращается, а другой неподвижен. Вязкость измеряется по угловой скорости ротора, создающего определенный момент силы на неподвижном цилиндре, или по моменту силы, действующему на неподвижный цилиндр, при заданной угловой скорости вращения ротора.

С помощью ротационных вискозиметров определяют вязкость жидкостей в интервале $1—10^5$ Па · с, т. е. смазочных масел, расплавленных силикатов и металлов, высоковязких лаков и клеев, глинистых растворов и т. п.

В ротационных вискозиметрах можно менять градиент скорости, задавая разные угловые скорости вращения ротора. Это позволяет измерять вязкость при разных градиентах и установить зависимость $\eta = f(dv/dx)$, которая характерна для неньютоновских жидкостей.

В настоящее время в клинике для определения вязкости крови используют ***вискозиметр Гесса*** с двумя капиллярами. Схема его устройства дана на рис. 7.7, *в*. Два одинаковых капилляра a_1b_1 и a_2b_2 соединены с двумя трубочками *1* и *2*. Посредством резиновой груши или втягивая воздух ртом через наконечник *3*, поочередно благодаря тройнику с краном *4*, заполняют капилляр a_1b_1 и трубочку *1* до отметки 0 дистиллированной водой, а капилляр a_2b_2 и трубочку *2* до отметки 0 — исследуемой кровью. После этого теми же способами одновременно перемещают обе жидкости до тех пор, пока кровь не достигнет цифры 1, а вода — другой отметки в своей трубке. Так как условия протекания воды и крови одинаковы, то объемы наполнения трубок *1* и *2* будут различными вследствие того, что вязкости этих жидкостей неодинаковы. Хотя кровь и является неньютоновской жидкостью, используем с некоторым приближением формулу Пуазейля (7.8) и запишем очевидную пропорцию:

$$Q_в/Q_к = \eta_к/\eta_в. \qquad \textbf{(7.16)}$$

Учитывая, что общий объем V жидкости при равномерном ее течении связан с Q формулой $V = Qt$, где t — время истечения жидкости, вместо (7.16) получаем

$$V_в : V_к = \eta_к : \eta_в,$$

где $V_к$ — объем крови в трубке *2* от отметки 0 до отметки 1; $V_в$ — объем воды в трубке *1* от отметки 0 до отметки, полученной при измерении; $\eta_к$ и $\eta_в$ — соответственно вязкость крови и воды. Отношение вязкости крови к вязкости воды при той же температуре называют ***относительной вязкостью крови***.

В вискозиметре Гесса объем крови всегда одинаков, а объем воды отсчитывают по делениям на трубке *1*, поэтому непосредственно получают значение относительной вязкости крови. Для удобства отсчета сечения трубок *1* и *2* делают различными так, что, несмотря на разные объемы крови и воды, их уровни в трубках будут примерно одинаковы.

Вязкость крови человека в норме 4—5 мПа · с, при патологии колеблется от 1,7 до 22,9 мПа · с, что сказывается на скорости оседания эритроцитов (СОЭ). Венозная кровь обладает несколько большей вязкостью, чем артериальная. При тяжелой физической работе увеличивается вязкость крови. Некоторые инфекционные заболевания увеличивают вязкость крови, другие же, например брюшной тиф и туберкулез, — уменьшают.

§ 7.5. Турбулентное течение. Число Рейнольдса

Рассмотренное ранее течение жидкости является **слоистым**, или **ламинарным**. Увеличение скорости течения вязкой жидкости вследствие неоднородности давления по поперечному сечению трубы создает завихрения, и движение становится ***вихревым***, или ***турбулентным***. При турбулентном течении скорость частиц в каждом месте непрерывно и хаотически изменяется, движение является нестационарным.

Характер течения жидкости по трубе зависит от свойств жидкости, скорости ее течения, размеров трубы и определяется *числом Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = \rho_ж v D/\eta,$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости, D — диаметр трубы, v — средняя по сечению трубы скорость течения.

Если число Рейнольдса больше некоторого критического ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$), то движение жидкости турбулентное. Например, для гладких цилиндрических труб $\mathrm{Re}_{кр} \approx 2300$.

Так как число Рейнольдса зависит от вязкости и плотности жидкости, то удобно ввести их отношение, называемое ***кинематической вязкостью***:

$$\nu = \eta/\rho_{ж}.$$

Используя это понятие, число Рейнольдса можно выразить в виде

$$\mathrm{Re} = \upsilon D/\nu. \qquad (7.17)$$

Единицей кинематической вязкости является *квадратный метр в секунду* ($м^2/с$), в системе СГС — *стокс* (Ст); соотношение между ними: 1 Ст = 10^{-4} $м^2/с$.

Кинематическая вязкость полнее, чем динамическая, учитывает влияние внутреннего трения на характер течения жидкости или газа. Так, вязкость воды приблизительно в 100 раз больше, чем воздуха (при 0 °С), но кинематическая вязкость воды в 10 раз меньше, чем воздуха, и поэтому вязкость сильнее влияет на характер течения воздуха, чем воды.

Как видно из (7.17), характер течения жидкости или газа существенно зависит от размеров трубы. В широких трубах даже при сравнительно небольших скоростях может возникнуть турбулентное движение. Так, например, в трубке диаметром 2 мм течение воды становится турбулентным при скорости более 127 см/с, а в трубе диаметром 2 см — уже при скорости примерно 12 см/с (температура 16 °С). Течение крови по такой трубе стало бы турбулентным при скорости 50 см/с, но практически в кровеносных сосудах диаметром 2 см турбулентное течение возникает даже при меньшей скорости.

Течение крови в артериях в норме является ламинарным, небольшая турбулентность возникает вблизи клапанов сердца. При патологии, когда вязкость бывает меньше нормы, число Рейнольдса может превышать критическое значение и движение станет турбулентным.

Турбулентное течение связано с дополнительной затратой энергии при движении жидкости, что в случае крови приводит к добавочной работе сердца. Шум, возникающий при турбулентном течении крови, может быть использован для диагностирования заболеваний. Этот шум прослушивают на плечевой артерии при измерении давления крови.

Течение воздуха в носовой полости в норме ламинарное. Однако при воспалении или каких-либо других отклонениях от нормы оно может стать турбулентным, что повлечет дополнительную работу дыхательных мышц.

Число Рейнольдса является критерием подобия. При моделировании гидро- и аэродинамических систем, в частности кровеносной системы, модель должна иметь такое же число Рейнольдса, как и натура, в противном случае не будет соответствия между ними. Это относится также и к моделированию обтекания тел при

движении их в жидкости или газе. Из (7.17) видно, что уменьшение размеров модели по сравнению с натурой должно быть скомпенсировано увеличением скорости течения или уменьшением кинематической вязкости модельной жидкости или газа.

§ 7.6. Особенности молекулярного строения жидкостей

Обычные жидкости изотропны, структурно они являются аморфными телами. Для внутреннего строения жидкостей характерен ближний порядок в расположении молекул (упорядоченное расположение ближайших частиц). Расстояния между молекулами невелики, силы взаимодействия значительны, что приводит к малой сжимаемости жидкостей: небольшое уменьшение расстояния между молекулами вызывает появление больших сил межмолекулярного отталкивания.

Подобно твердым телам, жидкости мало сжимаемы и обладают большой плотностью, подобно газам, принимают форму сосуда, в котором находятся. Такой характер свойств жидкостей связан с особенностями теплового движения их молекул. В газах молекулы движутся беспорядочно, на малых отрезках пути — поступательно, в расположении частиц отсутствует какой-либо порядок. В кристаллических телах частицы колеблются около определенных положений равновесия — узлов кристаллической решетки. По теории Я. И. Френкеля молекулы жидкости, подобно частицам твердого тела, колеблются около положений равновесия, однако эти положения равновесия не являются постоянными. По истечении некоторого времени, называемого временем «оседлой жизни», молекула скачком переходит в новое положение равновесия на расстояние, равное среднему расстоянию между соседними молекулами.

Вычислим среднее расстояние между молекулами жидкости. Можно мысленно представить весь объем жидкости разделенным на небольшие одинаковые кубики с ребром δ. Пусть в среднем в каждом кубике находится одна молекула. В этом случае δ можно рассматривать как среднее расстояние между молекулами жидкости. Объем жидкости равен $V = \delta^3 N$, где N — общее количество молекул жидкости. Если n — концентрация молекул (количество молекул в 1 $м^3$), то $N = nV$. Из этих уравнений получаем

$$\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \qquad (7.18)$$

Порядок величины δ составляет 10^{-10} м, например, для воды $\delta \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Среднее время «оседлой жизни» молекулы называют временем релаксации τ. С повышением температуры и понижением давления время релаксации сильно уменьшается, что обусловливает бóльшую подвижность молекул жидкости и меньшую ее вязкость.

Для того чтобы молекула жидкости перескочила из одного положения равновесия в другое, должны нарушиться связи с окружавшими ее молекулами и образоваться связи с новыми соседями. Процесс разрыва связей требует затраты энергии E_a (***энергии активации***), выделяемой при образовании новых связей. Такой переход молекулы из одного положения равновесия в другое является ***переходом через потенциальный барьер*** высотой E_a. Энергию для преодоления потенциального барьера молекула получает за счет энергии теплового движения соседних молекул. Зависимость времени релаксации от температуры жидкости и энергии активации выражается формулой, вытекающей из распределения Больцмана (см. § 2.4).

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{E_a}{kT}}, \qquad (7.19)$$

где τ_0 — средний период колебаний молекулы около положения равновесия.

Зная среднее перемещение молекулы, равное расстоянию между молекулами δ, и среднее время τ, можно определить среднюю скорость движения молекул в жидкости:

$$\langle v \rangle = \frac{\delta}{\tau_0} e^{-\frac{E_a}{kT}}. \qquad (7.20)$$

Эта скорость мала по сравнению со средней скоростью движения молекул в газе. Так, например, для молекул воды она в 20 раз меньше, чем для молекул пара при той же температуре.

§ 7.7. Поверхностное натяжение

На поверхностях раздела жидкости и ее насыщенного пара, двух несмешиваемых жидкостей, жидкости и твердого тела возникают силы, обусловленные различным межмолекулярным взаимодействием граничащих сред.

Каждая молекула, расположенная внутри объема жидкости, равномерно окружена соседними молекулами и взаимодействует с ними, но равнодействующая этих сил равна нулю. На молекулу, находящуюся вблизи границы двух сред, вследствие неоднородности окружения действует сила, не скомпенсированная другими

молекулами жидкости. Поэтому для перемещения молекул из объема в поверхностный слой необходимо совершить работу.

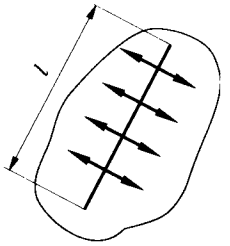


Рис. 7.8

Поверхностное натяжение (коэффициент поверхностного натяжения) определяется отношением работы, затраченной на создание некоторой поверхности жидкости при постоянной температуре, к площади этой поверхности:

$$\sigma = A/S. \qquad (7.21)$$

Условием устойчивого равновесия жидкостей является минимум энергии поверхностного слоя, поэтому при отсутствии внешних сил или в состоянии невесомости жидкость стремится иметь минимальную площадь поверхности при данном объеме и принимает форму шара.

Поверхностное натяжение может быть определено не только энергетически. Стремление поверхностного слоя жидкости сократиться означает наличие в этом слое касательных сил — ***сил поверхностного натяжения***. Если выбрать на поверхности жидкости некоторый отрезок длиной l (рис. 7.8), то можно условно изобразить эти силы стрелками, перпендикулярными отрезку.

Поверхностное натяжение равно отношению силы поверхностного натяжения к длине отрезка, на котором действует эта сила:

$$\sigma = F/l. \qquad (7.22)$$

Из школьного курса физики известно, что оба определения, (7.21) и (7.22), тождественны. Приведем значения поверхностного натяжения для некоторых жидкостей при температуре 20 °С (табл. 15).

Таблица 15

Жидкость	σ, Н/м	Жидкость	σ, Н/м
Вода	0,0725	Ртуть	0,47
Желчь	0,048	Спирт	0,022
Молоко	0,05	Сыворотка крови	0,06
Моча	0,066	Эфир	0,017

Поверхностное натяжение зависит от температуры. Вдали от критической температуры значение его убывает линейно при увеличении температуры. Снижения поверхностного натяжения можно достигнуть введением в жидкость поверхностно-активных веществ, уменьшающих энергию поверхностного слоя.

§ 7.8. Смачивание и несмачивание. Капиллярные явления

На границе соприкосновения различных сред может наблюдаться ***смачивание*** или ***несмачивание***.

На рисунках показана капля жидкости на поверхности другой, не смешивающейся с ней жидкости (рис. 7.9) и на поверхности твердого тела (рис. 7.10 и 7.11). На поверхностях раздела каждых двух сред (*1* и *3*, *2* и *1*, *3* и *2*) действуют силы поверхностного натяжения (показаны стрелками). Если эти силы разделить на длину окружности капли (границы трех сред), то получим соответственно σ_{13}, σ_{21}, σ_{32}.

Угол θ между смачиваемой поверхностью и касательной к поверхности жидкости, отсчитываемый через нее, называют ***краевым***.

За меру смачивания принимают величину

$$\cos\theta = (\sigma_{13} - \sigma_{32})/\sigma_{21}. \qquad \textbf{(7.23)}$$

Если $\sigma_{32} < \sigma_{13}$ (см. рис. 7.10), то $\theta < \pi/2$, и жидкость смачивает твердое тело, поверхность которого в этом случае называется ***гидрофильной***. В случае $\sigma_{32} < \sigma_{13}$ (см. рис. 7.11) $\theta > \pi/2$, жидкость не смачивает тело, поверхность его в этом случае называют ***гидрофобной***. Несмачивающая жидкость не протекает через малые отверстия в твердом теле. При $|\sigma_{32} - \sigma_{13}| > \sigma_{21}$ краевой угол определить нельзя, так как $\cos\theta$ не может быть больше единицы. В этом случае капля растекается по поверхности твердого тела до тех пор, пока не покроет всей его поверхности или пока не образуется мономолекулярный слой. Такой случай является ***идеальным смачиванием***. К нему с некоторым приближением можно отнести растекание спирта или воды по чистой поверхности стекла, нефти по воде и пр.

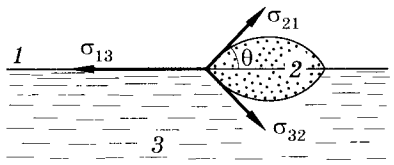


Рис. 7.9

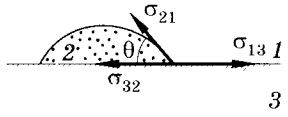


Рис. 7.10

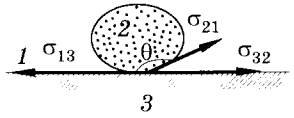


Рис. 7.11

Под действием сил поверхностного натяжения поверхностный слой жидкости искривлен и оказывает дополнительное по отношению к внешнему давление Δp. Поверхностный слой подобен упругой оболочке, например резиновой пленке. Результирующая сил поверхностного натяжения искривленной поверхности направлена в сторону вогнутости (к центру кривизны). В случае сферической поверхности, радиус кривизны которой r, дополнительное давление

$$\Delta p = 2\sigma/r. \qquad \textbf{(7.24)}$$

Искривление поверхности (мениск), в частности, возникает в узких (капиллярных) трубках в результате смачивания или несмачивания жидкостью их поверхности. При смачивании образуется вогнутый мениск (рис. 7.12). Силы давления направлены от жидкости наружу, т. е. вверх, и обусловливают подъем жидкости в капилляре. Это равновесное состояние, показанное на рисунке, наступает тогда, когда давление $\rho g h$ уравновесит Δp.

Из рис. 7.12 видно, что $r = \dfrac{R}{\cos\theta}$, где R — радиус капилляра. Поэтому [(см. (7.24)] получаем

$$\Delta p = \frac{2\sigma\cos\theta}{R}. \qquad \textbf{(7.25)}$$

Тогда

$$\rho g h = \frac{2\sigma\cos\theta}{R},$$

откуда высота поднятия жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{R\rho g}, \qquad \textbf{(7.26)}$$

т. е. зависит от свойств жидкости и материала капилляра, а также от его радиуса.

В случае несмачивания $\cos\theta < 0$ и формула (7.26) покажет высоту опускания жидкости в капилляре.

Капиллярные явления определяют условия конденсации паров, кипения жидкостей, кристаллизации и т. п. Так, например, на молекулу

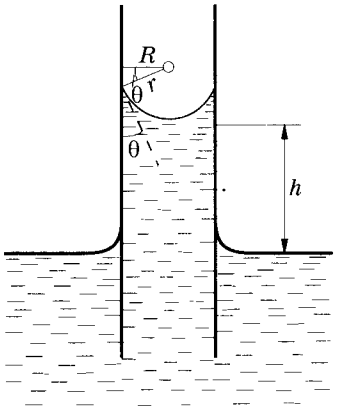
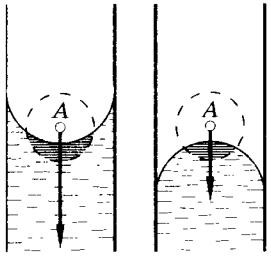


Рис. 7.12



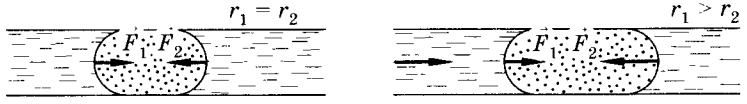
а) *б*)

Рис. 7.13

пара (рис. 7.13; точка A) над вогнутым мениском жидкости действует больше молекул жидкости и, следовательно, большая сила, чем при выпуклом мениске (показаны стрелками). Это видно из рис. 7.13, на котором штриховыми линиями условно показаны сферы молекулярного действия, а заштрихованные участки — объемы жидкости, молекулы которых притягивают выделенную молекулу пара. В результате этого возникает капиллярная конденсация в смачиваемых тонких трубках даже при сравнительно малой влажности воздуха. Благодаря этому пористые вещества могут задерживать значительное количество жидкости из паров, что приводит к увлажнению белья, ваты в сырых помещениях, затрудняет сушку гигроскопических тел, способствует удержанию влаги в почве и т. п. Наоборот, несмачивающие жидкости не проникают в пористые тела. С этим связана, например, непроницаемость для воды перьев птиц, смазанных жиром.

Рассмотрим поведение пузырька воздуха, находящегося в капилляре с жидкостью. Если давление жидкости на пузырек с разных сторон одинаково, то оба мениска пузырька будут иметь одинаковый радиус кривизны, и силы дополнительного давления будут уравновешивать друг друга $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (рис. 7.14, *а*). При избыточном давлении с одной из сторон, например при движении жидкости, мениски деформируются, изменятся их радиусы кривизны (рис. 7.14, *б*), дополнительное давление Δp с разных сторон станет неодинаковым. Это приведет к такому воздействию на жидкость со стороны пузырька воздуха (газа), которое затруднит или прекратит движение жидкости. **Такие явления могут происходить в кровеносной системе человека.**

Попавшие в кровь пузырьки воздуха могут закупорить мелкий сосуд и лишить кровоснабжения какой-либо орган. Это явление, называемое ***эмболией***, может привести к серьезному функциональному расстройству или даже летальному исходу. Так, воздушная эмболия может возникнуть при ранении крупных вен: проникший в ток крови воздух образует воздушный пузырь, пре-



а) *б*)

Рис. 7.14

пятствующий прохождению крови. Пузырьки воздуха не должны попадать в вены при внутривенных вливаниях.

Газовые пузырьки в крови могут появиться у водолазов при быстром подъеме с большой глубины на поверхность, у летчиков и космонавтов при разгерметизировании кабины или скафандра на большой высоте (газовая эмболия). Это обусловлено переходом газов крови из растворенного состояния в свободное — газообразное — в результате понижения окружающего атмосферного давления. Ведущая роль в образовании газовых пузырьков при уменьшении давления принадлежит азоту, так как он обусловливает основную часть общего давления газов в крови и не участвует в газообмене организма и окружающего воздуха.

ГЛАВА 8

Механические свойства твердых тел и биологических тканей

Характерным признаком твердого тела является способность сохранять форму. Твердые тела можно разделить на кристаллические и аморфные.

Так же как и в гл. 7, рассматриваемый материал имеет отношение к реологии и биореологии.

§ 8.1. Кристаллические и аморфные тела. Полимеры и биополимеры

Отличительным признаком кристаллического состояния служит ***анизотропия*** — зависимость физических свойств (механических, тепловых, электрических, оптических) от направления.

Причина анизотропии кристаллов заключается в упорядоченном расположении атомов или молекул, из которых они построены, проявляющемся в правильной внешней огранке отдельных монокристаллов. Однако, как правило, кристаллические тела встречаются в виде поликристаллов — совокупности множеств сросшихся между собой, беспорядочно ориентированных отдель-

ных маленьких кристалликов (кристаллиты). В этом случае анизотропия наблюдается в пределах кристаллитов.

Упорядоченность в расположении атомов или молекул кристалла обусловлена тем, что они размещаются в узлах геометрически правильных структур, образуя пространственную ***кристаллическую решетку***. В зависимости от природы частиц, находящихся в узлах, и характера сил взаимодействия различают четыре типа кристаллических решеток: ***ионные***, ***атомные***, ***металлические*** и ***молекулярные***.

В узлах кристаллической решетки *ионного кристалла* находятся ионы разных знаков. Силы взаимодействия между ними в основном кулоновские. Такой кристалл в целом рассматривается как одна молекула. Узлы решетки *атомного кристалла* заняты нейтральными атомами, между которыми действуют ковалентные связи. Во всех узлах *металлической решетки* расположены положительные ионы металлов. Между ними хаотически движутся электроны. Система ионов и электронов создает металлическую связь. В узлах кристаллической решетки *молекулярного кристалла* находятся ориентированные определенным образом молекулы, удерживаемые на своих местах силами межмолекулярного взаимодействия.

С энергетической точки зрения идеальный кристалл противоположен идеальному газу. В идеальном газе абсолютное значение энергии взаимодействия между атомами много меньше kT — средней энергии хаотического теплового движения. Наоборот, в кристалле вследствие больших сил взаимодействия абсолютное значение энергии взаимодействия много больше kT. Поэтому тепловое движение в кристаллах не может разрушить связь между частицами, вследствие чего они совершают малые колебания около положений равновесия.

Взаимодействие между частицами любого вида в кристалле выражается зависимостью потенциальной энергии $E_п$ от расстояния r между ними (рис. 8.1). Кривая не симметрична относительно минимума. Расстояние r_0 между взаимодействующими частицами соответствует минимуму потенциальной энергии при $T = 0$ K. Пусть при температуре T_1 суммарная (кинетическая и потенциальная) энергия равна E_1. Это означает, что частица колеблется между точками A_1 и B_1. Среднее расстояние между двумя частицами $r_1 = (OA_1 + OB_1)/2$.

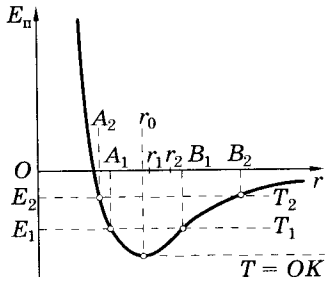


Рис. 8.1

При $T_2 > T_1$ энергия частицы равна $E_2 > E_1$ и она колеблется между точками A_2 и B_2. Среднее расстояние между частицами равно $r_2 = (OA_2 + OB_2)/2$. Ввиду того что потенциальная кривая асимметрична, средние расстояния между частицами по мере нагревания увеличиваются: $r_0 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ при $0\ K < T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$, что и обусловливает тепловое расширение тел.

Основная макроскопическая особенность аморфных тел заключается в естественной изотропии их свойств и отсутствии определенной точки плавления, что обусловлено внутренним строением тел.

Главной особенностью внутреннего строения тел, находящихся в аморфном состоянии, является отсутствие дальнего порядка, характерного для кристаллического состояния, т. е. строгой повторяемости в расположении атомов или групп атомов во всех направлениях вдоль всего тела.

Вместе с тем у вещества в аморфном состоянии (как и в жидком) существует ближний порядок, т. е. некоторый порядок в расположении смежных частиц. С расстоянием этот порядок уменьшается.

Обладая меньшей упорядоченностью внутреннего строения, аморфные тела в одинаковых условиях имеют большие, чем кристаллы, удельный объем, энтропию и внутреннюю энергию.

Достаточно равновесное состояние эти тела образуют только при высокой температуре и малом давлении, что связано с установлением определенного расположения частиц и расстояний между ними. В соответствии с этим аморфные тела в зависимости от скорости внешнего воздействия могут оказаться упругими или текучими. Так, например, если кусок вара положить в сосуд, то по истечении большого промежутка времени он примет форму сосуда, т. е. проявит свойства текучести. Если же этот кусок ударить молотком, то он расколется как хрупкое тело.

Аморфное состояние свойственно веществам самой различной химической природы. При малом давлении и высокой температуре вещества в этом состоянии весьма подвижны: низкомолекулярные являются жидкостями, высокомолекулярные оказываются в высокоэластическом состоянии. С понижением температуры и ростом давления подвижность аморфных веществ уменьшается и все они становятся твердыми телами. Твердое аморфное состояние иначе называют ***стеклообразным***.

Полимерами называют вещества, молекулы которых представляют собой длинные цепи, составленные из большого числа атомов или атомных группировок, соединенных химическими связями. Особенность химического строения полимеров обусловливает и их особые физические свойства.

Наиболее резко отличаются полимеры от низкомолекулярных веществ в механических свойствах. Известно, что для твердых тел характерны большие прочности при малых обратимых деформациях. Жидкости обладают способностью к неограниченной деформации при весьма малой прочности. Полимеры — это материалы, механические свойства которых являются сочетанием свойств твердых тел и жидкостей; они достаточно прочны и вместе с тем способны к достаточно большим обратимым деформациям.

К полимерным материалам относят почти все живые и растительные материалы, такие, как шерсть, кожа, рог, волос, шелк, хлопок, натуральный каучук и т. п., а также всякого рода синтетические материалы — синтетический каучук, пластмассы, волокна и др.

Большинство природных полимерных материалов представляет собой белковые вещества; простые белки — альбумин, глобулин; сложные — казеин, кератины и коллаген. В агар-агаре содержится до 85% углеводов, главным образом полисахаридов, которые также являются полимерами.

Кроме механических, полимеры обладают и другими особыми свойствами. Так, например, их растворы имеют повышенную вязкость; упругость пара растворителя над раствором меньше, а осмотическое давление больше, чем должно быть для идеальных растворов. Полимеры способны сильно набухать в жидкостях.

Длинноцепочечное строение молекул полимеров способствует образованию пленок и волокон.

В настоящее время полимеры все шире используются в качестве диэлектриков.

Простейшим органическим полимером является полиэтилен, полимерная цепь или макромолекула которого составлена из многократно повторяющихся мономерных звеньев, образующихся при соединении молекул этилена:

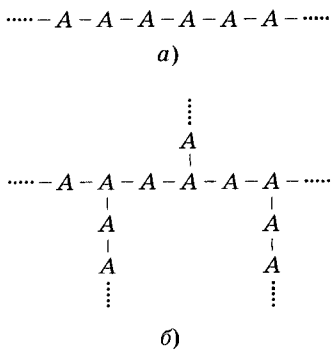


Рис. 8.2

$$n \cdot CH_2 = CH_2 \rightarrow [—CH_2—CH_2—]n.$$

Полиэтилен — представитель линейных полимеров. ***Линейными*** называют полимеры, макромолекулы которых состоят из длинных одномерных цепей (рис. 8.2, *а*; *A* — мономерное звено). ***Разветвленный*** полимер, кроме основной цепи, имеет боковые ответвления — боковые цепи (рис. 8.2, *б*).

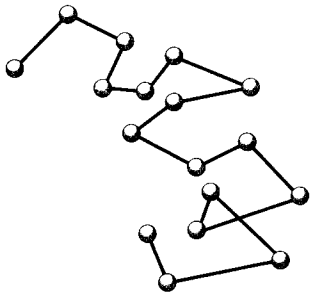
Полимеры, построенные из длинных цепей, соединенных друг с другом в пространственную сетку, являются сетчатыми, или ***пространственными***, а построенные из одинаковых полимеров — ***гомополимерами***. Полимерные соединения, цепи которых состоят из различных мономерных звеньев, относят к ***гетерополимерам***.

Макромолекула полимера не является жесткой. Вследствие теплового движения или под действием внешнего поля ее пространственная форма может изменяться. Эти изменения называют ***конформационными превращениями***.

Предельно гибкой является свободносочлененная цепь (рис. 8.3). В такой цепи углы между валентными связями не фиксированы и вращение вокруг них свободное. В реальных полимерных цепях валентные углы α имеют определенное значение (рис. 8.4). Это приводит к зависимости положения одного звена цепи от положения предыдущего. Такая цепь принимает меньшее число конформаций, чем свободносочлененная, но и она способна сильно изгибаться.

Макромолекулы в результате теплового движения звеньев принимают разнообразные конформации, из них крайними являются, с одной стороны, жесткая прямая палочка, с другой стороны, предельно гибкая цепь, свернувшаяся в клубок (глобула).

Макромолекулы могут достигать огромных размеров, обладая относительной молярной массой от нескольких тысяч до сотен миллионов и даже миллиарда. Из-за большого размера молекул полимера температура кипения его чрезвычайно высока (необходима очень большая энергия для испарения огромных молекул). Отсюда у всех полимеров температура разложения ниже температуры кипения и газовое состояние у них не реализуется.


Рис. 8.3

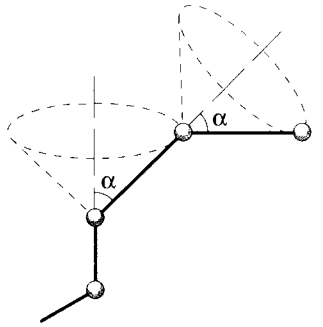


Рис. 8.4

Следовательно, полимеры находятся в конденсированном состоянии: жидком или твердом. Среди твердых полимеров следует различать ***аморфные*** и ***кристаллические.***

Аморфный полимер в высокоэластическом состоянии (см. § 8.3) может сильно деформироваться (до 1000%), его деформация обратима, необратимое течение отсутствует. В этом смысле высокоэластическое состояние — промежуточное между жидким и твердым. Высокоэластическое состояние полимера возникает вследствие гибкости его макромолекул.

Макромолекулы во всех состояниях полимеров всегда более или менее упорядочены, что приводит к ***надмолекулярным структурам.*** Известно, что полимеры характеризуются большим многообразием надмолекулярных структур не только в кристаллическом, но и в аморфном состоянии. Первичными элементами этих структур являются полимерные молекулы, либо свернутые в глобулы, либо развернутые в линейную макромолекулу. При контакте глобул могут образоваться глобулярные структуры, содержащие большое число молекул, иногда до 1000. При контакте развернутых макромолекул возникают продолговатые пачки (рис. 8.5), которые имеют флуктуационную природу — в одних местах исчезают, в других — появляются, но вместе с тем существуют довольно длительно.

Простейшие первичные надмолекулярные структуры — пачки полимерных цепей — наблюдают как в некристаллических, так и в кристаллических полимерах. При кристаллизации пачки складываются в «ленты». На рис. 8.6 изображены выпрямленная (*а*) и сложенная в ленту (*б*) пачки. Стремление к уменьшению поверхностного натяжения приводит к складыванию лент в пластины (рис. 8.7) и образованию сферолитов (рис. 8.8) или единичных кристаллов (рис. 8.9, единичный кристалл вируса некроза табака).

Многочисленные надмолекулярные структуры разделены академиком В. А. Каргиным на четыре основных типа: ***глобулярный*** (свернуты одиночные молекулы или группы молекул), ***полосатый*** (структуры всех полимеров в высокоэластическом состоянии), ***фибриллярный*** (линейные пачки или их совокупности, сохраняющие продолговатую форму), ***крупноструктурный*** (сферолиты, единичные кристаллы и т. п.).



Рис. 8.5

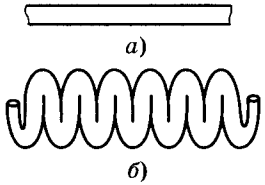


Рис. 8.6

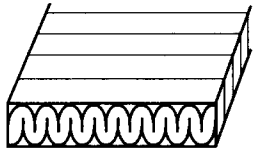


Рис. 8.7

Формы и размеры надмолекулярных структур оказывают большое влияние на прочность полимеров. Так, например, образец с малыми сферолитами обладает высокой прочностью и хорошими эластическими свойствами, образцы же с крупными сферолитами разрушаются хрупко.

Как видно из вышеизложенного, полимерные материалы характеризуются широким набором ценных физико-химических свойств, что позволяет использовать их в различных областях науки и техники, а также в медицине.

Из полимеров типа полиэтилена, поливинилхлорида и др., легко обрабатываемых давлением, изготовляют различные медицинские инструменты и приспособления. Тефлон, капрон и лавсан, милар, силастиковый полимер обладают высокой химической стойкостью, вследствие чего их используют при изготовлении протезов внутренних частей организма (кровеносных сосудов, клапанов сердца, сухожилий, вживляемых глазных линз и т. п.). Раствор полимера поливинилпирролидона — хороший заменитель кровяной плазмы.

В настоящее время в искусственной почке применяются целлофановые мембраны. Такие мембраны задерживают белок и клеточные элементы крови. Проводятся эксперименты по созданию искусственных легких с силиконовыми мембранами, обладающими высокой пропускной способностью по отношению к кислороду и диоксиду углерода.

Большой интерес для медицины представляют тканевые клеи, например алкил-α-цианокрилаты, *n*-бутил-α-цианокрилат, быстро полимеризующиеся в пленку, которые используют для закрытия ран без наложения швов.

К высокомолекулярным соединениям относятся также биополимеры, являющиеся структурной основой всех живых организмов и играющие главную роль в процессе их жизнедеятельности, — это

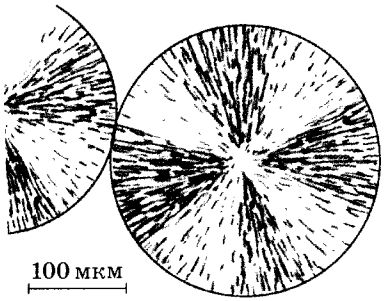


Рис. 8.8

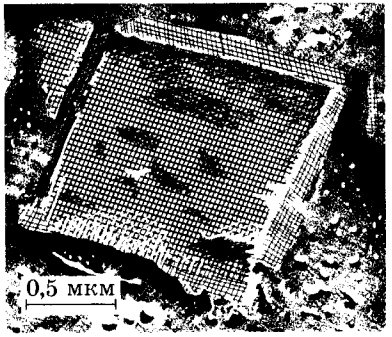


Рис. 8.9

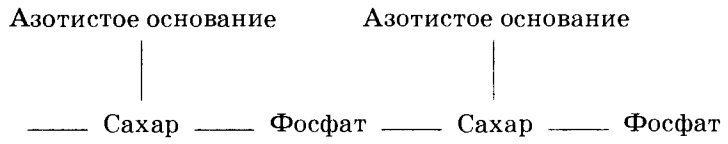
белки, нуклеиновые кислоты, полисахариды, гликопротеиды, липопротеиды, гликолипиды и др.

Так, молекула белка состоит из одной или нескольких полипептидных цепей, образовавшихся в результате поликонденсации аминокислот. При объединении аминокислот в белковую цепь образуются ***пептидные связи*** — NH —CO—, строение которых было установлено Полингом и Кори методом рентгеноструктурного анализа (см. § 19.7). Состав аминокислот и их последовательность представляет собой ***первичную структуру*** белка, имеющую определяющее значение для его функций. Это подтверждается двумя группами фактов. Во-первых, различиями и сходством структур однотипных белков разных видов и, во-вторых, патологическими изменениями функций белков при замещениях (мутационных) аминокислотных остатков. Мутации выражаются в замещении аминокислотных остатков. В результате искажение всегда имеет серьезные биологические последствия. Эти явления детально изучены на гемоглобине.

Известен ряд наследственных заболеваний крови — анемий. При так называемой серповидноклеточной анемии, распространенной в некоторых районах Африки, Юго-Восточной Азии, Средиземноморья, эритроциты имеют форму серпов. В этом случае гемоглобин имеет структуру, подобную кристаллу. В результате эритроциты слипаются и подвергаются гемолизу — распаду. Тяжелые нарушения кровообращения, вызванные этим заболеванием, зачастую приводят к смерти в раннем возрасте.

Были обнаружены различия подвижности гемоглобинов при электрофорезе в норме и при анемии, что объясняется различием в аминокислотном составе и тем самым в числе заряженных групп. Болезни гемоглобина назвали молекулярными. Оказалось, что отличие аномальных гемоглобинов от нормального определяется замещением всего лишь одного остатка в белковой цепи.

Нуклеиновые кислоты представляют собой еще один важнейший тип биополимеров. Они служат обязательными участниками синтеза белков. Основная цепь нуклеиновой кислоты состоит из чередующихся звеньев фосфорной кислоты и сахара — ***рибозы*** в рибонуклеиновой кислоте (РНК) и ***дезоксирибозы*** в дезоксирибонуклеиновой кислоте (ДНК). В этом смысле основные цепи РНК и ДНК лишены первичной структуры, они являются монотонным орнаментом, но не текстом. Однако к сахарам присоединены так называемые ***азотистые основания***, которые уже не повторяют друг друга. В целом, схема цепи нуклеиновой кислоты имеет следующий вид:



Последовательность азотистых оснований в нуклеиновой кислоте несет важную биологическую информацию. Определить первичную структуру нуклеиновой кислоты значительно сложнее, чем белка. Нуклеиновые кислоты являются асимметричными молекулами и вращают плоскость поляризации поляризованного света вправо (см. § 20.4).

Углеводы, ***полисахариды***, также относятся к биополимерам. Полисахаридные цепи построены из ***моносахаридных*** звеньев, имеющих в мономерном состоянии формулу $C_6H_{12}O_6$. В отличие от нуклеиновых кислот, первичная структура полисахаридов не несет какой-либо биологической информации. Их размеры и разветвленность варьируют в широких пределах, молекулы не имеют определенной длины. В целом, полисахариды играют важную роль в наружных мембранах некоторых клеток, участвуют в образовании клеточных оболочек бактерий многих видов. В мембранах полисахариды находятся в комплексах с белками и липидами — жировыми веществами, неизменно присутствующими в наружных и внутренних мембранах. Мембраны образованы комплексами белков с липидами и в ряде случаев с полисахаридами (см. § 11.1).

§ 8.2. Жидкие кристаллы

Жидкими кристаллами называют вещества, которые обладают свойствами и жидкостей, и кристаллов.

По своим механическим свойствам эти вещества похожи на жидкости — они текут. По оптическим свойствам жидкие кристаллы ведут себя как анизотропные тела — кристаллы: вращают плоскость поляризации, обнаруживают двойное лучепреломление и т. п. Чаще всего жидкокристаллические свойства вещество проявляет в определенном температурном интервале, выше которого оно находится в ***аморфно-жидком*** состоянии, ниже — в ***твердо-кристаллическом***.

Двойственность физических свойств обусловлена внутренним строением жидких кристаллов. Взаимное расположение молекул в них является промежуточным между аморфным состоянием, в котором полностью отсутствует дальний порядок, и твердым кристаллическим, в котором существует как дальний порядок в расположении центров молекул, так и упорядоченность в ориентации молекул. Жидкокристаллическое состояние наблюдается у веществ, молекулы которых имеют вытянутую форму в виде палочки или удлиненной пластинки. Такая форма молекул приводит к возможности упорядочения их ориентации.

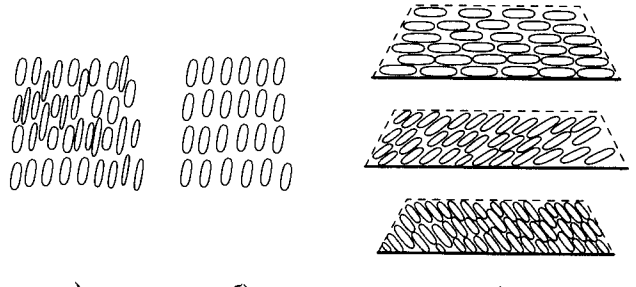
По характеру молекулярной упорядоченности различают ***нематические*** и ***смектические*** жидкие кристаллы. В нематичес-

ких жидких кристаллах молекулы ориентированы параллельно (рис. 8.10, *а*), но их центры расположены беспорядочно. Смектические кристаллы состоят из параллельных слоев, в которых расположение молекул упорядочено (рис. 8.10, *б*). Особый класс составляют кристаллы ***холестерического***[1] типа. Молекулы в таких кристаллах, как и в смектических, собраны в слои. Однако внутри каждого слоя параллельное расположение осей молекул напоминает нематическое состояние (рис. 8.10, *в*). Между слоями также имеется упорядочение: при переходе к соседним слоям изменяется на небольшой угол общая ориентация данного слоя по отношению к общей ориентации предыдущего слоя (наблюдается винтовая закрученность молекулярной структуры).

Молекулярная структура холестерических жидких кристаллов очень чувствительна к любому малейшему внешнему воздействию. Малое возмущение может нарушить слабые межмолекулярные силы, что приводит к заметным изменениям оптических свойств. Так, температура оказывает большое влияние на цвет кристалла, в зависимости от температуры он может быть любого цвета — от фиолетового до красного. Такие свойства жидких кристаллов используют для измерения изменений температуры различных участков тел.

В медицине это позволяет фиксировать расположение вен, артерий и других образований, имеющих иную теплоотдачу, чем окружающие среды. Жидкокристаллические вещества также применяются в различных температурно-чувствительных сигнальных устройствах.

Молекулярная структура жидких кристаллов, а следовательно, и их оптические свойства изменяются в присутствии ничтожных количеств паров некоторых химических веществ. Это позволяет использовать жидкие кристаллы для обнаружения малых количеств (следов) этих веществ.



а) *б)* *в)*

Рис. 8.10

[1] Их строение характерно для соединений, содержащих холестерин.

На изменении оптических свойств жидких кристаллов под воздействием электрического поля основано применение их в приборах и часах в качестве цифровых индикаторов.

Исследование жидких кристаллов в живых организмах — огромная, малоизученная, но чрезвычайно перспективная область.

§ 8.3. Механические свойства твердых тел

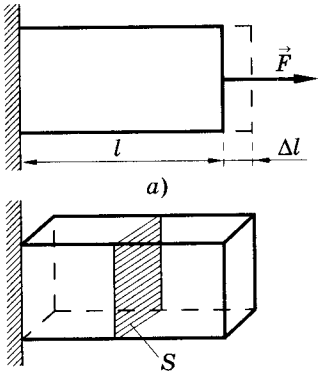
Изменение взаимного расположения точек тела, которое приводит к изменению его формы и размеров, называют ***деформацией***.

Деформации могут быть вызваны внешними воздействиями (механическими, электрическими или магнитными) или изменением температуры тела. Здесь рассматриваются деформации, возникающие при действии сил на тело.

В твердых телах деформацию называют ***упругой***, если после прекращения действия силы она исчезает. Если же деформация сохраняется и после прекращения внешнего воздействия, то ее называют ***пластической***. Промежуточный случай, т. е. неполное исчезновение деформации, принято называть ***упругопластической*** деформацией.

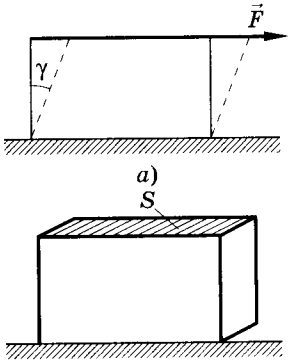
Наиболее простым видом деформации является ***растяжение (сжатие)***. Оно, например, возникает в стержне (рис. 8.11) при действии силы, направленной вдоль его оси. Если стержень длиной l при этом удлинился на Δl, то $\varepsilon = \Delta l / l$ является мерой деформации растяжения и называется ***относительным удлинением***.

Другим видом деформации является ***сдвиг*** (рис. 8.12). Сила, касательная к одной из граней прямоугольного параллелепипеда,



а) *б)*

Рис. 8.11



а) *б)*

Рис. 8.12

вызывает его деформацию, превращая в косоугольный параллелепипед (см. штриховые линии на рисунке). Угол γ называют углом сдвига, а $\operatorname{tg}\gamma$ — относительным сдвигом. Так как обычно угол γ мал, то можно считать $\operatorname{tg}\gamma = \gamma$.

При действии на тело внешней деформирующей силы расстояние между атомами (ионами) изменяется. Это приводит к возникновению внутренних сил, стремящихся вернуть атомы (ионы) в первоначальные положения. Мерой этих сил является ***механическое напряжение*** (или просто напряжение).

Непосредственно напряжение не измеряется. В ряде случаев его можно вычислить через внешние силы, действующие на тело. Косвенно напряжение можно определить по некоторым физическим эффектам (см., например, § 20.5).

Применительно к деформации растяжения напряжение σ можно выразить как отношение силы к площади поперечного сечения стержня (см. рис. 8.11, *б*):

$$\sigma = F/S.$$

Для деформации сдвига напряжение τ выражают как отношение силы к площади грани, к которой сила касательна (см. рис. 8.12, *б*). В этом случае τ называют ***касательным напряжением***:

$$\tau = F/S.$$

Упругие деформации подчиняются закону Гука, согласно которому напряжение пропорционально деформации. Для двух рассмотренных случаев (растяжение-сжатие и сдвиг) это аналитически записывается так:

$$\sigma = E\varepsilon \text{ и } \tau = G\gamma, \qquad \textbf{(8.1)}$$

где E — модуль Юнга, а G — модуль сдвига.

Экспериментальная кривая растяжения приведена на рис. 8.13. Участок OA соответствует упругим деформациям, точка B — ***пределу упругости***, характеризующему то максимальное напряжение, при котором еще не имеют места деформации, остающиеся в теле после снятия напряжения (остаточные деформации). Горизонтальный участок CD кривой растяжения соответствует ***пределу текучести*** — напряжению, начиная с которого деформация возрастает без увеличения напряжения. И наконец, напряжение, определяемое наибольшей нагрузкой, выдерживаемой перед разрушением, является ***пределом прочности***.

Между упругими свойствами кристаллических мономеров и полимерных материалов существует огромная и принципиальная разница, например, в пределах прочности сталь разрывается уже

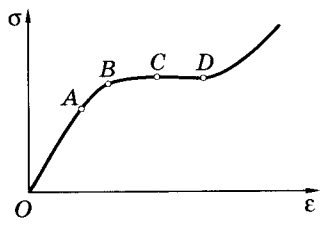


Рис. 8.13

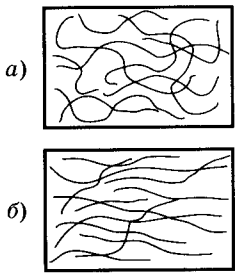


Рис. 8.14

при растяжении на 0,3%, а мягкие резины можно растягивать до 300%. Это связано с качественно другим механизмом упругости высокомолекулярных соединений.

Как уже говорилось, при деформации кристаллических твердых тел, например стали, силы упругости всецело определяются изменением межатомных расстояний. Структура высокомолекулярных соединений не регулярна. Они состоят из очень длинных гибких молекул, которые причудливо изогнуты, части молекул находятся в хаотическом тепловом движении так, что их форма и длина все время изменяются. Но в каждый данный момент большинство молекул в недеформированном образце имеет длину, близкую к наиболее вероятной. При приложении нагрузки к материалу (рис. 8.14, *а*) его молекулы выпрямляются в соответствующем направлении и длина образца увеличивается (рис. 8.14, *б*). После снятия нагрузки вследствие хаотического теплового движения длина каждой молекулы восстанавливается и образец укорачивается.

Упругость, свойственную полимерам, называют ***каучукоподобной эластичностью (высокой эластичностью*** или ***высокоэластичностью)***.

Приведем данные по механическим свойствам некоторых материалов (табл. 16).

Таблица 16

Материал	Модуль Юнга, ГПа	Предел прочности, МПа
Сталь	200	500
Капрон стеклонаполненный	8	150
Органическое стекло	3,5	50

Различие между деформацией кристаллических мономеров и полимерных материалов проявляется и во временно́й ее зависимости. Дело в том, что практически все материалы обладают *ползучестью*: под действием постоянной нагрузки происходит их деформация. В полимерах распрямление молекул при нагрузке материала и скольжение макромолекул происходят более длительно, чем, например, ползучесть в металлах. В какой-то мере при ползучести процессы, происходящие в полимере, соответствуют течению вязкой жидкости. Сочетание вязкого течения и высокой эластичности позволяет называть деформацию, характерную для полимеров, ***вязкоупругой***.

Упругие и вязкие свойства тел удобно моделировать. Это дает возможность нагляднее представить механические свойства биологических объектов (см. § 8.4).

В качестве модели упругого тела (упругой деформации) выберем пружину (рис. 8.15, *а*), малая деформация которой соответствует закону Гука.

Моделью вязкого тела является поршень с отверстиями, движущийся в цилиндре с вязкой жидкостью (рис. 8.15, *б*).

Силу сопротивления среды в этом случае примем пропорциональной скорости перемещения поршня [см. (5.16)]:

$$F_{\text{сопр}} = -r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \qquad \textbf{(8.2)}$$

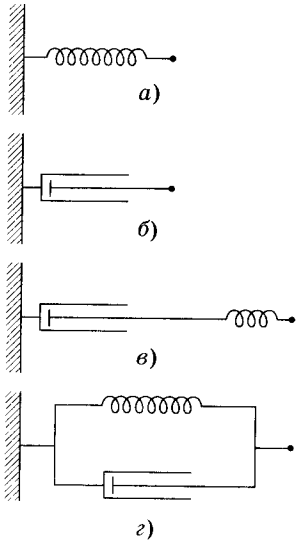


Рис. 8.15

Преобразуем уравнение (8.2), основываясь на аналогии. Вместо силы сопротивления запишем напряжение ($F_{\text{сопр}} \to \sigma$), т. е. силу, отнесенную к единице площади, коэффициент трения, характеризующий свойство среды оказывать сопротивление движущемуся в ней телу, заменим коэффициентом вязкости среды ($r \to \eta$), смещение тела — относительным удлинением ($x \to \varepsilon$). Тогда вместо (8.2) получим связь между скоростью вязкой деформации и напряжением:

$$\sigma = \eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}. \qquad \textbf{(8.3)}$$

В справедливости (8.3) частично можно убедиться проверкой размерностей: σ [Па], η [Па · с], $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ [c^{-1}]. Из (8.3) видно, что напряжение зависит не от самой деформации, а от ее скорости (скорости перемещения поршня).

Вязкоупругие свойства тел моделируются системами, состоящими из различных комбинаций двух простых моделей: пружина и поршень. Рассмотрим некоторые из них.

Наиболее простой системой, сочетающей упругие и вязкие свойства, является модель Максвелла, в которой последовательно соединены упругий и вязкий элемент (рис. 8.15, *в*).

При воздействии постоянной силой пружина упруго мгновенно удлиняется до значения, определяемого законом Гука, а поршень движется с постоянной скоростью до тех пор, пока действует сила (напряжение). Так реализуется на модели ползучесть материала.

Если быстро растянуть модель Максвелла и закрепить это состояние, то деформация будет сохраняться. Пружина после быстрого растяжения начнет сокращаться, вытягивая поршень. Со временем будет происходить релаксация, т. е. уменьшение (расслабление) напряжения.

Опишем математически эту модель. Из закона Гука (8.1) следует $\varepsilon_{\text{упр}} = \sigma/E$, где $\varepsilon_{\text{упр}}$ — упругая часть общей деформации в модели Максвелла. Скорость этой деформации равна

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{упр}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}. \qquad \textbf{(8.4)}$$

Скорость вязкой деформации выразим из (8.3):

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{вязк}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma}{\eta}. \qquad \textbf{(8.5)}$$

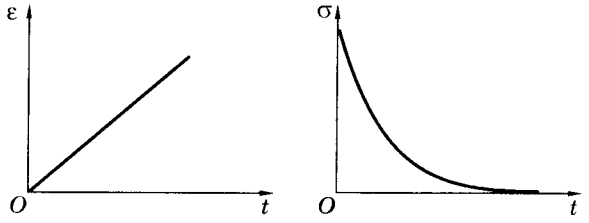
Суммируя (8.4) и (8.5), находим скорость общей (суммарной) деформации модели Максвелла:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{упр}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{вязк}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma}{\eta}. \qquad \textbf{(8.6)}$$

Из уравнения (8.6) можно получить временны́е зависимости как деформации, так и напряжения.

Если σ = const и $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = 0$ (постоянная сила приложена к модели), то из (8.6) следует

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma}{\eta} \text{ или } \mathrm{d}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}\mathrm{d}t.$$



а) *б*)

Рис. 8.16

Интегрируя последнее выражение от начального момента времени и нулевой деформации до текущих значений t и ε, получаем

$$\int_0^{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}\int_0^{t} dt,\ \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}t. \qquad (8.7)$$

Это соответствует ползучести (рис. 8.16, *а*).

Если $\varepsilon = \text{const}$ и $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ (поддерживается постоянная деформация), то из (8.6) следует

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\eta} \text{ или } \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta}dt.$$

Интегрируя последнее выражение от начального момента времени и начального напряжения σ_0 до текущих значений t и σ, получаем:

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{E}{\eta}\int_0^{t} dt,\ \ln\frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{E}{\eta}t,\ \sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}. \qquad (8.8)$$

Это соответствует релаксации напряжения (рис. 8.16, *б*).

В рамках модели Максвелла под действием нагрузки происходит, как было показано, быстрое (мгновенное) первоначальное упругое растяжение. В реальных полимерах вязкоупругая деформация обычно происходит сразу же после приложения нагрузки. Поэтому более подходящей может оказаться модель Кельвина — Фойхта, состоящая из параллельно соединенных пружины и поршня, нечто вроде амортизатора в автомашине (см. рис. 8.15, *г*).

Если мгновенно создать в такой системе напряжение

$$\sigma = \sigma_{упр} + \sigma_{вязк}, \qquad (8.9)$$

приложив постоянную силу, то деформация системы будет возрастать. Используя (8.1) и (8.3), преобразуем (8.9):

$$\sigma = E\sigma + \eta\frac{d\varepsilon}{dt} \text{ или } \frac{d\varepsilon}{\sigma - E\varepsilon} = \frac{dt}{\eta}.$$

Проинтегрируем последнее выражение от начального момента времени и нулевой деформации до текущих значений t и ε:

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{\sigma - E\varepsilon} = \frac{1}{\eta}\int_0^{t} dt,\ -\frac{1}{E}\ln\frac{\sigma - E\varepsilon}{\sigma} = \frac{t}{\eta},$$

$$\ln\left(1 - \frac{E}{\sigma}\varepsilon\right) = -\frac{E}{\eta}t.$$

Потенцируя, имеем

$$1 - \frac{E}{\sigma}\varepsilon = e^{-\frac{E}{\eta}t} \text{ или } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right).$$

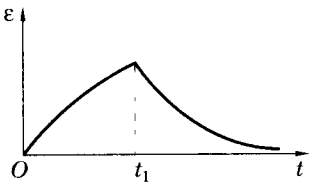


Рис. 8.17

Как видно, в рамках модели Кельвина—Фойхта деформация экспоненциально возрастает со временем. При снятии нагрузки ($\sigma = 0$ в момент t_1) деформация начнет экспоненциально убывать. Оба эти случая показаны на рис. 8.17.

В полимерах реализуются разные виды деформации: упругая обратимая (модель — пружина), вязкоупругая обратимая (модель Кельвина—Фойхта) и необратимая вязкая (модель — поршень). Сочетание этих трех элементов позволяет создавать модели, наиболее полно отражающие механические свойства тел и, в частности, биологических объектов.

Моделирование механических свойств тел широко используется в *реологии*. Основная задача реологии — это выяснение зависимости напряжения от относительной деформации: $\sigma = f(\varepsilon)$; напряжения от времени (релаксация напряжения): $\sigma = f(t)$ при $\varepsilon = \text{const}$; относительной деформации от времени (ползучесть): $\varepsilon = f(t)$ при $\sigma = \text{const}$.

§ 8.4. Механические свойства биологических тканей

Под механическими свойствами биологических тканей понимают две их разновидности. Одна связана с процессами биологической подвижности: сокращение мышц животных, рост клеток, движение хромосом в клетках при их делении и др. Эти процессы обусловлены химическими процессами и энергетически обеспечиваются АТФ, их природа рассматривается в курсе биохимии. Условно указанную группу называют активными механическими свойствами биологических систем. Другая разновидность — пассивные механические свойства биологических тел. Рассмотрим этот вопрос применительно к биологическим тканям.

Как технический объект биологическая ткань — композиционный материал, он образован объемным сочетанием химически разнородных компонентов. Механические свойства биологической ткани отличаются от механических свойств каждого компонента, взятого в отдельности. Методы определения механических свойств биологических тканей аналогичны методам определения этих свойств у технических материалов.

Костная ткань. Кость — основной материал опорно-двигательного аппарата. В упрощенном виде можно считать, что $^2/_3$ массы компактной костной ткани (0,5 объема) составляет неорганический материал, минеральное вещество кости — гидроксилапатит $3Ca_3(PO_4)_2 \cdot Ca(OH)_2$. Это вещество представлено в форме микроскопических кристалликов. В остальном кость состоит из органического материала, главным образом коллагена (высокомолекулярное соединение, волокнистый белок, обладающий высокоэластичностью). Кристаллики гидроксилапатита расположены между коллагеновыми волокнами (фибриллами).

Плотность костной ткани 2400 кг/м^3. Ее механические свойства зависят от многих факторов, в том числе от возраста, индивидуальных условий роста организма и, конечно, от участка организма.

Композиционное строение кости придает ей нужные механические свойства: твердость, упругость и прочность. Зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$ для компактной костной ткани имеет характерный вид, показанный на рис. 8.18, т. е. подобна аналогичной зависимости для твердого тела (см. рис. 8.13); при небольших деформациях выполняется закон Гука. Модуль Юнга около 10 ГПа, предел прочности 100 МПа. Полезно эти данные сопоставить с данными для капрона, армированного стеклом (см. табл. 16, заметно хорошее соответствие).

Примерный вид кривых ползучести компактной костной ткани приведен на рис. 8.19. Участок $0A$ соответствует быстрой деформации, AB — ползучести. В момент t_1, соответствующий точке B, нагрузка была снята. BC соответствует быстрой деформации сокращения, CD — обратной ползучести. В результате даже за длительный период образец кости не восстанавливает своих прежних размеров, сохраняется некоторая остаточная деформация $\varepsilon_{ост}$.

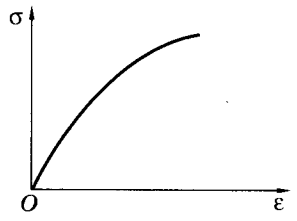


Рис. 8.18

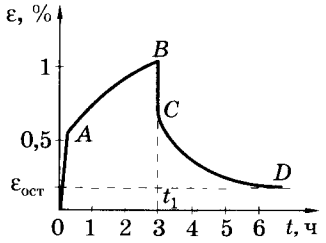


Рис. 8.19

Этой зависимости приближенно соответствует модель (рис. 8.20, *а*), сочетающая последовательное соединение пружины с моделью Кельвина—Фойхта. Временна́я зависимость относительной деформации показана на рис. 8.20, *б*. При действии постоянной нагрузки мгновенно растягивается пружина *1* (участок OA), затем вытягивается поршень (ползучесть AB), после прекращения нагрузки происходит быстрое сжатие пружины *1* (BC), а пружина *2* втягивает поршень в прежнее положение (ползучесть CD). В предложенной модели не предусматривается остаточная деформация.

Схематично можно заключить, что минеральное содержимое кости обеспечивает быструю деформацию, а полимерная часть (коллаген) определяет ползучесть.

Если в кости или в ее механической модели быстро создать постоянную деформацию, то скачкообразно возникает и напряжение (участок OA на рис. 8.20, *в*). На модели это означает растяжение пружины *1* и возникновение в ней напряжения. Затем (участок AB) эта пружина будет сокращаться, вытягивая поршень и растягивая пружину *2*, напряжение в системе будет убывать (релаксация напряжения). Однако даже спустя значительное время сохранится остаточное напряжение $\sigma_{ост}$. Для модели это означает, что не возникнет при постоянной деформации такой ситуации, чтобы пружины вернулись в недеформированное состояние.

Кожа. Она состоит из волокон коллагена, эластина (так же как и коллаген, волокнистый белок) и основной ткани — матрицы. Коллаген составляет около 75% сухой массы, а эласт-

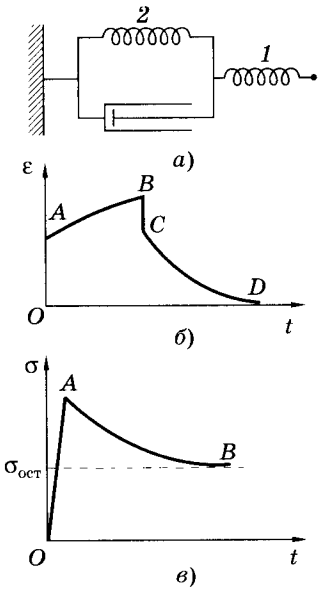


Рис. 8.20

тин — около 4%. Примерные данные по механическим свойствам приведены в табл. 17.

Эластин растягивается очень сильно (до 200—300%), примерно как резина. Коллаген может растягиваться до 10%, что соответствует капроновому волокну.

Таблица 17

Материал	Модуль упругости, МПа	Предел прочности, МПа
Коллаген	10—100	100
Эластин	0,1—0,6	5

Из сказанного ясно, что кожа является вязкоупругим материалом с высокоэластическими свойствами, она хорошо растягивается и удлиняется.

Мышцы. В состав мышц входит соединительная ткань, состоящая из волокон коллагена и эластина. Поэтому механические свойства мышц подобны механическим свойствам полимеров.

Релаксация напряжения в гладких мышцах соответствует модели Максвелла (см. рис. 8.15, *в*; 8.16, *б*). Поэтому гладкие мышцы могут значительно растягиваться без особого напряжения, что способствует увеличению объема полых органов, например мочевого пузыря.

Механическое поведение скелетной мышцы соответствует модели, представленной на рис. 8.20, *а*. При быстром растяжении мышц на определенную величину напряжение резко возрастает, а затем уменьшается до $\sigma_{ост}$ (см. рис. 8.20, *в*).

Зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$ для скелетной мышцы нелинейна (рис. 8.21). Анализ этой кривой показывает, что примерно до $\varepsilon \approx 0{,}25$ в портняжной мышце лягушки механизм деформации обусловлен распрямлением молекул коллагена (см. § 8.3). При большей деформации происходит увеличение межатомных расстояний в молекулах.

Ткань кровеносных сосудов (сосудистая ткань). Механические свойства кровеносных сосудов определяются главным образом свойствами коллагена, эластина и гладких мышечных волокон. Содержание этих составляющих сосудистой ткани изменяется по ходу кровеносной системы: отношение эластина к коллагену в общей сонной артерии 2 : 1, а в бедренной артерии 1 : 2. С удалением от сердца увеличивается доля гладких мышечных волокон, в артериолах они уже являются основной составляющей сосудистой ткани.

При детальном исследовании механических свойств сосудистой ткани различают, каким образом вырезан из сосуда образец (вдоль или поперек сосуда). Можно, однако, рассматривать деформацию сосуда в целом как результат действия давления изнутри на упругий цилиндр.

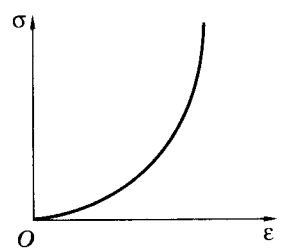
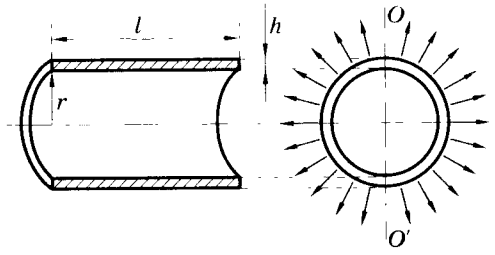


Рис. 8.21



а) *б)*

Рис. 8.22

Рассмотрим цилиндрическую часть кровеносного сосуда длиной l, толщиной h и радиусом внутренней части r. Сечения вдоль и поперек оси цилиндра показаны на рис. 8.22, *а*, *б*. Две половины цилиндрического сосуда взаимодействуют между собой по сечениям стенок цилиндра (заштрихованные области на рис. 8.22, *а*). Общая площадь этого «сечения взаимодействия» равна $2hl$. Если в сосудистой стенке существует механическое напряжение σ, то сила взаимодействия двух половинок сосуда равна

$$F = \sigma \cdot 2hl. \qquad (8.10)$$

Эта сила уравновешивается силами давления на цилиндр изнутри (они показаны стрелками на рис. 8.22, *б*). Силы направлены под разными углами к горизонтальной плоскости (на рисунке). Для того чтобы найти их равнодействующую, следует просуммировать горизонтальные проекции. Однако проще найти равнодействующую силу, если умножить давление на проекцию площади полуцилиндра на вертикальную плоскость OO'. Эта проекция равна $2rl$. Тогда выражение для силы через давление имеет вид

$$F = p \cdot 2rl. \qquad (8.11)$$

Приравнивая (8.10) и (8.11), получаем $\sigma \cdot 2hl = p \cdot 2rl$, откуда

$$\sigma = \frac{pr}{h}. \qquad (8.12)$$

Это ***уравнение Ламе.***

Будем считать, что при растяжении сосуда объем его стенки не изменяется (площадь стенки возрастает, а толщина убывает), т. е. не изменяется площадь сечения стенки сосуда (рис. 8.22, *б*):

$$2\pi rh = \text{const}, \text{ т. е. } rh = b = \text{const}. \qquad (8.13)$$

С учетом (8.13) преобразуем (8.12):

$$\sigma = \frac{pr}{h} = \frac{prr}{rh} = \frac{pr^2}{b}. \qquad (8.14)$$

Из (8.14) видно, что в капиллярах ($r \to 0$) напряжение отсутствует ($\sigma \to 0$).

В заключение отметим разделы и направления медицины, для которых особо важно иметь представление о пассивных механических свойствах биологических тканей:

— в космической медицине, так как человек находится в новых, экстремальных, условиях обитания;

— в спортивной медицине результативность достижений и ее возрастание побуждают спортивных медиков обращать внимание на физические возможности опорно-двигательного аппарата человека;

— механические свойства тканей необходимо учитывать гигиенистам при защите человека от действия вибраций;

— в протезировании при замене естественных органов и тканей искусственными также важно знать механические свойства и параметры биологических объектов;

— в судебной медицине следует знать устойчивость биологических структур по отношению к различным деформациям;

— в травматологии и ортопедии вопросы механического воздействия на организм являются определяющими.

Этот перечень не исчерпывает значения материала, изложенного в настоящей главе, для врачебного образования.

ГЛАВА 9

Физические вопросы гемодинамики

Гемодинамикой называют область биомеханики, в которой исследуется движение крови по сосудистой системе. Физической основой гемодинамики является гидродинамика. Течение крови зависит как от свойств крови, так и от свойств кровеносных сосудов.

В главе рассматриваются также физические основы работы некоторых технических устройств, используемых в связи с кровообращением.

§ 9.1. Модели кровообращения

Рассмотрим гидродинамическую модель кровеносной системы, предложенную О. Франком. Несмотря на достаточную простоту, она позволяет установить связь между ударным объемом крови

(объем крови, выбрасываемый желудочком сердца за одну систолу), гидравлическим сопротивлением периферической части системы кровообращения X_0 и изменением давления в артериях. Артериальная часть системы кровообращения моделируется упругим (эластичным) резервуаром (рис. 9.1, обозначено УР).

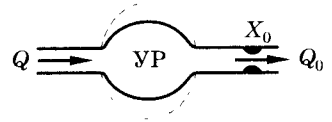


Рис. 9.1

Так как кровь находится в упругом резервуаре, то ее объем V в любой момент времени зависит от давления p по следующему соотношению:

$$V = V_0 + kp, \tag{9.1}$$

где k — эластичность, упругость резервуара (коэффициент пропорциональности между давлением и объемом), V_0 — объем резервуара при отсутствии давления ($p = 0$). Продифференцировав (9.1), получим

$$\frac{dV}{dt} = k\frac{dp}{dt}. \tag{9.2}$$

В упругий резервуар (артерии) поступает кровь из сердца, объемная скорость кровотока равна Q. От упругого резервуара кровь оттекает с объемной скоростью кровотока Q_0 в периферическую систему (артериолы, капилляры). Предполагаем, что гидравлическое сопротивление периферической системы постоянно. Это моделируется «жесткой» трубкой на выходе упругого резервуара (рис. 9.1).

Можно составить достаточно очевидное уравнение (рис. 9.1)

$$Q = \frac{dV}{dt} + Q_0, \tag{9.3}$$

показывающее, что объемная скорость кровотока из сердца равна сумме скорости возрастания объема упругого резервуара и скорости оттока крови из упругого резервуара.

На основании уравнения Пуазейля (7.8) и формулы (7.9) можно записать для периферической части системы

$$Q_0 = \frac{p - p_в}{X_0}, \tag{9.4}$$

где p — давление в упругом резервуаре, $p_в$ — венозное давление, оно может быть принято равным нулю, тогда вместо (9.4) имеем

$$Q_0 = \frac{p}{X_0}. \tag{9.5}$$

Подставляя (9.2) и (9.5) в (9.3), получаем

$$Q = k\frac{dp}{dt} + \frac{p}{X_0} \text{ или}$$

$$Q\,dt = k\,dp + \frac{p}{X_0}dt. \qquad (9.6)$$

Проинтегрируем (9.6). Пределы интегрирования по времени соответствуют периоду пульса (периоду сокращения сердца) от 0 до $T_п$. Этим временны́м пределам соответствуют одинаковые давления — минимальное диастолическое давление $p_д$:

$$\int_0^{T_п} Q\,dt = k\int_{p_д}^{p_д} dp + \frac{1}{X_0}\int_0^{T_п} p\,dt. \qquad (9.7)$$

Интеграл с равными пределами равен нулю, поэтому из (9.7) имеем

$$\int_0^{T_п} Q\,dt = \frac{1}{X_0}\int_0^{T_п} p\,dt. \qquad (9.8)$$

Экспериментальная кривая, показывающая временну́ю зависимость давления в сонной артерии, приведена на рис. 9.2 (сплошная линия). На рисунке показан период пульса, длительности $T_с$ систолы и $T_д$ диастолы, $p_с$ — максимальное (систолическое) давление.

Интеграл в левой части уравнения (9.8) равен объему крови, который выталкивается из сердца за одно сокращение, — ударный объем. Он может быть найден экспериментально. Интеграл в правой части уравнения (9.8) соответствует площади фигуры, ограниченной кривой и осью времени (см. рис. 9.2), что также можно найти. Используя указанные значения интегралов, можно вычислить по (9.8) гидравлическое сопротивление периферической части системы кровообращения.

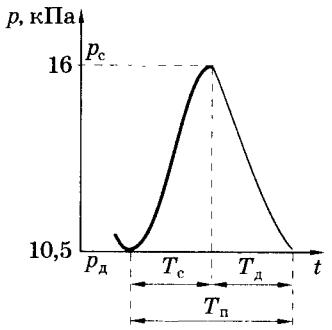


Рис. 9.2

Во время систолы (сокращение сердца) происходит расширение упругого резервуара, после систолы, во время диастолы — отток крови к периферии, $Q = 0$. Для этого периода из (9.6) имеем

$$0 = k\,dp + \frac{p}{X_0}dt \text{ или } \frac{dp}{p} = -\frac{dt}{kX_0}. \qquad (9.9)$$

Проинтегрировав (9.9), получаем зависимость давления в резервуаре после систолы от времени:

$$p = p_с e^{-\frac{t}{kX_0}}. \qquad (9.10)$$

Соответствующая кривая изображена тонкой линией на рис. 9.2. На основании (9.5) получаем зависимость объемной скорости оттока крови от времени:

$$Q = Q_с e^{-\frac{t}{kX_0}}, \qquad (9.11)$$

где $Q_с = \frac{p_с}{X_0}$ — объемная скорость кровотока из упругого резервуара в конце систолы (начале диастолы).

Зависимости (9.10) и (9.11) представляют собой экспоненты. Хотя данная модель весьма грубо описывает реальное явление, она чрезвычайно проста и верно отражает процесс к концу диастолы. Вместе с тем изменения давления в начале диастолы с помощью этой модели не описываются.

На основе механической модели по аналогии может быть построена электрическая модель (рис. 9.3).

Здесь источник U, дающий несинусоидальное переменное электрическое напряжение, служит аналогом сердца, выпрямитель B — сердечного клапана. Конденсатор C в течение полупериода накапливает заряд, а затем разряжается на резистор R, таким образом происходит сглаживание силы тока, протекающего через резистор. Действие конденсатора аналогично действию упругого резервуара (аорты, артерии), который сглаживает колебание давления крови в артериолах и капиллярах. Резистор является электрическим аналогом периферической сосудистой системы.

В более точной модели сосудистого русла использовалось большее количество эластичных резервуаров для учета того факта, что сосудистое русло является системой, распределенной в пространстве. Для учета инерционных свойств крови при построении модели предполагалось, что эластичные резервуары, моделирующие восходящую и нисходящую ветви аорты, обладают различной упругостью. На рис. 9.4 приведено изображение модели Ростона, состоящей из двух резервуаров с различными эластичностями (упругостями) и с неупругими звеньями разного гидравлического со-

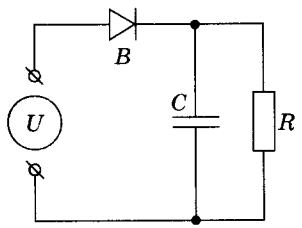


Рис. 9.3

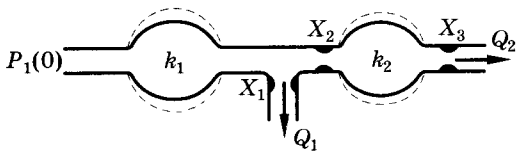


Рис. 9.4

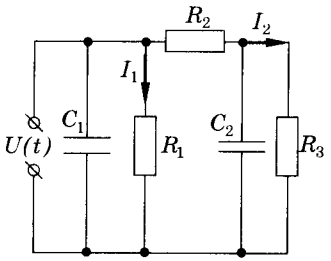


Рис. 9.5

противления между резервуарами. Этой модели соответствует электрическая схема, изображенная на рис. 9.5. Здесь источник тока задает пульсирующее напряжение $U(t)$, являющееся аналогом давления $p(t)$; емкости C_1 и C_2 соответствуют упругостям резервуаров k_1 и k_2, электрические сопротивления R_1, R_2 и R_3 — гидравлическим сопротивлениям X_1, X_2 и X_3, силы тока I_1 и I_2 — объемным скоростям оттока крови Q_1 и Q_2.

Такая модель математически описывается системой двух дифференциальных уравнений первого порядка, их решение дает две кривые, соответствующие первой и второй камерам.

Двухкамерная модель лучше описывает процессы, происходящие в сосудистом русле, но и она не объясняет колебания давления в начале диастолы.

Модели, содержащие несколько сотен элементов, называют моделями с распределенными параметрами.

§ 9.2. Пульсовая волна

При сокращении сердечной мышцы (систола) кровь выбрасывается из сердца в аорту и отходящие от нее артерии. Если бы стенки этих сосудов были жесткими, то давление, возникающее в крови на выходе из сердца, со скоростью звука передалось бы к периферии. Упругость стенок сосудов приводит к тому, что во время систолы кровь, выталкиваемая сердцем, растягивает аорту, артерии и артериолы, т. е. крупные сосуды воспринимают за время систолы больше крови, чем ее оттекает к периферии. Систолическое давление человека в норме равно приблизительно 16 кПа. Во время расслабления сердца (диастола) растянутые кровеносные сосуды спадают и потенциальная энергия, сообщенная им сердцем через кровь, переходит в кинетическую энергию тока крови, при этом поддерживается диастолическое давление, приблизительно равное 11 кПа.

Распространяющуюся по аорте и артериям волну повышенного давления, вызванную выбросом крови из левого желудочка в период систолы, называют ***пульсовой волной***.

Пульсовая волна распространяется со скоростью 5—10 м/с и даже более. Следовательно, за время систолы (около 0,3 с) она

должна распространиться на расстояние 1,5—3 м, что больше расстояния от сердца к конечностям. Это означает, что начало пульсовой волны достигнет конечностей раньше, чем начнется спад давления в аорте. Профиль части артерии схематически показан на рис. 9.6: *а* — после прохождения пульсовой волны, *б* — в артерии начало пульсовой волны, *в* — в артерии пульсовая волна, *г* — начинается спад повышенного давления.

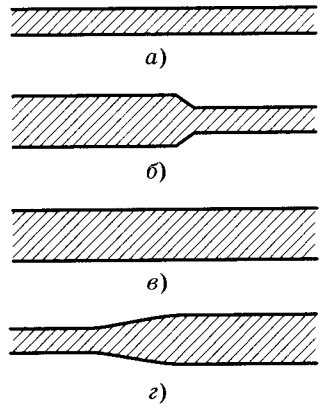


Рис. 9.6

Пульсовой волне будет соответствовать пульсирование скорости кровотока в крупных артериях, однако скорость крови (максимальное значение 0,3—0,5 м/с) существенно меньше скорости распространения пульсовой волны.

Из модельного опыта и из общих представлений о работе сердца ясно, что пульсовая волна не является синусоидальной (гармонической). Как всякий периодический процесс, пульсовая волна может быть представлена суммой гармонических волн (см. § 5.4). Поэтому уделим внимание, как некоторой модели, гармонической пульсовой волне.

Предположим, что гармоническая волна [см. (5.48)] распространяется по сосуду вдоль оси X со скоростью υ. Вязкость крови и упруговязкие свойства стенок сосуда уменьшают амплитуду волны. Можно считать (см., например, § 5.1), что затухание волны будет экспоненциальным. На основании этого можно записать следующее уравнение для пульсовой волны:

$$p = p_0 e^{-\chi x} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right], \qquad \textbf{(9.12)}$$

где p_0 — амплитуда давления в пульсовой волне; x — расстояние до произвольной точки от источника колебаний (сердца); t — время; ω — круговая частота колебаний; χ — некоторая константа, определяющая затухание волны. Длину пульсовой волны можно найти из формулы

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{2\pi\upsilon}{\omega}. \qquad \textbf{(9.13)}$$

Волна давления представляет некоторое «избыточное» давление. Поэтому с учетом «основного» давления p_a (атмосферное дав-

ление или давление в среде, окружающей сосуд) можно изменение давления записать следующим образом:

$$p = p_a + p_0 e^{-\chi x} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right]. \qquad (9.14)$$

Как видно из (9.14), по мере продвижения крови (по мере увеличения x) колебания давления сглаживаются. Схематично на рис. 9.7 показано колебание давления в аорте вблизи сердца (*а*) и в артериолах (*б*). Графики даны в предположении модели гармонической пульсовой волны.

На рис. 9.8 приведены экспериментальные графики, показывающие изменение среднего значения давления и скорости $\upsilon_{кр}$ кровотока в зависимости от типа кровеносных сосудов. Гидростатическое давление крови не учитывается. Давление — избыточное над атмосферным. Заштрихованная область соответствует колебанию давления (пульсовая волна).

Скорость пульсовой волны в крупных сосудах следующим образом зависит от их параметров (***формула Моенса—Кортевега***):

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}, \qquad (9.15)$$

где E — модуль упругости, ρ — плотность вещества сосуда, h — толщина стенки сосуда, d — диаметр сосуда.

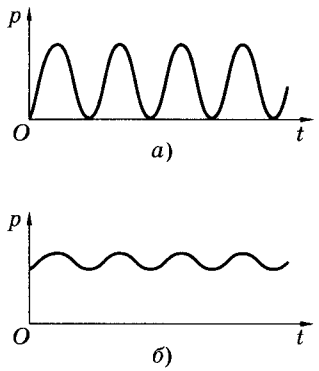


Рис. 9.7

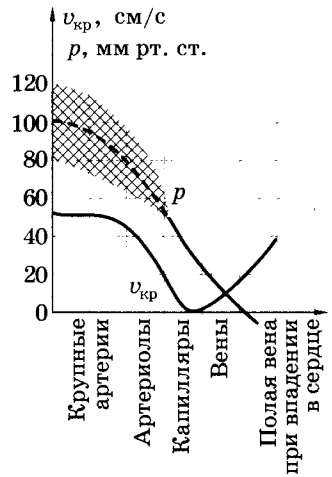


Рис. 9.8

Интересно сопоставить (9.15) с выражением для скорости распространения звука в тонком стержне:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (9.16)$$

У человека с возрастом модуль упругости сосудов возрастает, поэтому, как следует из (9.15), становится больше и скорость пульсовой волны.

§ 9.3. Работа и мощность сердца. Аппарат искусственного кровообращения

Работа, совершаемая сердцем, затрачивается на преодоление сил давления и сообщение крови кинетической энергии.

Рассчитаем работу, совершаемую при однократном сокращении левого желудочка. Изобразим $V_у$ — ударный объем крови — в виде цилиндра (рис. 9.9). Можно считать, что сердце продавливает этот объем по аорте сечением S на расстояние l при среднем давлении p. Совершаемая при этом работа

$$A_1 = Fl = pSl = pV_у.$$

На сообщение кинетической энергии этому объему крови затрачена работа

$$A_2 = m\upsilon^2/2 = \rho V_у \upsilon^2/2,$$

где ρ — плотность крови, υ — скорость крови в аорте. Таким образом, работа левого желудочка сердца при сокращении равна

$$A_л = A_1 + A_2 = pV_у + \rho V_у \upsilon^2/2.$$

Так как работа правого желудочка принимается равной 0,2 от работы левого, то работа всего сердца при однократном сокращении

$$A = A_л + 0{,}2A_л = 1{,}2\,(pV_у + \rho V_у \upsilon^2/2). \qquad (9.17)$$

Формула (9.17) справедлива как для покоя, так и для активного состояния организма. Эти состояния отличаются разной скоростью кровотока.

Подставив в формулу (9.17) значения $p = 13$ кПа, $V_у = 60$ мл $= 6 \cdot 10^{-5}$ м^3, $\rho = 1{,}05 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\upsilon = 0{,}5$ м/с, получим работу разового сокращения сердца в состоянии покоя: $A_1 \approx 1$ Дж. Считая, что в среднем сердце совершает

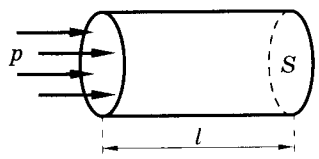


Рис. 9.9

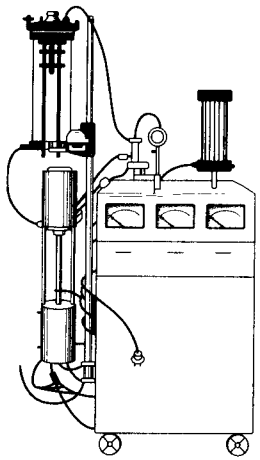


Рис. 9.10

одно сокращение в секунду, найдем работу сердца за сутки: $A_c = 86\,400$ Дж. При активной мышечной деятельности работа сердца может возрасти в несколько раз.

Если учесть, что продолжительность систолы около $t \approx 0{,}3$ с, то средняя мощность сердца за время одного сокращения $\langle W \rangle = A_1/t = 3{,}3$ Вт.

При операциях на сердце, которые требуют временного выключения его из системы кровообращения, пользуются специальными аппаратами искусственного кровообращения (рис. 9.10). По существу, этот аппарат является сочетанием искусственного сердца (насосная система) с искусственными легкими (оксигенатор — система, обеспечивающая насыщение крови кислородом).

§ 9.4. Физические основы клинического метода измерения давления крови

Физический параметр — давление крови — играет большую роль в диагностике многих заболеваний. Систолическое и диастолическое давления в какой-либо артерии могут быть измерены непосредственно с помощью иглы, соединенной с манометром. Однако в медицине широко используется бескровный метод, предложенный Н. С. Коротковым. Рассмотрим физические основы этого метода на примере измерения давления крови в плечевой артерии.

Вокруг руки между плечом и локтем накладывают манжету. Сечения манжеты М, части руки Р, плечевой кости П и плечевой артерии А показаны на рис. 9.11, *а* — 9.13, *а*. При накачивании воздуха через шланг В в манжету рука сжимается. Затем через этот же шланг воздух выпускают и с помощью манометра Б измеряют давление воздуха в манжете. На позиции *б* тех же рисунков изображены продольные сечения плечевой артерии, соответствующие каждому случаю. Сначала избыточное над атмосферным давление воздуха в манжете равно нулю (рис. 9.11), манжета не сжимает руку и артерию. По мере накачивания воздуха в манжету последняя сдавливает плечевую артерию и прекращает ток крови (рис. 9.12). Если мускулатура расслаблена, то давление воздуха внутри манжеты, состоящей из эластичных стенок, приблизительно равно давлению в мягких тканях, соприкасающихся с манжетой. В этом заключается основная физическая идея бескровного метода измерения давления.

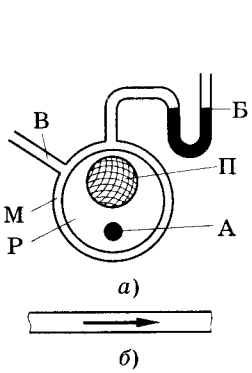


Рис. 9.11

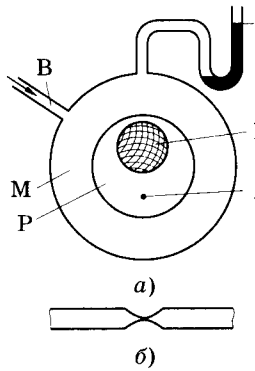


Рис. 9.12

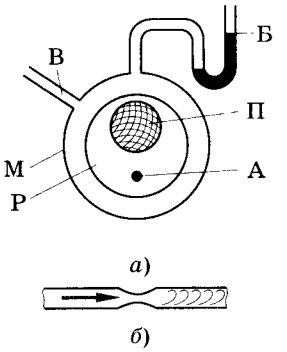


Рис. 9.13

Выпуская воздух, уменьшают давление в манжете и в мягких тканях, с которыми она соприкасается. Когда давление станет равным систолическому, кровь будет способна пробиться через сдавленную артерию — возникает турбулентное течение (рис. 9.13).

Характерные тоны и шумы, сопровождающие этот процесс, прослушивает врач при измерении давления, располагая фонендоскоп на артерии дистальнее манжеты (т. е. на большем расстоянии от сердца). Продолжая уменьшать давление в манжете, можно восстановить ламинарное течение крови, что заметно по резкому ослаблению прослушиваемых тонов. Давление в манжете, соответствующее восстановлению ламинарного течения в артерии, регистрируют как диастолическое.

Для измерения артериального давления применяют приборы, показанные на рис. 9.14: *а* — сфигмоманометр с ртутным мано-

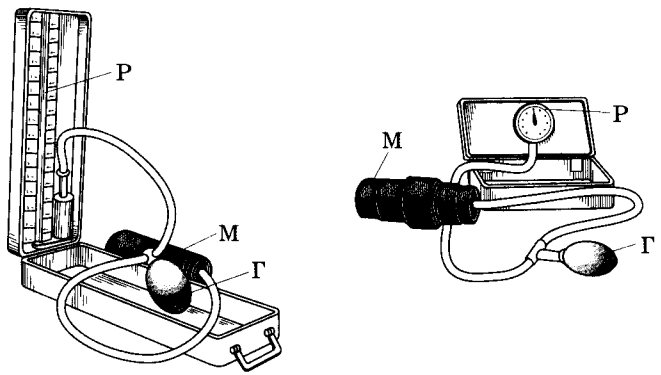


Рис. 9.14

метром, *б* — сфигмотонометр с металлическим мембранным манометром; здесь М — манжета, Г — груша для накачивания воздуха, Р — манометр. Такой же принцип работы имеют автоматические и полуавтоматические приборы, которые сейчас получают широкое распространение.

§ 9.5. Определение скорости кровотока

Существует несколько методов определения скорости кровотока. Рассмотрим физические основы двух из них.

Ультразвуковой метод (ультразвуковая расходометрия) основан на эффекте Доплера (см. § 5.10). От генератора *1* электрических колебаний УЗ-частоты (рис. 9.15) сигнал поступает на излучатель *2* и на устройство сравнения частот *3*. УЗ-волна *4* проникает в кровеносный сосуд *5* и отражается от движущихся эритроцитов *6*. Отраженная УЗ-волна 7 попадает в приемник *8*, где преобразуется в электрическое колебание и усиливается. Усиленное электрическое колебание попадает в устройство *3*. Здесь сравниваются колебания, соответствующие падающей и отраженной волнам, и выделяется доплеровский сдвиг частоты в виде электрического колебания:

$$U = U_0 \cos 2\pi\nu_д t.$$

Из формулы (5.65) можно определить скорость эритроцитов:

$$\upsilon_0 = \frac{\upsilon}{2}\frac{\nu_д}{\nu_г}. \qquad (9.18)$$

В крупных сосудах скорость эритроцитов различна в зависимости от их расположения относительно оси: «приосевые» эритроциты движутся с большей скоростью, а «пристеночные» — с меньшей. УЗ-волна может отражаться от разных эритроцитов, поэтому доплеровский сдвиг получается не в виде одной частоты, а как интервал частот. Таким образом, эффект Доплера позволяет определять не только среднюю скорость кровотока, но и скорость движения различных слоев крови.

Электромагнитный метод (электромагнитная расходометрия) измерения скорости кровотока основан на отклонении движущихся зарядов в магнитном поле. Дело в том, что кровь, будучи электрически нейтральной системой, состоит из положительных и отрицательных ионов. Следовательно, движущаяся кровь является потоком заряженных частиц, которые перемещаются со скоростью $\upsilon_{кр}$. На движущийся электрический заряд q в магнитном поле с индукцией B действует сила (см. § 13.3)

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon}_{кр} \times \vec{B}. \qquad (9.19)$$

Если заряд отрицательный, то сила направлена противоположно векторному произведению $\vec{\upsilon}_{кр} \times \vec{B}$.

Как показано на рис. 9.16, силы, действующие со стороны магнитного поля на разноименные заряды, направлены в противоположные стороны. Около одной стенки кровеносного сосуда преобладает положительный заряд, около другой — отрицательный. Перераспределение зарядов по сечению сосуда вызовет появление электрического поля.

Возникающее электрическое напряжение U (см. рис. 9.16) зависит от скорости движения ионов, т. е. от скорости крови [см. (9.19)]. Таким образом, измеряя это напряжение, можно определить и скорость кровотока. Зная сечение S сосуда, нетрудно вычислить объемную скорость кровотока ($м^3/с$):

$$Q = \upsilon_{кр} S. \qquad (9.20)$$

Практически удобнее в этом методе использовать переменное магнитное поле (рис. 9.17). Это приводит к возникновению переменного напряжения U, которое затем усиливается и измеряется.

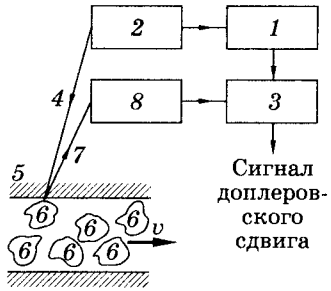


Рис. 9.15

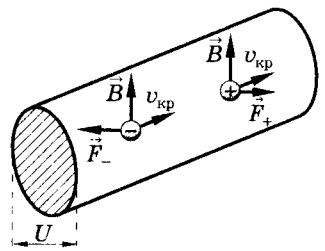


Рис. 9.16

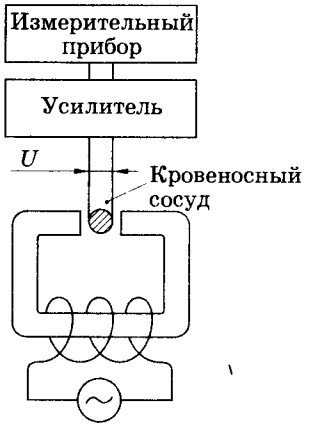


Рис. 9.17

РАЗДЕЛ

3

Термодинамика. Физические процессы в биологических мембранах

В разделе рассматриваются явления, сущность которых определяется хаотическим движением огромного числа молекул, из которых состоят тела разной природы. Изучая эти явления, применяют два основных метода. Один из них — *термодинамический*, он исходит из основных опытных законов, получивших название начал (законов, принципов) термодинамики. При таком подходе не учитывается внутреннее строение вещества.

Другой метод — *молекулярно-кинетический (статистический)* — основан на представлении о молекулярном строении вещества. Учитывая, что число молекул в любом теле очень велико, можно, используя теорию вероятностей, установить определенные закономерности.

В разделе в разной степени используются оба подхода.

Медикам данные вопросы важны для понимания энергетики организма, теплообмена биологических систем с окружающей средой, выяснения физических процессов, происходящих в биологических мембранах, и др.

ГЛАВА 10

Термодинамика

Под термодинамикой понимают раздел физики, рассматривающий тела, между которыми возможен обмен энергией (термодинамические системы), без учета микроскопического строения тел, составляющих систему. Различают термодинамику равновесных систем или систем, переходящих к равновесию (классическая, или равновесная, термодинамика, часто называемая просто термодинамикой), и термодинамику неравновесных систем (неравновесная термодинамика). Неравновесная термодинамика играет особую роль для рассмотрения биологических систем.

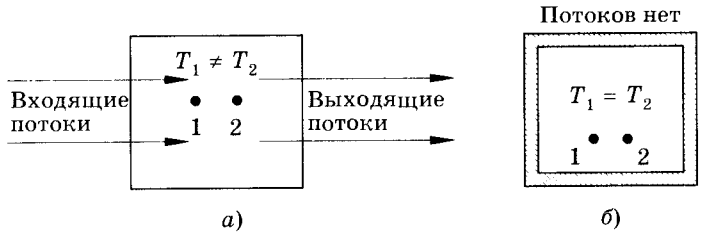
В главе наряду с термодинамикой изложены также вопросы, связанные с использованием низких температур и нагретых сред для лечения, а также элементы термометрии и калориметрии.

§ 10.1. Основные понятия термодинамики. Первое начало термодинамики

Состояние термодинамической системы характеризуется физическими величинами, называемыми ***параметрами системы*** (объем, давление, температура, плотность и т. д.).

Если параметры системы при взаимодействии ее с окружающими телами не изменяются с течением времени, то состояние системы называют ***стационарным***. Примерами таких состояний в течение небольшого отрезка времени являются состояние внутренней части работающего домашнего холодильника, состояние тела человека, состояние воздуха в отапливаемом помещении и т. д.

В разных частях системы, находящейся в стационарном состоянии, значения параметров обычно различаются: температура в разных участках тела человека, концентрация диффундирующих молекул в разных частях биологической мембраны и т. п. В системе, таким образом, поддерживаются постоянные градиенты некоторых параметров, с постоянной скоростью могут протекать химические реакции.



а) *б)*

Рис. 10.1

Стационарное состояние поддерживается за счет потоков энергии и вещества, проходящих через систему. Схематически на рис. 10.1, *а* показано стационарное состояние, температура неодинакова в разных точках системы. Ясно, что в стационарном состоянии могут находиться такие системы, которые либо обмениваются и энергией, и веществом с окружающими системами (***открытые системы***), либо обмениваются только энергией (***закрытые системы***).

Термодинамическая система, которая не обменивается с окружающими телами ни энергией, ни веществом, называется изолированной. Изолированная система со временем приходит в состояние термодинамического равновесия. В этом состоянии, как и в стационарном, параметры системы сохраняются неизменными во времени. Существенно, что в равновесном состоянии параметры, не зависящие от массы или числа частиц (давление, температура и др.), одинаковы в разных частях этой системы.

Естественно, что любая реальная термодинамическая система не будет изолированной хотя бы потому, что ее невозможно окружить оболочкой, не проводящей теплоту. Изолированную систему можно рассматривать как удобную термодинамическую модель. Схематически равновесное состояние изолированной системы показано на рис. 10.1, *б*.

Рассмотрим подробнее взаимодействие закрытой системы с окружающими телами. Обмен энергией между ними может осуществляться в двух различных процессах при совершении работы и при теплообмене.

Мерой передачи энергии в процессе теплообмена является количество теплоты, а мерой передачи энергии в процессе совершения работы является работа[1].

[1] Не вполне удачно, что работой называют и один из возможных процессов передачи энергии, и меру передачи энергии в этом процессе.

Найдем выражение для вычисления работы, совершаемой газом при изменении его объема. Предположим, что газ, находящийся в цилиндрическом сосуде под поршнем, изобарно расширяется от V_1 до V_2 (рис. 10.2), при этом поршень перемещается на расстояние $\Delta l = l_2 - l_1$, а объем изменяется на $\Delta V = V_2 - V_1$.

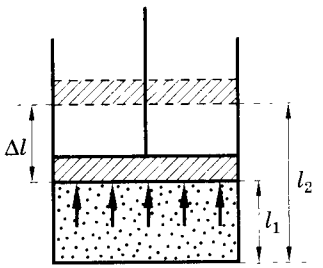


Рис. 10.2

На поршень, площадь поперечного сечения которого S, со стороны газа вследствие давления p действует сила $F = pS$. Так как направление этой силы совпадает с направлением перемещения поршня, то работа, совершаемая газом,

$$A = F\Delta l = pS\Delta l = p\Delta V. \qquad \textbf{(10.1)}$$

При расширении газа $\Delta V > 0$ и работа положительна ($A > 0$); при сжатии $\Delta V < 0$ и $A < 0$. Заметим, что речь идет о работе, совершаемой газом, а не внешними силами. Работа всех внешних сил, наоборот, при расширении газа окажется отрицательной, а при сжатии — положительной.

Если при изменении объема давление газа изменяется, то следует вычислять элементарную работу, соответствующую достаточно малому изменению объема $\mathrm{d}V$:

$$\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V. \qquad \textbf{(10.2)}$$

Проинтегрировав (10.2), получим работу, совершаемую газом:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V. \qquad \textbf{(10.3)}$$

В качестве примера найдем работу идеального газа при изотермическом процессе. Для этого подставим в формулу (10.3) вместо давления его выражение из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}. \qquad \textbf{(10.4)}$$

Получим

$$A = \int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad \textbf{(10.5)}$$

Здесь m — масса газа, M — молярная масса (масса моля), T — термодинамическая температура, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная.

Из уравнения (10.3) ясно, что работа, совершаемая газом, графически определяется как площадь криволинейной трапеции в координатах давление — объем (рис. 10.3). Из рисунка, на котором представлены графики двух различных процессов с одинаковым начальным и конечным состояниями, видно, что работа зависит от процесса. Так, работа A_1 (рис. 10.3, *а*) больше, чем работа A_2 (рис. 10.3, *б*).

Закон сохранения энергии для тепловых процессов формулируется как первое начало термодинамики. ***Количество теплоты, переданное системе, идет на изменение внутренней энергии системы и совершение системой работы:***

$$Q = \Delta U + A. \qquad \textbf{(10.6)}$$

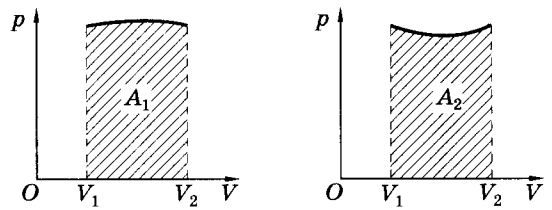
Под ***внутренней энергией*** системы понимают сумму кинетической и потенциальной энергий частиц, из которых состоит система.

Внутренняя энергия U является функцией состояния системы и для данного состояния имеет вполне определенное значение; ΔU есть разность двух значений внутренней энергии, соответствующих конечному и начальному состояниям системы: $\Delta U = U_2 - U_1$.

Количество теплоты Q, как и работа, является функцией процесса, а не состояния. И количество теплоты, и работу нельзя выразить в виде разности двух значений какого-либо параметра в конечном и начальном состояниях. В связи с этим Q и A в (10.6) записаны без знака приращения Δ.

Для достаточно малых значений Q, A и малых приращений U используют соответственно обозначения δQ, δA и $\mathrm{d}U$, подчеркивая этим отличие понятий количества теплоты и работы от внутренней энергии.

Ради упрощения в дальнейшем используются одинаковые обозначения ($\mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}A$ и $\mathrm{d}U$), однако следует помнить различие этих



а) *б)*

Рис. 10.3

физических величин. С учетом изложенного первое начало термодинамики можно записать в виде:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A. \qquad \textbf{(10.7)}$$

Значения Q, A, ΔU и $\mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}A$, $\mathrm{d}U$ могут быть как положительными (теплота передается системе внешними телами, внутренняя энергия увеличивается, газ расширяется), так и отрицательными (теплота отнимается от системы, внутренняя энергия уменьшается, газ сжимается).

§ 10.2. Второе начало термодинамики. Энтропия

Первое начало термодинамики, являющееся, по существу, выражением закона сохранения энергии, не указывает направления возможного протекания процессов. Так, например, по первому началу термодинамики, при теплообмене одинаково возможным был бы как самопроизвольный переход теплоты от тела более нагретого к телу менее нагретому, так и, наоборот, от тела менее нагретого к телу более нагретому. Из повседневного опыта, однако, хорошо известно, что второй процесс в природе нереален; так, например, не может самопроизвольно нагреться вода в чайнике вследствие охлаждения воздуха в комнате. Другой пример: при падении камня на землю происходит его нагревание, эквивалентное изменению потенциальной энергии, обратный процесс — самопроизвольное поднятие камня только из-за его охлаждения — невозможен.

Второе начало термодинамики, так же как и первое, является обобщением данных опыта.

Существует несколько формулировок второго закона термодинамики: ***теплота самопроизвольно не может переходить от тела с меньшей температурой к телу*** с ***большей температурой*** (*формулировка Клаузиуса*), или ***невозможен вечный двигатель второго рода*** (*формулировка Томсона*), т. е. ***невозможен такой периодический процесс, единственным результатом которого было бы превращение теплоты в работу вследствие охлаждения тела.***

В тепловой машине совершается работа за счет переданной теплоты, но при этом часть теплоты обязательно передается холо-

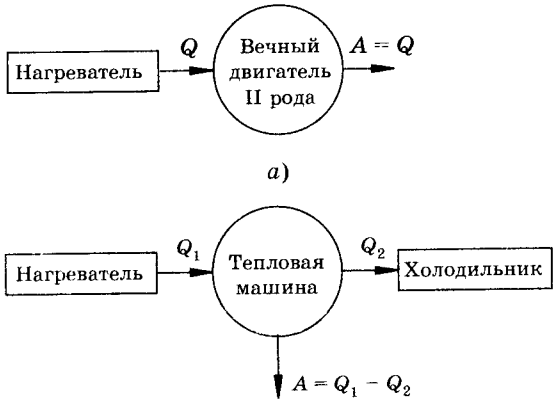


Рис. 10.4

дильнику. На рис. 10.4 схематически показаны соответственно невозможный (*а*) и возможный (*б*), по второму началу, периодические процессы.

Рассмотрим некоторые термодинамические понятия, которые позволяют количественно выразить второе начало термодинамики.

Процесс *1—2* называют ***обратимым,*** если можно совершить обратный процесс *2—1* через все промежуточные состояния так, чтобы после возвращения системы в исходное состояние в окружающих телах не произошло каких-либо изменений.

Обратимый процесс является физической абстракцией. Все реальные процессы необратимы хотя бы из-за наличия силы трения, которая вызывает нагревание окружающих тел. Некоторые характерные примеры необратимых процессов: расширение газа в пустоту, диффузия, теплообмен и т. д. Для возвращения системы в начальное состояние во всех этих случаях необходимо совершение работы внешними телами.

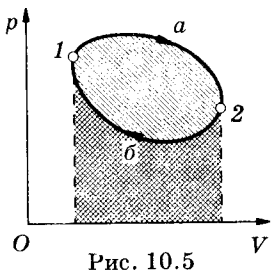


Рис. 10.5

Циклом или круговым процессом называют процесс, при котором система возвращается в исходное состояние.

График цикла представляет собой замкнутую линию. Цикл, изображенный на рис. 10.5, — ***прямой,*** он соответствует тепловой машине, т. е. устройству, которое получает количество теплоты от некоторого тела — *теплоотдатчика* (***нагревателя***), совершает работу и отдает часть

этой теплоты другому телу — *теплоприемнику* (***холодильнику***) (рис. 10.4, *б*).

В этом цикле рабочее вещество (газ) в целом совершает положительную работу (рис. 10.5): в процессе *1—а—2* газ расширяется, работа положительна и численно равна площади под кривой *1—а—2*; в процессе *2—б—1* работа отрицательна (сжатие газа) и численно равна площади под соответствующей кривой. Алгебраическое суммирование дает в целом положительную работу, совершенную газом за цикл. Она численно равна площади, ограниченной замкнутой кривой *1—а—2—б—1*.

Коэффициентом полезного действия тепловой машины или прямого цикла называют отношение совершенной работы к количеству теплоты, полученному рабочим веществом от нагревателя:

$$\eta = A/Q_1. \qquad \textbf{(10.8)}$$

Так как работа тепловой машины совершается за счет количества теплоты, а внутренняя энергия рабочего вещества за цикл не изменяется ($\Delta U = 0$), то из первого закона термодинамики следует, что работа в круговых процессах равна алгебраической сумме количеств теплоты: $A = Q_1 + Q_2$.

Следовательно,

$$\eta = (Q_1 + Q_2)/Q_1. \qquad \textbf{(10.9)}$$

Количество теплоты Q_1, полученное рабочим веществом, положительно, количество теплоты Q_2, отданное рабочим веществом холодильнику, отрицательно.

Обратный цикл[1] соответствует работе холодильной машины, т. е. такой системе, которая отбирает теплоту от холодильника и передает большее количество теплоты нагревателю. Как следует из второго закона термодинамики, этот процесс (рис. 10.6) не может протекать сам собой, он происходит за счет работы внешних тел. При этом газ совершает отрицательную работу: работа сжатия в процессе *2—а—1* отрицательна, работа расширения в процессе *1—б—2* положительна. В результате алгебраического суммирования получаем отрицательную работу газа, численно равную площади, ограниченной кривой *2—а—1—б—2*.

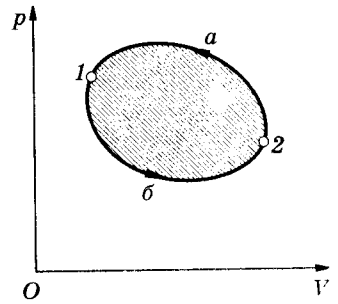


Рис. 10.6

[1] Не следует путать обратный цикл с обратимым. Обратимый цикл состоит из обратимых процессов, он может быть как прямым (тепловая машина), так и обратным (холодильная машина).

Рассмотрим ***цикл Карно*** (рис. 10.7), т. е. круговой процесс, состоящий из двух изотерм *1—2*, *3—4*, которым соответствуют температуры T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), и двух адиабат *2—3*, *4—1*. В этом цикле рабочим веществом является идеальный газ. Передача количества теплоты от нагревателя рабочему веществу происходит при температуре T_1, а от рабочего вещества к холодильнику — при температуре T_2. Без доказательства укажем, что КПД обратимого цикла Карно зависит только от температур T_1 и T_2 нагревателя и холодильника:

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1. \qquad \textbf{(10.10)}$$

Карно, исходя из второго начала термодинамики, доказал следующие положения: КПД всех обратимых машин, работающих по циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат, с нагревателем при температуре T_1 и холодильником при температуре T_2, равны между собой и не зависят от рабочего вещества и конструкции машины, совершающей цикл; КПД необратимой машины меньше КПД обратимой машины.

Эти положения на основании (10.9) и (10.10) можно записать в виде

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \leqslant \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad \textbf{(10.11)}$$

где знак «=» относится к обратимому циклу, а знак «<» — к необратимому.

Это выражение представляет собой количественную формулировку второго начала. Покажем, что ее следствием являются обе качественные формулировки, приведенные в начале параграфа.

Допустим, что происходит теплообмен между двумя телами без совершения работы, т. е. $Q_1 + Q_2 = 0$. Тогда [см. (10.11)] $T_1 - T_2 > 0$ и $T_1 > T_2$, что соответствует формулировке Клаузиуса: в самопроизвольном процессе теплота передается от тел с более высокой температурой к телам с более низкой.

В том случае, если тепловая машина полностью затрачивает всю полученную при теплообмене энергию на совершение работы и не отдает энергию холодильнику, $Q_2 = 0$ и из (10.11) имеем

$$(1 - T_2/T_1) \geqslant 1,$$

что невозможно, так как T_1 и T_2 положительны. Отсюда следует формулировка Томсона о невозможности вечного двигателя второго рода. Преобразуем выражение (10.11):

$$1 + \frac{Q_2}{Q_1} \leqslant 1 - \frac{T_2}{T_1};\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leqslant 0. \qquad \textbf{(10.12)}$$

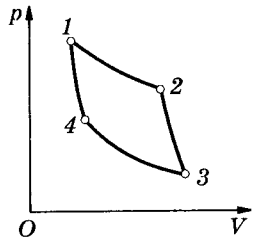


Рис. 10.7

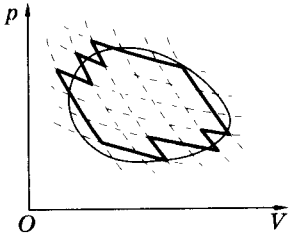


Рис. 10.8

Отношение количества теплоты, полученного или отданного рабочим веществом, к температуре, при которой происходит теплообмен, называют ***приведенным количеством теплоты***.

Поэтому (10.12) можно сформулировать так: алгебраическая сумма приведенных количеств теплоты за цикл не больше нуля (в обратимых циклах равна нулю, в необратимых — меньше нуля).

Если состояние системы изменяется не по циклу Карно, а по некоторому произвольному циклу, то его можно представить в виде совокупности достаточно малых циклов Карно (рис. 10.8). Тогда выражение (10.12) преобразуется в сумму достаточно малых приведенных количеств теплоты, что в пределе выразится интегралом

$$\oint \frac{dQ}{T} \leqslant 0. \qquad \textbf{(10.13)}$$

Выражение (10.13) справедливо для любого необратимого (знак «<») или обратимого (знак «=») цикла; dQ/T — элементарная приведенная теплота. Кружок на знаке интеграла означает, что интегрирование проводится по замкнутому контуру, т. е. по циклу.

Рассмотрим обратимый цикл (см. рис. 10.5), состоящий из двух процессов *а* и *б*. Для него справедливо равенство:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T}.$$
$$(a) \qquad (б)$$

На основе (10.13) для обратимых циклов имеем

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} = 0.$$
$$(a) \qquad (б)$$

Изменив пределы интегрирования по пути *б*, получим

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} - \int_1^2 \frac{dQ}{T} = 0, \text{ или } \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \qquad \textbf{(10.14)}$$
$$(a) \quad (б) \qquad\qquad (a) \quad (б)$$

Последнее означает, что сумма приведенных количеств теплоты при обратимом переходе системы из одного состояния в другое не зависит от процесса, а для данной массы газа определяется только начальным и конечным состояниями системы. На рис. 10.9 показаны графики различных обратимых процессов (*а*, *б*, *в*), общими для которых являются начальное *1* и конечное *2* состояния. Количество теплоты и работа в этих процессах различны, но сумма приведенных количеств теплоты оказывается одинаковой.

Физическую характеристику, не зависящую от процесса или перемещения, обычно выражают как разность двух значений некоторой функции, соответствующих конечному и начальному состояниям процесса или положениям системы. Так, например, независимость работы силы тяжести от траектории позволяет выразить эту работу через разность потенциальных энергий в конечных точках траектории; независимость работы сил электростатического поля от траекторий заряда позволяет связать эту работу с разностью потенциалов точек поля, являющихся граничными при его перемещении.

Аналогично, сумму приведенных количеств теплоты для обратимого процесса можно представить как разность двух значений некоторой функции состояния системы, которую называют ***энтропией***:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad \textbf{(10.15)}$$

где S_2 и S_1 — энтропия соответственно в конечном *2* и начальном *1* состояниях. Итак, ***энтропия есть функция состояния системы***, разность значений которой для двух состояний равна сумме приведенных количеств теплоты при обратимом переходе системы из одного состояния в другое.

Если процесс необратим, то равенство (10.15) не выполняется. Пусть дан цикл (рис. 10.10), состоящий из обратимого *2—б—1* и

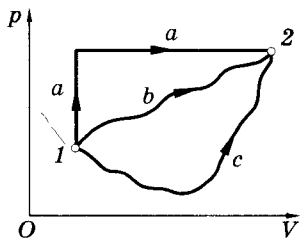


Рис. 10.9

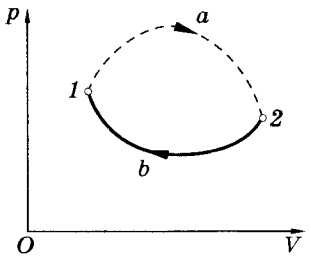


Рис. 10.10

необратимого *1—а—2* процессов. Так как часть цикла необратима, то и весь цикл необратим, поэтому на основании (10.13) запишем

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0 \text{ или}$$

$$\int_1^2 \frac{dQ_{\text{необр}}}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{\text{обр}}}{T} < 0. \qquad \textbf{(10.16)}$$

Согласно (10.15), $S_1 - S_2 = \int_2^1 \frac{dQ_{\text{обр}}}{T}$,

и тогда вместо (10.16) получим $\int_1^2 \frac{dQ_{\text{необр}}}{T} + S_1 - S_2 < 0$, или

$$\Delta S = S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{dQ_{\text{необр}}}{T}. \qquad \textbf{(10.17)}$$

Итак, в необратимом процессе сумма приведенных количеств теплоты меньше изменения энтропии. Объединяя правые части (10.15) и (10.17), получаем

$$\Delta S \geqslant \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad \textbf{(10.18)}$$

где знак «=» относится к обратимым, а знак «>» — к необратимым процессам.

Соотношение (10.18) получено на основании (10.11) и поэтому также выражает второе начало термодинамики.

Установим физический смысл энтропии.

Формула (10.15) дает только разность энтропий, сама же энтропия определяется с точностью до произвольной постоянной:

$$S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_0. \qquad \textbf{(10.19)}$$

Если система перешла из одного состояния в другое, то независимо от характера процесса — обратимый он или необратимый — изменение энтропии вычисляется по формуле (10.15) для любого обратимого процесса, происходящего между этими состояниями. Это обусловлено тем, что энтропия является функцией состояния системы.

Разность энтропий двух состояний легко вычисляется в обратимом изотермическом процессе:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T},$$

где Q — полное количество теплоты, полученное системой в процессе перехода из состояния *1* в состояние *2* при постоянной темпе-

ратуре T. Последнюю формулу используют при вычислении изменения энтропии в таких процессах, как плавление, парообразование и т. п. В этих случаях Q — ***теплота фазового превращения.***

Если процесс происходит в изолированной системе ($dQ = 0$), то [см. (10.18)] в обратимом процессе энтропия не изменяется: $S_2 - S_1 = 0$, $S = \text{const}$, а в необратимом — возрастает. Это можно проиллюстрировать на примере теплообмена между двумя телами, образующими изолированную систему и имеющими температуру T_1 и T_2 соответственно ($T_1 > T_2$). Если небольшое количество теплоты dQ переходит от первого тела ко второму, то при этом энтропия первого тела уменьшается на $dS_1 = dQ/T_1$, а второго — увеличивается на $dS_2 = dQ/T_2$. Так как количество теплоты невелико, то можно считать, что температуры первого и второго тел в процессе теплообмена не изменяются. ***Полное изменение энтропии системы положительно:***

$$dS = -dS_1 + dS_2 = \frac{dQ}{T_2} - \frac{dQ}{T_1} > 0;$$

следовательно, энтропия изолированной системы возрастает. Если бы в этой системе происходил самопроизвольный переход теплоты от тела с меньшей температурой к телу с большей температурой, то энтропия системы при этом уменьшилась бы:

$$dS = dS_1 - dS_2 = \frac{dQ}{T_1} - \frac{dQ}{T_2} < 0,$$

а это противоречит (10.18). Таким образом, ***в изолированной системе не могут протекать такие процессы, которые приводят к уменьшению энтропии системы*** (еще одна формулировка второго начала термодинамики).

Увеличение энтропии в изолированной системе не будет происходить беспредельно. В рассмотренном выше примере температуры тел со временем выравняются, теплопередача между ними прекратится и наступит равновесное состояние (см. § 10.1). В этом состоянии параметры системы будут оставаться неизменными, а энтропия достигнет максимума.

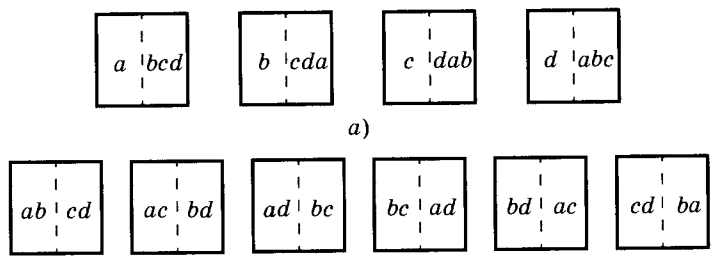
Согласно молекулярно-кинетической теории, энтропию наиболее удачно можно охарактеризовать как меру неупорядоченности расположения частиц системы. Так, например, при уменьшении объема газа его молекулы вынуждены занимать все более определенные положения одна относительно другой, что соответствует большему порядку в системе, при этом энтропия убывает. Когда газ конденсируется или жидкость кристаллизуется при постоянной температуре, то выделяется теплота, энтропия убывает. И в этом случае происходит увеличение порядка в расположении частиц.

Неупорядоченность состояния системы количественно характеризуется термодинамической вероятностью $W_{\text{тер}}$. Для выяснения ее смысла рассмотрим систему, состоящую из четырех частиц газа: a, b, c, d (рис. 10.11). Эти частицы находятся в объеме, разделенном мысленно на две равные ячейки, и могут свободно в нем перемещаться.

Состояние системы, определяемое числом частиц в первой и второй ячейках, назовем ***макросостоянием***; состояние системы, определяемое тем, какие конкретно частицы находятся в каждой из ячеек, — ***микросостоянием.*** Тогда (рис. 10.11, *а*) макросостояние — одна частица в первой ячейке и три частицы во второй — осуществляется четырьмя микросостояниями. Макросостояние, соответствующее размещению четырех частиц равномерно по две в каждой ячейке, осуществляется шестью микросостояниями (рис. 10.11, *б*).

Термодинамической вероятностью называют число способов размещения частиц или число микросостояний, реализующих данное макросостояние.

В рассмотренных примерах $W_{\text{тер}} = 4$ в первом случае и $W_{\text{тер}} = 6$ во втором. Очевидно, что равномерному распределению частиц по ячейкам (по две) соответствует бóльшая термодинамическая вероятность. С другой стороны, равномерное распределение частиц отвечает равновесному состоянию с наибольшей энтропией. Из теории вероятностей ясно, что система, предоставленная самой себе, стремится прийти к макросостоянию, которое реализуется наибольшим количеством способов, наибольшим количеством микросостояний, т. е. к состоянию с наибольшей термодинамической вероятностью.



а)

б)

Рис. 10.11

Заметим, что если газу предоставить возможность расширяться, его молекулы будут стремиться равномерно занять весь возможный объем, при этом процессе энтропия увеличивается. Обратный процесс — стремление молекул занять лишь часть объема, например половину комнаты, — не наблюдается, этому соответствовало бы состояние со значительно меньшей термодинамической вероятностью и меньшей энтропией.

Отсюда можно сделать вывод о связи энтропии с термодинамической вероятностью. Больцман установил, что энтропия линейно связана с логарифмом термодинамической вероятности:

$$S = k\ln W_{\text{тер}} + \text{const}, \qquad \textbf{(10.20)}$$

где k — постоянная Больцмана.

Второе начало термодинамики — статистический закон, в отличие, например, от первого начала термодинамики или второго закона Ньютона.

Утверждение второго начала о невозможности некоторых процессов, по существу, является утверждением о чрезвычайно малой вероятности их, практически — невероятности, т. е. невозможности.

В космических масштабах наблюдаются существенные отклонения от второго начала термодинамики, а ко всей Вселенной, так же, как и к системам, состоящим из малого числа молекул, оно неприменимо.

В заключение еще раз отметим, что если ***первый закон термодинамики содержит энергетический баланс процесса, то второй закон показывает его возможное направление.*** Аналогично тому, как второй закон термодинамики существенно дополняет первый закон, так и энтропия дополняет понятие энергии.

§ 10.3. Стационарное состояние. Принцип минимума производства энтропии

Изложенные выше вопросы термодинамики относились в основном к равновесным процессам или к процессам, которые приводят к равновесным состояниям. Такие ограничения позволили объяснить направленность термодинамических процессов в изолированной системе.

Реальные процессы и состояния в природе и технике являются неравновесными, а многие системы — открытыми. Эти процессы и системы рассматриваются в неравновесной термодинамике.

Аналогично тому, как в равновесной термодинамике особым состоянием является состояние равновесия, так в неравновесной термодинамике особую роль играют стационарные состояния.

Несмотря на то что в стационарном состоянии необратимые процессы, протекающие в системе (диффузия, теплопроводность и др.), увеличивают энтропию, энтропия системы не изменяется. Как понять это противоречие?

Представим изменение энтропии ΔS системы в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_e, \qquad \textbf{(10.21)}$$

где ΔS_i — изменение энтропии, обусловленное необратимыми процессами в системе, ΔS_e — изменение энтропии, вызванное взаимодействием системы с внешними телами (потоки, проходящие через систему).

Необратимость процессов приводит к $\Delta S_i > 0$, стационарность состояния — к $\Delta S = 0$; следовательно, $\Delta S_e = \Delta S - \Delta S_i < 0$. Это означает, что энтропия в продуктах (вещество и энергия), поступающих в систему, меньше энтропии в продуктах, выходящих из системы.

В равновесном состоянии, как уже отмечалось, энтропия максимальна. Для стационарных состояний И. Пригожин также указал экстремальное значение некоторой функции, сформулировав принцип минимума производства энтропии: *в стационарном состоянии системы скорость возникновения энтропии вследствие необратимых процессов имеет минимальное значение при данных внешних условиях, препятствующих достижению системой равновесного состояния* ($\mathrm{d}S_i/\mathrm{d}t > 0$ *и минимальна*).

Согласно принципу Пригожина, в системе при стационарном состоянии внутренние неравновесные процессы (диффузия, теплопроводность, химические реакции и др.) протекают так, что ежесекундный прирост энтропии минимален. Это означает, что система за счет внутренних необратимых процессов не способна выйти из стационарного состояния. Так, если за счет небольших отклонений (флуктуаций) система несколько и отклонилась бы от стационарного состояния, то стремление внутренних процессов уменьшить $\mathrm{d}S_i/\mathrm{d}t$ вернет систему вновь к этому состоянию.

Отметим, что все изложенное, в том числе и принцип Пригожина, справедливо при заданных и неизменных внешних условиях. При изменении внешнего воздействия (потоков, входящих и исходящих из системы) система уходит из одного стационарного состояния и переходит в другое в том случае, если новые внешние условия будут сохраняться во времени.

Примерами переходных процессов между стационарными состояниями в биологических системах являются генерация нервного импульса, мышечное сокращение и др.

§ 10.4. Организм как открытая система

Начальное развитие термодинамики стимулировалось потребностями промышленного производства. На этом этапе (XIX в.) ее основные достижения заключались в формулировке законов, разработке теории циклов и термодинамических потенциалов применительно к идеализированным процессам: равновесным и обратимым.

Термодинамика биологических систем в этот период не развивалась. Одним ярким исключением из этого была работа Майера, который по цвету венозной крови матросов, работающих в условиях тропического климата, сформулировал, по существу, приложимость закона сохранения энергии в термодинамике (первого начала термодинамики) к живым системам.

Первый закон термодинамики как закон сохранения энергии настолько очевиден, что его применения к биологическим системам здесь не рассматриваются, тем более что в курсе нормальной физиологии изучаются такие темы, как «Обмен веществ и энергии. Питание. Терморегуляция», а в § 22.5 анализируется теплообмен человека с окружающей средой посредством теплового излучения. Более существенно рассмотреть некоторые вопросы, связанные со вторым началом термодинамики и энтропией применительно к биологическим системам.

Биологические объекты являются открытыми термодинамическими системами. Они обмениваются с окружающей средой энергией и веществом.

Вообще говоря, живой организм — развивающаяся система, которая не находится в стационарном состоянии. Однако обычно в каком-либо не слишком большом интервале времени принимают состояние биологической системы за стационарное.

Рассмотрим в этом предположении некоторые вопросы. Для организма — стационарной системы — можно записать $dS = 0$, $S = \text{const}$, $dS_i > 0$, $dS_e < 0$. Это означает, что большая энтропия должна быть в продуктах выделения, а не в продуктах питания. Энтропия системы *организм — окружающая среда* возрастает как у изолированной системы, однако энтропия организма при этом сохраняется постоянной. Энтропия есть мера неупорядоченности системы (см. § 10.2), поэтому можно заключить, что упорядоченность организма сохраняется ценой уменьшения упорядоченности окружающей среды.

При некоторых патологических состояниях энтропия биологической системы может возрастать ($dS > 0$), это связано с отсутствием стационарности, увеличением неупорядоченности; так, например, при раковых заболеваниях происходит хаотическое, неупорядоченное разрастание клеток.

Формулу (10.21) можно преобразовать к виду

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_i}{dt} + \frac{dS_e}{dt}$$

или для стационарного состояния ($S = \text{const}$, $dS/dt = 0$)

$$\frac{dS_i}{dt} = -\frac{dS_e}{dt}. \qquad \textbf{(10.22)}$$

Из (10.22) видно, что при обычном состоянии организма скорость изменения энтропии за счет внутренних процессов равна скорости изменения отрицательной энтропии за счет обмена веществом и энергией с окружающей средой.

Поскольку, согласно ***принципу Пригожина,*** производная $dS_i/dt > 0$, причем минимальна, минимальное значение имеет и $\left|-\frac{dS_e}{dt}\right|$. Отсюда можно сделать вывод, что скорость изменения энтропии окружающей среды при сохранении стационарного состояния организма также минимальна.

Основа функционирования живых систем (клетки, органы, организм) — это поддержание стационарного состояния при условии протекания диффузионных процессов, биохимических реакций, осмотических явлений и т. п.

При изменении внешних условий процессы в организме развиваются так, что его состояние не будет прежним стационарным состоянием.

Можно указать некоторый термодинамический критерий приспособления организмов и биологических структур к изменениям внешних условий (адаптации). Если внешние условия изменяются (возрастает или уменьшается температура, изменяется влажность, состав окружающего воздуха и т. д.), но при этом организм (клетки) способен поддерживать стационарное состояние, то организм адаптируется (приспосабливается) к этим изменениям и существует. Если организм при изменении внешних условий не способен сохранить стационарное состояние, выходит из этого состояния, то это приводит к его гибели. Организм в этом случае не смог адаптироваться, т. е. не смог сравнительно быстро оказаться в стационарном состоянии, соответствующем изменившимся условиям.

§ 10.5. Термометрия и калориметрия

Точные измерения температур являются неотъемлемой частью научно-исследовательских и технических работ, а также медицинской диагностики и биологии.

Диапазон известных температур очень широк. Самая низкая температура, полученная к настоящему времени, около $2 \cdot 10^{-5}$ К. Верхний предел достижимых температур ничем не ограничен. Наибольшая температура достигнута в земных условиях при взрыве водородной бомбы и составляет примерно 10^8 К. В недрах звезд, по спектроскопическим данным, температура может достигать 10^9 К и более.

Температурный интервал окружающей среды, в которой могут длительно или кратковременно находиться биологические системы, сохраняя способность к функционированию, значительно у́же. И совсем невелик (приблизительно от 0 до 90 °С) диапазон температур самих живых организмов в состоянии их активной жизнедеятельности.

Методы получения и измерения температур в широком диапазоне весьма различны. *Отдел прикладной физики, в которой изучаются методы измерения температуры и связанные с этим вопросы, называют термометрией.*

Как известно, температура не может быть измерена непосредственно. Для ее определения нужно установить температурную шкалу: выбрать термометрическое вещество и физическое свойство, зависящее от температуры (термометрическое свойство), условиться о начальной точке отсчета и единице температуры. Для этого обычно выбирают две основные температуры (*реперные точки*), соответствующие температурам фазовых переходов, например плавлению льда и кипению воды при определенных внешних условиях. Участок шкалы между этими точками называют *основным интервалом*. За начало отсчета принимают одну из реперных точек (например, 0 °С — температура плавления, или таяния льда), за единицу температуры — долю основного интервала. Так, 1 °С составляет 0,01 долю основного интервала.

Температурные шкалы различаются по термометрическому свойству или веществу. Можно построить огромное количество шкал, значительно отличающихся одна от другой, так как ни одно из свойств не зависит от температуры строго линейно и, кроме того, определяется природой вещества.

Принципиальным недостатком всех эмпирических шкал является их зависимость от свойств термометрического вещества. Независимая от свойств и вещества шкала построена на основе второго начала термодинамики и названа ***термодинамической шкалой температур***. За реперную точку ее принята температура тройной точки воды 273,16 К. Определяется эта шкала с помощью цикла Карно. Измерив количества теплоты Q_0 и Q_s в изотермических процессах этого цикла соответственно при температуре T_0 таяния льда и T_s кипения воды, можно найти

$$T_s/T_0 = Q_s/Q_0.$$

Аналогично, для произвольной температуры T

$$T/T_0 = Q/Q_0,$$

где Q — количество теплоты, сообщенное системе в изотермическом процессе при температуре T. Установленную таким образом температуру называют ***термодинамической***.

Единицей термодинамической температуры является *кельвин* (К) — 1/273,16 термодинамической температуры тройной точки воды. Кельвин как единица температурного интервала равен 1/273,16 интервала термодинамической температуры между 0 К и тройной точкой воды.

Любая эмпирическая шкала приводится к термодинамической посредством введения поправок, учитывающих зависимость термометрического свойства данного вещества от температуры.

Так как температура определяется по значению какой-либо характеристики термометрического вещества, то ее определение состоит в измерении таких физических параметров и характеристик, как объем, давление, электрические, механические, оптические, магнитные свойства и т. п. Разнообразие методов измерения температуры связано с большим количеством термометрических веществ и их свойств, используемых при этом.

Термометры — устройства для измерения температуры — состоят из чувствительного элемента, в котором реализуется термометрическое свойство, и измерительного прибора (дилатометр, манометр, гальванометр, потенциометр и т. д.). Необходимое условие измерения температуры — тепловое равновесие чувствительного элемента и тела, температура которого определяется.

В зависимости от измеряемых интервалов температур наиболее распространены ***жидкостный, газовый термометры, термометр сопротивления, термопара как термометр и пирометры.***

В жидкостном термометре термометрической характеристикой является объем, чувствительным элементом — резервуар с жидкостью (обычно ртуть или спирт). В пирометрах в качестве термометрической характеристики используется интенсивность излу-

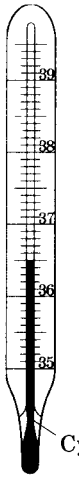


Рис. 10.12

чения (см. гл. 22). Принципиальное отличие пирометров от других термометров состоит в том, что их чувствительные элементы не находятся в непосредственном контакте с телом. Пирометры применяют для измерения сколь угодно высоких температур.

Используемый в медицине ртутный термометр указывает максимальную температуру и называется ***максимальным термометром***. Эта особенность обусловлена его устройством: резервуар с ртутью отделен от градуированного капилляра волосяным сужением, которое не позволяет ртути при охлаждении термометра возвратиться в резервуар (рис. 10.12). Существуют и ***минимальные термометры***, показывающие наименьшую температуру, наблюдаемую за длительный промежуток времени.

Многие процессы в физике, химии и биологии существенно зависят от температуры, поэтому получение и поддержание определенной температуры является важной задачей. Для этой цели служат ***термостаты*** — приборы, в которых температура поддерживается постоянной, что осуществляют либо автоматическими регуляторами, либо используют для этого свойство фазовых переходов протекать при неизменной температуре.

Для измерения количества теплоты, выделяющегося или поглощаемого в различных физических, химических и биологических процессах, применяют ряд методов, совокупность которых составляет ***калориметрию***[1].

Калориметрическими методами измеряют теплоемкость тел, теплоты фазовых переходов, растворения, смачивания, адсорбции, теплоты, сопровождающие химические реакции, энергию излучения, радиоактивного распада и т. п.

Подобные измерения производят с помощью ***калориметров***. Эти приборы можно разделить на два основных типа: калориметры, в которых количество теплоты определяют по изменению их температуры, и калориметры, у которых температура постоянна и количество теплоты определяют по количеству вещества, перешедшего в другое фазовое состояние (например, плавящееся твердое тело).

[1] Группу методов измерения тепловых эффектов, сопровождающих процессы жизнедеятельности, называют также *биокалориметрией*, а соответствующие приборы — *биокалориметрами*.

§ 10.6. Физические свойства нагретых и холодных сред, используемых для лечения. Применение низких температур в медицине

В медицине с целью местного нагревания или охлаждения применяют нагретые или холодные тела.

Обычно для этого выбирают сравнительно доступные среды, некоторые из них могут оказывать при этом и полезное механическое или химическое действие.

Физические свойства таких сред обусловлены их назначением. Во-первых, необходимо, чтобы в течение сравнительно длительного времени был произведен нужный эффект. Поэтому используемые среды должны иметь большую удельную теплоемкость (вода, грязи) или удельную теплоту фазового превращения (парафин, лед). Во-вторых, среды, накладываемые непосредственно на кожу, не должны вызывать болезненных ощущений. Это, с одной стороны, ограничивает температуру таких сред, а с другой — побуждает выбирать среды с небольшой теплоемкостью. Так, например, вода, применяемая для лечения, имеет температуру до 45 °С, а торф и грязи — до 50 °С, так как теплообмен (конвекция) в этих средах меньше, чем в воде. Парафин нагревают до 60—70 °С, так как он обладает небольшой теплопроводностью, а части парафина, непосредственно прилегающие к коже, быстро остывают, кристаллизуются и задерживают приток теплоты от остальных его частей.

В качестве охлаждающей среды, используемой для лечения, употребляется лед.

В последние годы достаточно широкое применение в медицине нашли низкие температуры.

При низкой температуре осуществляют такую консервацию отдельных органов и тканей в связи с трансплантацией, когда достаточно долго сохраняется их способность к жизнедеятельности и нормальному функционированию.

Криогенный[1] ***метод*** разрушения ткани при замораживании и размораживании используется медиками для удаления миндалин, бородавок и т. п. Для этой цели создают специальные криогенные аппараты и криозонды.

[1] *Крио...* — часть сложных слов, означающая связь со льдом, низкими температурами; *криогенный* — относящийся к низким температурам.

С помощью холода, обладающего анестезирующим свойством, можно уничтожить в головном мозгу человека клетки ядер, ответственные за некоторые заболевания, например паркинсонизм.

В микрохирургии используют примерзание («прилипание») влажных тканей к холодному металлическому инструменту для захвата и переноса этих тканей.

В связи с медицинскими применениями низкой температуры появились новые термины: ***криогенная медицина, криотерапия, криохирургия*** и т. д.

ГЛАВА 11

Физические процессы в биологических мембранах

Биологические мембраны являются важной частью клетки. Они ограничивают клетку от окружающей среды, защищают ее от вредных внешних воздействий, управляют обменом веществ между клеткой и ее окружением, способствуют генерации электрических потенциалов, участвуют в синтезе универсального аккумулятора энергии — аденозинтрифосфорной кислоты (АТФ) в митохондриях и т. д. По существу, мембраны формируют структуру клетки и осуществляют ее функции. Нарушение функций клеточной и внутриклеточной мембран лежит в основе необратимого повреждения клеток и, как следствие, развития тяжелых заболеваний сердечно-сосудистой, нервной, эндокринной систем и пр. В главе рассматриваются физические свойства биологических мембран и основные физические процессы, которые в них происходят.

§ 11.1. Строение и модели мембран

Все клетки окружены мембранами (цитоплазматическими, или наружными клеточными мембранами). Без мембраны содержимое клетки просто бы «растеклось», диффузия привела бы к термодинамическому равновесию, что означает отсутствие жизни. Можно сказать, что первая клетка появилась тогда, когда она смогла

отделиться от окружающей среды мембраной. Внутриклеточные мембраны подразделяют клетку на ряд замкнутых отсеков (компартаментов), каждый из них выполняет определенную функцию.

Несмотря на разнообразие биологических функций и форм, все мембраны построены в основном из липидов и белков. Другие соединения, встречающиеся в мембране (например, углеводы), химически связаны с липидами, либо с белками. Липидная молекула состоит из двух частей: несущей электрические заряды (полярной) ***головки***, на которую приходится, как правило, четверть длины всей молекулы (рис. 11.1), и длинных ***хвостов***, не несущих электрического заряда (гидрофобных). Хвосты липидной молекулы — это длинные цепи, построенные из атомов углерода и водорода (остатки жирных кислот). Головки могут иметь разнообразное строение, однако они заряжены либо отрицательно, либо нейтральны. Связующим звеном между хвостом и головкой чаще всего служит остаток глицерина.

Набор мембранных белков, выполняющих специализированные функции, различается в цитоплазматических мембранах и мембранах внутриклеточных структур. В то же время любая мембрана своей структурной основой имеет липидный бислой, состоящий из двух мономолекулярных пленок липидов, обращенных друг к другу гидрофобными хвостами и контактирующих с окружающей средой полярными головками (рис. 11.2). Во всех мембранах бислой выполняет две основные функции: ***матричную*** и ***барьерную***. С одной стороны, бислой является структурной основой для размещения основных рецепторных и ферментных систем клетки, с другой стороны, двойной слой липидов является преградой для ионов и водорастворимых молекул.

Первая погытка представить молекулярную организацию биологической мембраны принадлежит *Даниели* и *Давсону*, которые в 1935 г. предложили модель клеточной мембраны. Согласно этой

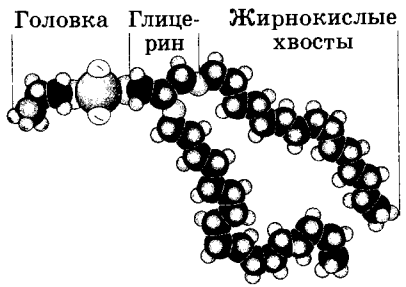


Рис. 11.1

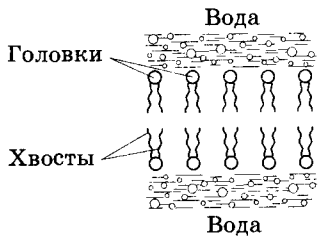


Рис. 11.2

модели, липиды располагались в два слоя (см. рис. 11.2), а поверхность липидов с обеих сторон покрывали белки. По мере приобретения новых знаний о химическом составе и физических свойствах мембран эволюционировали и представления об их организации. В настоящее время наибольшее распространение имеет предложенная в 1972 г. Синджером и Николсоном *жидко-мозаичная модель*, в основе которой лежит все та же липидная бислойная мембрана. Эта липидная основа представляет собой как бы двумерный растворитель, в котором плавают более или менее погруженные белки. За счет этих белков полностью или частично осуществляются специфические функции мембран — проницаемость, активный перенос через мембрану, генерация электрического потенциала и т. д. Схематично жидко-мозаичная структура мембраны показана на рис. 11.3. Здесь *1* — поверхностные белки, *2* — полупогруженные белки, *3* — полностью погруженные (интегральные) белки, *4* — белки, формирующие «ионный канал» *5*.

В целом, мембрана является динамичной структурой. Липиды могут перемещаться в плоскости мембраны (*латеральная диффузия*), а также переходить из одного монослоя в другой (*флип-флоп переходы*). При этом перемещение липидов в пределах одного мономолекулярного слоя происходит почти в 10 млрд раз чаще, чем флип-флоп переход. Белки также могут перемещаться в плоскости мембраны.

Уточнение строения биологических мембран и изучение их свойств оказалось возможным при использовании физико-химических моделей мембраны (искусственные мембраны). Наибольшее распространение получили три модели.

Рассмотрим первую модель — монослой липидов на границе раздела вода — воздух или вода — масло. На таких границах молекулы липидов расположены так, что гидрофильные головки находятся в воде, а гидрофобные хвосты — в воздухе или в масле (рис. 11.4). Ес-

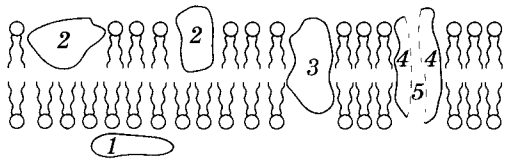


Рис. 11.3

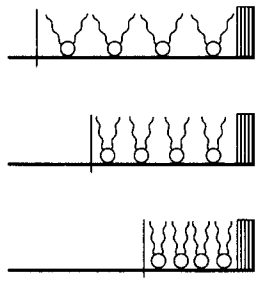
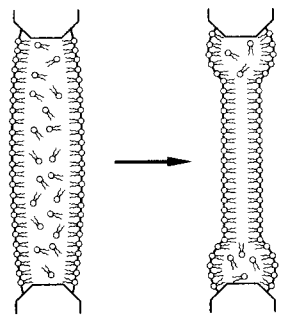


Рис. 11.4

ли постепенно уменьшать площадь, занимаемую монослоем, в конце концов удастся получить монослой, в котором молекулы расположены так же плотно, как и в одном из монослоев мембраны. При изменении состояния липидных молекул (под действием температуры, взаимодействия липидов с различными лекарственными препаратами и пр.) меняется площадь, занимаемая молекулами. Поэтому в биологических и медицинских исследованиях широко используются монослои синтетических липидов, изолированных из различных природных мембран.

Вторая широко использующаяся модель — бислойная липидная мембрана (БЛМ). Впервые такая модельная мембрана была создана в 1962 г. П. Мюллером с сотрудниками. Они заполнили отверстие в тефлоновой перегородке, разделяющей два водных раствора, фосфолипидом, растворенным в гептане (рис. 11.5, *а*). После того как растворитель и излишки липида растекаются по тефлону, в отверстии образуется бислой толщиной несколько нанометров и диаметром около 1 мм (рис. 11.5, *б*). Расположив по обе стороны мембраны два электрода, можно измерить сопротивление мембраны или генерируемый на ней потенциал. Если по разные стороны перегородки поместить различные по химическому составу растворы, то можно изучать проницаемость мембраны для различных агентов, в том числе лекарственных препаратов.

Третьей известной моделью биологической мембраны являются липосомы. Они представляют собой мельчайшие пузырьки (везикулы), состоящие из билипидной мембраны и полученные обработкой ультразвуком смеси воды и фосфолипидов. Липосомы фактически являются биологической мембраной, полностью лишенной белковых молекул. Схематически липосомы изображены на рис. 11.6.



а) *б*)

Рис. 11.5

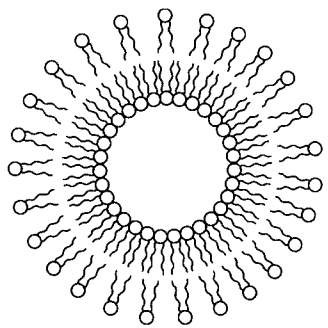


Рис. 11.6

Если липосомы приготовить в среде с каким-либо веществом, а затем удалить это вещество из внешней среды, то можно исследовать скорость выхода этого вещества из липосом данного липидного состава. На липосомах часто проводятся эксперименты по изучению влияния различных факторов, например состава фосфолипидов, на свойства мембраны или, наоборот, влияния мембранного окружения на свойства встраиваемых белков. В медицине липосомы используют для доставки лекарственных веществ в определенные органы и ткани, приготавливая их в среде, содержащей нужное вещество. Липосомы не токсичны, полностью усваиваются в организме и являются надежной липидной микрокапсулой для направленной доставки лекарства.

§ 11.2. Некоторые физические свойства и параметры мембран

С появлением электронного микроскопа (см. § 23.2) впервые открылась возможность познакомиться со строением мембран. Тогда обнаружилось, что плазматическая мембрана животных и растительных клеток выглядит как трехслойная структура. На рис. 11.7 изображена электронная микрофотография плазматической мембраны эритроцита. Видно, что мембрана состоит из светлого слоя, соответствующего фосфолипидам бислоя, и двух темных слоев — они представляют собой полярные головки и белки. Толщина мембран в зависимости от вида составляет величину от 4 до 13 нм.

Измерение подвижности молекул мембран и диффузии частиц через мембрану свидетельствует о том, что билипидный слой ведет себя подобно жидкости. В то же время мембрана является упорядоченной структурой. Эти два фактора заставляют думать, что липиды в мембране при ее естественном функционировании находятся в жидкокристаллическом состоянии (см. § 8.2). Вязкость липидного бислоя на два порядка больше вязкости воды и соответствует приблизительно вязкости растительного масла. Однако при понижении температуры происходит фазовый переход, в результате которого липиды бислоя превращаются в гель (твердокристаллическое состояние). На рис. 8 схематически представлен процесс «плавления» мембранных фосфолипидов при увеличении температуры (слева направо). Очевидно, что при этом меняется толщина двойного слоя — в состоянии геля (рис. 11.8, *а*) она больше, чем в жидкокристаллическом (рис. 11.8, *б*). При фазовых переходах в бислое могут образовываться каналы, по которым через мембрану способны проходить различные ионы и низкомолекулярные соединения, размер которых не превышает 1—3 нм.

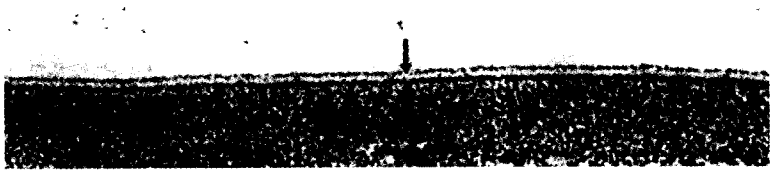


Рис. 11.7

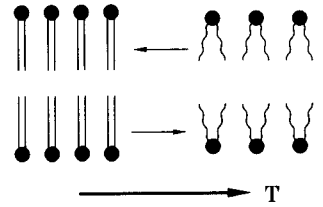


Рис. 11.8

В жидкокристаллическом состоянии отдельная жирнокислотная цепь может принимать много различных конфигураций из-за вращения вокруг С—С связей. При том возможно образование в бислое полостей — «кинков» (от англ. *kink* — петля). В этих полостях могут находиться различные молекулы, захваченные из пространства вне мембраны. При тепловом движении хвостов липидов происходит движение такого «кинка», а вместе с ним и молекул поперек мембраны или вдоль нее (рис. 11.9).

Проницаемость мембран для различных веществ зависит от поверхностного заряда, который создается заряженными головками липидов, придающими мембране преимущественно отрицательный заряд. Это приводит к тому, что на границе мембрана — вода создается межфазный скачок потенциала (поверхностный потенциал) того же знака, что и заряд на мембране. Величина этого потенциала играет большую роль в процессах связывания ионов мембраной. Помимо поверхностного потенциала, для нормального функционирования ферментных и рецепторных мембранных комплексов огромное значение имеет трансмембранный потенциал, природа которого будет рассмотрена ниже. Величина этого потенциала составляет 60—90 мВ (со знаком минус со стороны цитоплазмы). Из-за очень малой толщины мембран напряженность электрического поля в них достигает величины около (6—9) $\cdot$ 10^6 В/м.

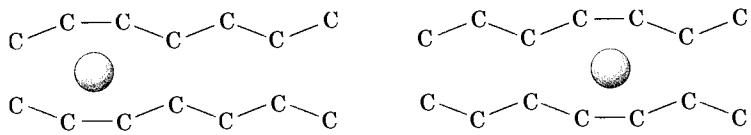


Рис. 11.9

Мембрана по своей структуре напоминает плоский конденсатор, обкладки которого образованы поверхностными белками, а роль диэлектрика выполняет липидный бислой. Емкость такого конденсатора составляет значительную величину (табл. 18). Используя формулу плоского конденсатора, можно оценить диэлектрическую проницаемость ε гидрофобной и гидрофильной областей мембран, зная пределы изменения толщины мембраны. Такие оценки дают для фосфолипидной области мембраны значение $\varepsilon = 2{,}0—2{,}2$, а для гидрофильной части $\varepsilon = 10—20$.

В табл. 18 приведены некоторые физические параметры биологических мембран и в сравнении с ними — те же параметры для искусственно приготовленных липидных бислоев.

Таблица 18. Физические свойства биологических мембран и липидных бислоев

Физические параметры	Биологические мембраны	Липидные бислои
Толщина, нм	4—13	4,6—9,0
Электрическое сопротивление, Ом · см^2	10^2—10^5	10^3—10^9
Электроемкость, мкФ · см$^{-2}$	0,5—1,3	0,3—1,3
Потенциал покоя, мВ	20—200	0—140
Показатель преломления	1,55	1,37
Поверхностное натяжение, мН · м$^{-1}$	0,03—3	0,2—6,0
Коэффициент проницаемости для воды, 10^{-4} см · с$^{-1}$	25—33	5—10
Напряжение пробоя, мВ	100	150—200
Плотность липидного бислоя, кг/м^3	800	760—900
Эффективный модуль упругости, Па	0,45	0,3—0,5

Мембраны обладают высокой прочностью на разрыв, устойчивостью и гибкостью. По электроизоляционным свойствам они значительно превосходят многие изоляционные материалы, применяемые в технике. Общая площадь мембран в органах и тканях достигает огромных размеров. Так, суммарная площадь клеточных мембран печени крысы, весящей всего 6 г, составляет несколько сотен квадратных метров. Клетки, как правило, имеют микроскопические размеры, поэтому отношение их поверхности к объему очень велико. Благодаря этому клетки располагают достаточной площадью для обеспечения многочисленных процессов, протекающих на мембранах. Одним из наиболее важных из них является процесс переноса веществ из клетки и в клетку.

§ 11.3. Перенос молекул (атомов) через мембраны. Уравнение Фика

Важным элементом функционирования мембран является их способность пропускать или не пропускать молекулы (атомы) и ионы. Существенно, что вероятность такого проникновения частиц зависит как от направления их перемещения, например в клетку или из клетки, так и от разновидности молекул и ионов.

Эти вопросы рассматриваются в разделе физики, относящемся к ***явлениям переноса***. Таким термином называют необратимые процессы, в результате которых в физической системе происходит пространственное перемещение (перенос) массы, импульса, энергии, заряда или какой-либо другой физической величины.

К явлениям переноса относят диффузию (перенос массы вещества), вязкость (перенос импульса), теплопроводность (перенос энергии), электропроводность (перенос электрического заряда). Здесь и в следующих параграфах рассматриваются наиболее существенные для биологических мембран явления: перенос вещества и перенос заряда. Как синоним переноса частиц в биофизике широкое распространение получил также термин ***транспорт частиц***.

Выведем основное ***уравнение диффузии*** (***уравнение Фика***), рассматривая процесс переноса в жидкостях.

Пусть через некоторую площадку S (рис. 11.10) во всех направлениях перемещаются молекулы жидкости. Учитывая теорию молекулярного строения жидкости (см. § 7.6), можно сказать, что молекулы пересекают площадку, перескакивая из одного положения равновесия в другое.

На расстояниях, равных среднему перемещению δ молекул (среднее расстояние между молекулами жидкости), вправо и влево от площадки построим прямоугольные параллелепипеды небольшой толщины l ($l \ll \delta$). Объем каждого параллелепипеда равен Sl. Если n — концентрация молекул, то внутри выделенных параллелепипедов имеется Sln молекул. Предположим, что концентрация молекул изменяется в пространстве, в левом (*1*) выделенном параллелепипеде концентрация равна n_1, а в правом (*2*) — n_2. Следовательно, в одном параллелепипеде Sln_1 молекул, а в другом — Sln_2 молекул.

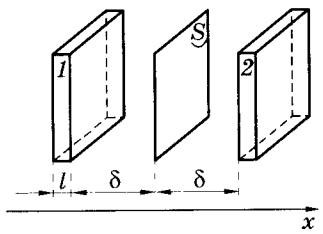


Рис. 11.10

Все молекулы вследствие хаотичного их движения можно условно представить шестью группами, каждая из которых перемещается вдоль или против направления одной из осей координат. Отсюда следует, что в направлении, перпендикулярном площадке S, вдоль оси OX от первого параллелепипеда перескакивает $^1/_6\, Sln_1$ молекул, а противоположно оси OX от второго параллелепипеда перескакивает $^1/_6\, Sln_2$ молекул.

Время Δt «пролета» этими молекулами площадки S может быть найдено следующим образом. Предположим, что все молекулы из выделенных объемов движутся с одинаковыми средними скоростями $<v>$. Тогда молекулы в объеме *1* или *2*, дошедшие до площадки S, пересекают ее в течение промежутка времени

$$\Delta t = l/<v>. \qquad (11.1)$$

Подставляя в (11.1) выражение для средней скорости $\tilde{v}$ из (7.20), получаем

$$\Delta t = \frac{l}{\delta}\tau, \qquad (11.2)$$

где τ — среднее время «оседлой жизни» молекулы, оно может рассматриваться как среднее время перескока. «Баланс» переноса молекул через площадку S за промежуток времени Δt равен

$$^1/_6 Sln_1 - {}^1/_6 Sln_2. \qquad (11.3)$$

Умножая (11.3) на массу m отдельной молекулы и деля на Δt, находим ***массовый поток*** сквозь площадку S:

$$\Phi = \frac{1}{6}\frac{Slm}{\Delta t}(n_2 - n_1), \qquad (11.4)$$

т. е. масса вещества, которая за 1 с переносится через площадку S. Изменение концентрации $n_2 - n_1$ молекул можно представить как произведение $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ на расстояние 2δ между выделенными объемами:

$$n_2 - n_1 = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\cdot 2\delta. \qquad (11.5)$$

В уравнении (11.4) заменим Δt согласно (11.2) и $(n_2 - n_1)$ согласно (11.5):

$$\Phi = \frac{1}{6}\frac{Slm\delta}{l\tau}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\cdot 2\delta = \frac{1}{3}S\frac{\delta^2}{\tau}m\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}. \qquad (11.6)$$

Отношение потока к площади S, через которую он переносится, называется плотностью потока:

$$J = \frac{\Phi}{S} = \frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\tau}m\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}. \qquad (11.7)$$

Произведение массы молекулы на их концентрацию есть ***плотность вещества*** (парциальная плотность):

$$\rho = mn;\ m\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}. \qquad (11.8)$$

Учитывая это, имеем из (11.7)

$$J = \frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\tau}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}.$$

Это есть ***уравнение диффузии (уравнение Фика)***, которое обычно записывают в виде:

$$J = -D\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}. \qquad (11.9)$$

Знак «–» показывает, что суммарная плотность потока вещества при диффузии направлена в сторону уменьшения плотности (в сторону, противоположную градиенту плотности), D — ***коэффициент диффузии***, применительно к рассмотренному примеру диффузии в жидкости он равен

$$D = \frac{1}{3}\frac{\delta^2}{\tau}. \qquad (11.10)$$

Как видно из (11.10), единица измерения коэффициента диффузии [м^2/с].

Уравнение диффузии можно записать не только для плотности массового потока $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}\right)$, но и для плотности потока частиц $\left(\frac{1}{\text{м}^2\cdot\text{с}}\right)$ и плотности потока вещества $\left(\frac{\text{моль}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}\right)$, при этом в уравнении (11.9) вместо градиента плотности следует использовать соответственно градиент концентрации $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\text{м}^4}\right)$ или градиент молярной концентрации $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\text{моль}}{\text{м}^4}\right)$:

$$J = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \text{ или } J = -D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}. \qquad (11.11)$$

А. Эйнштейн показал, что коэффициент диффузии пропорционален температуре:

$$D = u_m RT, \text{ или } u_m = \frac{D}{RT}. \qquad (11.12)$$

И поэтому вместо (11.11) имеем

$$J = -u_m RT\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}. \qquad (11.13)$$

В формуле (11.12) и далее u_m — подвижность диффундирующих молекул (частиц), выраженная для моля. Вообще говоря, ***подвижностью диффундирующей частицы*** (молекулы, атома, иона, электрона) u называют коэффициент пропорциональности между скоростью υ частицы и силой f, двигающей частицу, в том случае, когда на частицу не действуют другие силы (например, трение или соударение с другими частицами) и она перемещается равномерно:

$$\upsilon = uf \text{ или } u = \upsilon/f. \qquad \textbf{(11.14)}$$

Как видно из (11.14), единица подвижности 1 м/(с · Н). Величины u_m и u связаны через постоянную Авогадро:

$$u = u_m N_A. \qquad \textbf{(11.15)}$$

Преобразуем уравнение (11.9) применительно к биологической мембране. Будем считать, что концентрация частиц, диффундирующих через мембрану, изменяется в мембране по линейному закону (рис. 11.11). Молярные концентрации частиц внутри и вне клетки соответственно равны c_i и c_0. Молярная концентрация этих же частиц в мембране изменяется от внутренней к наружной ее части соответственно от $c_{мi}$ до $c_{м0}$. Учитывая линейное изменение концентрации молекул, запишем

$$\frac{dc}{dx} = \frac{c_{м0} - c_{мi}}{l}, \qquad \textbf{(11.16)}$$

где l — толщина мембраны, тогда вместо (11.11) имеем

$$Jl = -D(c_{м0} - c_{мi}) = D(c_{мi} - c_{м0}). \qquad \textbf{(11.17)}$$

Практически доступнее определить молярные концентрации частиц не внутри мембраны ($c_{мi}$ и $c_{м0}$), а вне мембраны: в клетке (c_i) и снаружи клетки (c_0). Считают, что отношение граничных значений концентраций в мембране равно отношению концентраций в прилегающих к мембране слоях: $c_{м0}/c_{мi} = c_0/c_i$, откуда

$$\frac{c_{м0}}{c_0} = \frac{c_{мi}}{c_i} = k, \qquad \textbf{(11.18)}$$

где k — коэффициент распределения вещества (частиц) между мембраной и окружающей средой (обычно водная фаза). Из (11.18) следует

$$c_{м0} = kc_0 \text{ и } c_{мi} = kc_i. \qquad \textbf{(11.19)}$$

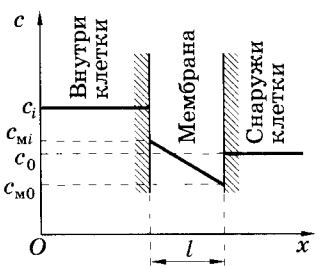


Рис. 11.11

Подставляя (11.19) в (11.17), имеем

$$J = \frac{Dk}{l}(c_i - c_0).$$

Пусть

$$P = Dk/l, \qquad \textbf{(11.20)}$$

где P — ***коэффициент проницаемости***. В результате получаем уравнение для плотности потока вещества при диффузии через биологическую мембрану:

$$J = P(c_i - c_0). \qquad \textbf{(11.21)}$$

§ 11.4. Уравнение Нернста—Планка. Перенос ионов через мембраны

Как известно, на мембране существует разность потенциалов, следовательно, в мембране имеется электрическое поле. Оно оказывает влияние на диффузию заряженных частиц (ионов и электронов). Между напряженностью поля E и градиентом потенциала $d\varphi/dx$ существует известное соотношение (см. § 12.1):

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}. \qquad \textbf{(11.22)}$$

Заряд иона равен Ze. На один ион действует сила $f = -Ze\frac{d\varphi}{dx}$; сила, действующая на 1 моль ионов, равна

$$fN_A = -ZeN_A\frac{d\varphi}{dx} = -ZF\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \textbf{(11.23)}$$

где F — постоянная Фарадея, $F = eN_A$.

Скорость направленного движения ионов пропорциональна действующей силе [см. (11.4), (11.5)]:

$$\upsilon = u_m fN_A = -u_m ZF\frac{d\varphi}{dx}. \qquad \textbf{(11.24)}$$

Чтобы найти поток вещества (ионов), выделим объем электролита (рис. 11.12) в виде прямоугольного параллелепипеда с ребром, численно равным скорости ионов. Все ионы, находящиеся в параллелепипеде, за 1 с пройдут через площадку S. Это и будет поток Ф. Число молей этих ионов

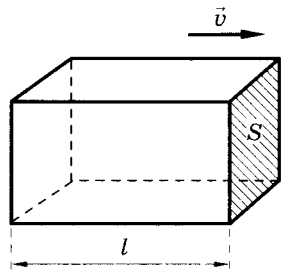


Рис. 11.12

можно найти, умножая объем параллелепипеда (vS) на молярную концентрацию ионов c:

$$\Phi = vSc. \qquad (11.25)$$

Плотность потока вещества найдем, используя формулы (11.24) и (11.25):

$$J = \frac{\Phi}{S} = vc = -u_m ZFc\frac{d\varphi}{dx}. \qquad (11.26)$$

В общем случае перенос ионов определяется двумя факторами: неравномерностью их распределения, т. е. градиентом концентрации [см. (11.11)], и воздействием электрического поля [см. (11.26)]:

$$J = -D\frac{dc}{dx} - u_m ZFc\frac{d\varphi}{dx}. \qquad (11.27)$$

Это ***уравнение Нернста—Планка***. Используя выражение для подвижности (11.12), преобразуем уравнение (11.27) к виду

$$J = -D\frac{dc}{dx} - \frac{D}{RT}ZFc\frac{d\varphi}{dx} = -D\left(\frac{dc}{dx} + \frac{ZFc}{RT}\frac{d\varphi}{dx}\right). \qquad (11.28)$$

Это другая форма записи уравнения Нернста—Планка.

Используем уравнение Нернста—Планка для установления зависимости плотности диффузионного потока от концентрации ионов и от напряженности электрического поля. Предположим, система находится в стационарном состоянии, т. е. плотность потока J постоянна. Электрическое поле в мембране примем за однородное, следовательно, напряженность поля одинакова, а потенциал линейно изменяется с расстоянием. Это позволит считать, что $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_м}{l}$, где $\varphi_м$ — разность потенциалов на мембране. Упростим запись слагаемого в уравнении (11.28):

$$\frac{ZFc}{RT}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{ZFc}{RT}\frac{\varphi_м}{l} = \frac{\psi}{l}c,$$

где

$$\psi = \frac{ZF}{RT}\varphi_м \qquad (11.29)$$

— вспомогательная величина (безразмерный потенциал). С учетом (11.29) получим уравнение Нернста—Планка в виде

$$J = -D\left(\frac{dc}{dx} + \frac{\psi}{l}c\right). \qquad (11.30)$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$dx = -\frac{dc}{J/D + \psi c/l};\ \int_0^l dx = -\int_{c_{мl}}^{c_{м0}}\frac{dc}{J/D + \psi c/l} = \int_{c_{м0}}^{c_{мl}}\frac{dc}{J/D + \psi c/l},$$

$$x = \frac{l}{\psi}\ln(J/D + \psi c/l)\Big|_{c_{м0}}^{c_{мl}},\ l = \frac{l}{\psi}\ln\frac{J/D + \psi c_{мl}/l}{J/D + \psi c_{м0}/l};$$

$$\psi = \ln\frac{\frac{J}{D}(\psi c_{мl}/l)}{\frac{J}{D} + \psi c_{м0}/l}. \qquad (11.31)$$

Потенцируя (11.31), получаем

$$e^{\psi} = \frac{\frac{J}{D}(\psi c_{мl}/l)}{\frac{J}{D} + \psi c_{м0}/l},$$

откуда

$$e^{\psi}\frac{J}{D} + e^{\psi}\frac{\psi}{l}c_{м0} = \frac{J}{D} + \frac{\psi}{l}c_{мl};\ \frac{J}{D}(e^{\psi} - 1) = \frac{\psi}{l}(c_{мl} - e^{\psi}c_{м0}),$$

$$J = \frac{D\psi}{l}\frac{c_{мl} - e^{\psi}c_{м0}}{e^{\psi} - 1}. \qquad (11.32)$$

Преобразуем формулу (11.32), учитывая выражения (11.19) и (11.20):

$$J = \frac{D\psi}{l}\frac{kc_i - e^{\psi}kc_0}{e^{\psi} - 1} = \frac{D\psi k}{l}\frac{c_i - e^{\psi}c_0}{e^{\psi} - 1} = P\psi\frac{c_i - e^{\psi}c_0}{e^{\psi} - 1}. \qquad (11.33)$$

Вообще говоря, формула (11.33) справедлива как для положительных ($Z > 0$, $\psi > 0$), так и для отрицательных ($Z < 0$, $\psi < 0$) ионов. Однако для отрицательных ионов целесообразно видоизменить это выражение, подставив в него отрицательное значение безразмерного потенциала:

$$J_{(-)} = -P\psi\frac{c_i - e^{-\psi}c_0}{e^{-\psi} - 1}.$$

Разделим числитель и знаменатель этого выражения на $e^{-\psi}$:

$$J_{(-)} = -P\psi\frac{c_0 - e^{\psi}c_i}{e^{-\psi} - 1}. \qquad (11.34)$$

При использовании этой формулы необходимо помнить, что отрицательные значения Z и ψ уже учтены в самой формуле, т. е. ψ — положительная величина.

Уравнения (11.33) и (11.34) устанавливают связь плотности стационарного потока ионов с тремя величинами: 1) проницаемостью мембран для данного иона, которая характеризует взаимодействие мембранных структур с ионом; 2) электрическим полем; 3) молярной концентрацией ионов в водном растворе, окружающем мембрану (c_i и c_0).

Проанализируем частные случаи уравнения (11.33):

а) $\psi = 0$, что означает либо $Z = 0$ (нейтральные частицы), либо отсутствие электрического поля в мембране ($\varphi_м = 0$), либо и то, и другое:

$$\lim_{\psi \to 0} J = P \lim_{\psi \to 0} \frac{\psi}{e^{\psi} - 1} \lim_{\psi \to 0} (c_i - e^{\psi} c_0).$$

Найдем пределы отдельных сомножителей.

1. $\lim\limits_{\psi \to 0} \dfrac{\psi}{e^{\psi} - 1} = \dfrac{0}{0}$. Эту неопределенность можно раскрыть по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\psi \to 0} \frac{\psi}{e^{\psi} - 1} = \lim_{\psi \to 0} \frac{1}{e^{\psi}} = 1.$$

2. $\lim\limits_{\psi \to 0} (c_i - e^{\psi} c_0) = c_i - c_0$.

Отсюда получаем, как и следовало ожидать, уравнение (11.21):

$$J = P(c_i - c_0);$$

б) одинаковая молярная концентрация ионов по разные стороны от мембраны ($c_i = c_0 = c$) при наличии электрического поля:

$$J = -P\psi c.$$

Это соответствует электропроводимости в электролите (см. § 12.9). Для нейтральных частиц ($Z = 0$ и $\psi = 0$) $J = 0$;

в) если мембрана непроницаема для частиц ($P = 0$), то, естественно, плотность потока равна нулю.

§ 11.5. Разновидности пассивного переноса молекул и ионов через мембраны

Явления переноса (см.§ 11.3 и §11.4) относятся к ***пассивному транспорту***: диффузия молекул и ионов в направлении их меньшей концентрации, перемещение ионов в соответствии с направлением силы, действующей на них со стороны электрического поля. Пассивный транспорт не связан с затратой химической энергии.

Наиболее общая классификации видов пассивного транспорта веществ через мембрану включает в себя простую диффузию, диффузию через поры и диффузию с переносчиком.

Простая диффузия через липидный бислой подчиняется уравнению Фика для молекул (11.21) или, в более общем случае для нейтральных и заряженных частиц, — уравнению Нернста—Планка (11.28). В живой клетке такая диффузия обеспечивает прохождение кислорода и углекислого газа (см. рис. 11.13, *а*). Ряд жирорастворимых лекарственных веществ и ядов также проникает через липидный бислой по схеме, изображенной на рисунке. Как уже отмечалось в § 11.1, определенная конфигурация липидов способствует диффузии поперек мембраны благодаря перемещению «кинков».

Однако подобная простая диффузия протекает достаточно медленно и не может снабдить клетку в нужном количестве питательными веществами. Поэтому есть иные механизмы пассивного переноса веществ через мембрану, к ним относятся диффузия через канал (пору) и диффузия в комплексе с переносчиком. Два последних варианта называют иногда ***облегченной диффузией*** (рис. 11.13, *б, в*).

Порой или ***каналом*** называют участок мембраны, включающий липидные или белковые молекулы и образующий в мембране проход (см. рис. 11.13, *б*). Этот канал допускает проникновение через мембрану не только малых молекул, например, молекул воды, кислорода, но и более крупных ионов. Диффузия через поры также описывается диффузионными уравнениями, однако нали-

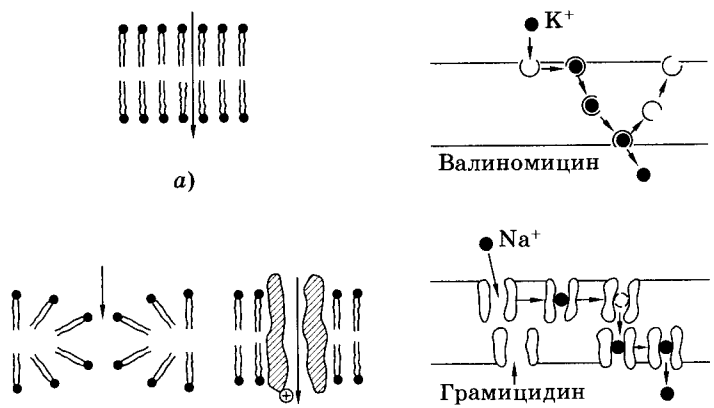


Рис. 11.13

чие пор увеличивает коэффициент проницаемости P. Каналы могут проявлять селективность (избирательность) по отношению к разным ионам, это проявится и в различии проницаемости для разных ионов.

Еще одно «облегчение» диффузии — перенос ионов специальными молекулами-переносчиками (см. рис. 11.13, *в*). При этом переносчик может быть подвижным либо неподвижным. Так, антибиотик валиномицин при связывании с ионом калия образует растворимый в липидах комплекс и проходит через мембрану. Молекулы другого антибиотика, грамицидина, образуют временную цепочку поперек мембраны и «по эстафете» передают переносимое через мембрану вещество (ионы натрия) от одной молекулы переносчика к другой. За способность переносить ионы через мембраны валиномицин, грамицидин и другие переносчики получили название ионофоров.

Следует отметить, что диффузия комплекса переносчика и иона также описывается общим уравнением диффузии, поскольку облегченная диффузия происходит от мест с большей концентрацией диффундирующего вещества к местам с меньшей концентрацией. Вывод о том, что имеет место облегченная диффузия, позволяют сделать некоторые особенности, отличающие ее от простой.

Во-первых, перенос вещества с помощью переносчика любого типа идет с существенно большими скоростями, по сравнению с простой диффузией. Во-вторых, для облегченной диффузии характерно «насыщение», когда с увеличением концентрации данного вещества с одной стороны мембраны плотность его потока становится больше только до определенного предела, зависящего от количества молекул переносчика. Наконец, при облегченной диффузии возможна конкуренция близких по структуре веществ за связывание с молекулой переносчика.

§ 11.6. Активный транспорт. Опыт Уссинга

Наряду с пассивным транспортом в мембранах клетки происходит перенос молекул в область большей концентрации, а ионов — против силы, действующей на них со стороны электрического поля. Такая разновидность переноса поручила название ***активного транспорта***. Если пассивный транспорт может происходить в любых полупроницаемых мембранах, как биологических, так и искусственных, то активный транспорт присущ только биологическим мембранам. Благодаря активному транспорту сохраняется пространственная неоднородность в клетке (отличие внутриклеточной среды от внеклеточного пространства), создаются и поддерживаются градиенты концентраций, электрических потенциалов и т. д. Активный перенос веществ через мембрану осуществляется за счет энергии гидролиза молекул (АТФ).

Существование активного транспорта через биологические мембраны впервые было показано датским ученым Уссингом в опытах с переносом ионов натрия через кожу лягушки, которая имеет более сложную структуру, чем одиночная мембрана. Кожу лягушки можно представить как два последовательно расположенных барьера (*1* и *2* на рис. 11.14). Наружный барьер *1* (мембрана) отличается тем, что он избирательно проницаем для ионов натрия, но не калия. В то же время внутренняя мембрана *2* более проницаема для калия, чем для натрия. Экспериментальная камера Уссинга, изображенная на рис. 11.14, разделена на две части кожей лягушки. На рисунке кожа лягушки располагается между наружным и внутренним раствором: снаружи и изнутри камеры заполнены раствором Рингера, содержащим ионы натрия, калия, кальция и хлора.

В результате пассивного транспорта ионы натрия диффундируют из наружного раствора в кожу. При этом цитоплазма заряжается положительно относительно этого раствора. Ионы калия, проходя из цитоплазмы во внутренний раствор, заряжают ее отрицательно. Таким образом, на коже лягушки между внутренним и внешним барьерами возникает разность потенциалов. В уста-

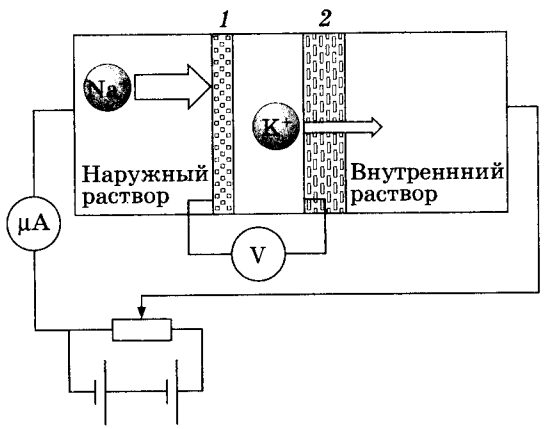


Рис. 11.14

новке имеется блок компенсации напряжения, позволяющий установить разность потенциалов на коже, равную нулю. Это можно контролировать вольтметром. Концентрацию ионов с наружной и внутренней сторон поддерживают одинаковой. Если бы при этих условиях перенос ионов определялся только пассивным транспортом, потоки частиц в обе стороны были бы одинаковыми, а суммарный поток через мембрану был бы равен нулю.

Однако с помощью амперметра был зарегистрирован ток в цепи, проходящий через кожу лягушки. Это свидетельствует о том, что через кожу лягушки происходит односторонний перенос заряженных частиц. Методом меченых атомов было показано, что имеет место движение ионов натрия от наружного раствора к внутреннему. Таким образом, результаты опыта Уссинга показали, что перенос ионов натрия через кожу лягушки не подчиняется законам пассивного транспорта. В этом случае имеет место активный перенос ионов.

Согласно современным представлениям, в биологических мембранах имеются ионные насосы — специальные системы интегральных белков (транспортные АТФазы). Известны четыре вида ионных насосов, три из которых обеспечивают перенос ионов Na^+, K^+, Ca^{2+} и H^+ через мембраны за счет энергии гидролиза АТФ. Механизм переноса протонов при работе дыхательной цепи митохондрий изучен менее всего.

Натрий-калиевый насос работает при условии сопряжения переноса ионов калия и натрия. Это означает, что если во внешней среде нет ионов калия, не будет активного переноса ионов натрия из клетки, и наоборот. Другими словами, ионы натрия активируют натрий-калиевый насос на внутренней поверхности клеточной мембраны, а ионы калия — на внешней.

Натрий-калиевый насос переносит из клетки во внешнюю среду три иона натрия в обмен на перенос двух ионов калия внутрь клетки. Один акт переноса требует затраты энергии одной молекулы АТФ. При этом создается и поддерживается разность потенциалов на мембране, причем внутренняя часть клетки имеет отрицательный заряд.

Надо отметить, что существует также активный перенос сахаров, аминокислот, нуклеотидов, но кинетика этих процессов недостаточно хорошо изучена. Интересно, что до сих пор нет достоверных сведений об активном транспорте анионов, хотя они играют важную роль в жизнедеятельности клеток (в особенности ионы хлора). По-видимому, анионы попадают в клетку путем пассивного переноса.

§ 11.7. Равновесный и стационарный мембранные потенциалы. Потенциал покоя

Опыты Л. Гальвани и А. Вольта во второй половине XVIII в. привели к пониманию того, что функционирование живых тканей сопровождается электрическими явлениями. В настоящее время неоспоримым является тот факт, что генерация и распространение электрических потенциалов — это важнейшее физическое явление в живых клетках и тканях.

Биопотенциалом называют разность электрических потенциалов, образующуюся между двумя точками клеток, тканей и органов в процессе их жизнедеятельности. Биопотенциалы отражают функциональное состояние клеток и тканей. Поэтому их регистрация и анализ являются важным приемом при физиологических исследованиях и в диагностике.

Для понимания природы мембранных потенциалов — электрических потенциалов, образующихся между внутренней и внешней сторонами мембраны, рассмотрим сначала модельную систему, представляющую собой сосуд, разделенный полупроницаемой мембраной (рис. 11.15). Предположим, в левой части сосуда содержатся ионы калия, хлора и какие-либо крупные частицы, например молекулы белка, несущие положительный заряд (раствор *1*). В правой части сосуда находятся только калий и хлор (раствор *2*). Мембрана способна легко пропускать неорганические анионы и катионы, но является непроницаемой для молекул белка. Цифрами указаны относительные концентрации соответствующих ионов, при которых разность потенциалов составит около 10 мВ.

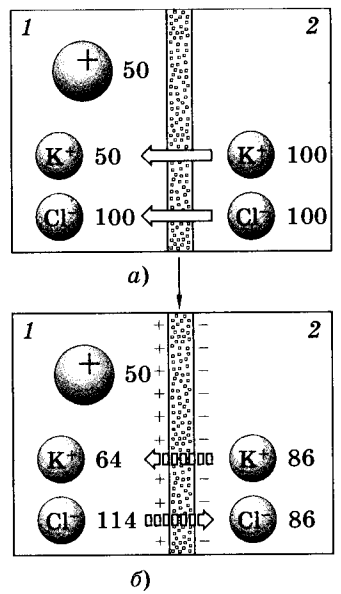


Рис. 11.15

Общее число частиц в растворах одинаково (сохраняется их электронейтральность), однако концентрация ионов калия во втором растворе больше (см. рис. 11.15, *а*). Ионы калия устремятся из раствора *2* в раствор *1*, а вслед за ними пойдут и ионы хлора (для сохранения электронейт-

ральности растворов). При этом концентрация ионов хлора в первом растворе еще больше возрастет. Этот процесс будет продолжаться до установления равновесного состояния (так называемого равновесия Доннана). Между двумя сторонами мембраны образуется разность потенциалов, которая уравновешивает концентрационный градиент ионов, способных к диффузии (на рис. 11.15, *б* потоки соответствующих ионов указаны штриховыми стрелками). Мембранная разность потенциалов рассчитывается по формуле Нернста:

$$\varphi_м = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{[c_2]}{[c_1]}. \qquad (11.35)$$

Здесь c_1 и c_2 — молярные концентрации ионов по обе стороны мембраны, R — универсальная газовая постоянная, T — термодинамическая температура, при которой происходит диффузия, F — постоянная Фарадея, Z — заряд иона. Эту разность потенциалов называют ***равновесным мембранным потенциалом.*** Мембранная теория происхождения биопотенциалов была выдвинута в 1902 г. Б. Бернштейном. Действительно, в живой клетке концентрация ионов калия значительно больше, чем в межклеточной жидкости, и крупные органические молекулы практически не проникают через мембрану. Важным доводом в пользу представлений Бернштейна послужил тот факт, что рассчитанная по формуле Нернста разность потенциалов между наружной и внутренней сторонами мембраны мышечного волокна оказалась близкой к измеренной в опытах с помощью внутриклеточного микроэлектрода.

Однако «калиевая теория» мембранного потенциала оказалась несовершенной, не способной объяснить наблюдаемые впоследствии факты отклонения истинных значений потенциалов на мембранах живых клеток от теоретически рассчитанных. Оказалось, что равновесный мембранный потенциал характерен лишь для мертвых клеток, либо клеток с ослабленным метаболизмом.

В настоящее время общепризнанной теорией, объясняющей возникновение и поддержание потенциала на клеточной мембране в состоянии физиологического покоя, является теория А. Ходжкина. Она была развита и экспериментально обоснована им в 50-х гг. XX в. Сущность ее заключается в том, что потенциал, существующий на мембранах невозбужденных клеток (***потенциал покоя***), обусловлен полупроницаемыми свойствами клеточной мембраны и неравномерным распределением ионов между клеткой и окружающей средой. Это распределение поддерживается механизмами активного переноса, локализованными в самой мембране.

При получении выражения для потенциала покоя важно учитывать знаки ионов, проникающих через мембрану. Это можно сделать, в частности, обозначая знаком плюс плотности потоков положительных ионов и знаком минус — отрицательных. Основной вклад в создание и поддержание потенциала покоя вносят ионы натрия, калия и хлора. Суммарная плотность потока этих ионов с учетом их знаков равна

$$J = J_{Na^+} + J_{K^+} - J_{Cl^-}. \qquad (11.36)$$

Для живой клетки характерно не равновесное распределение веществ, но существование потоков ионов в обе стороны через мембрану. Такое состояние, при котором число различных ионов, проходящих в единицу времени через мембрану внутрь клетки, равно числу выходящих из клетки ионов, называют стационарным. Ясно, что в стационарном состоянии суммарная плотность потока ионов через мембрану равна нулю: $J = 0$.

Для плотности потоков положительных ионов натрия и калия и отрицательных ионов хлора запишем общее выражение на основании (11.33) и (11.34)

$$P_{Na}\psi \frac{[Na^+]_i - e^{\psi}[Na^+]_0}{e^{\psi} - 1} + P_K\psi \frac{[K^+]_i - e^{\psi}[K^+]_0}{e^{\psi} - 1} + P_{Cl}\psi \frac{[Cl^-]_0 - e^{\psi}[Cl^-]_i}{e^{\psi} - 1} = 0. \qquad (11.37)$$

Здесь квадратными скобками $[\ ]_i$ и $[\ ]_0$ обозначены концентрации ионов соответственно внутри и вне клетки. Сократив (11.37) на $\frac{\psi}{e^{\psi} - 1}$, раскрыв выражения и перегруппировав их, получаем

$$P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i + P_{Cl}[Cl^-]_0 = e^{\psi}\{P_{Na}[Na^+]_0 + P_K[K^+]_0 + P_{Cl}[Cl^-]_i\},$$

или

$$e^{\psi} = \frac{P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i + P_{Cl}[Cl^-]_0}{P_{Na}[Na^+]_0 + P_K[K^+]_0 + P_{Cl}[Cl^-]_i}.$$

Логарифмируя это выражение, находим

$$\psi = \ln \frac{P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i + P_{Cl}[Cl^-]_0}{P_{Na}[Na^+]_0 + P_K[K^+]_0 + P_{Cl}[Cl^-]_i}. \qquad (11.38)$$

Если от безразмерного потенциала вернуться к электрическому потенциалу [см. (11.29)], то из (11.38) получаем

$$\varphi_м = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_{Na}[Na^+]_i + P_K[K^+]_i + P_{Cl}[Cl^-]_0}{P_{Na}[Na^+]_0 + P_K[K^+]_0 + P_{Cl}[Cl^-]_i} \qquad (11.39)$$

— ***уравнение Гольдмана—Ходжкина—Катца.***

Различные концентрации ионов внутри и вне клетки созданы ионными насосами — системами активного транспорта. Можно сказать, что потенциал покоя обязан активному переносу.

Для большей наглядности рассмотрим схематично ионные потоки, существующие в состоянии покоя на мембране аксона кальмара (рис. 11.16). На рисунке жирными стрелками указаны потоки ионов, осуществляемые за счет активного транспорта. Пунктиром обозначены стрелки, соответствующие диффузионным потокам за счет градиентов концентрации соответствующих ионов. Обозначены также концентрации ионов натрия, калия и хлора в цитоплазме и окружающей среде.

Известно, что проницаемость мембраны для ионов калия самая высокая. В состоянии покоя соотношение коэффициентов проницаемости для разных ионов равно:

$$P_K : P_{Na} : P_{Cl} = 1 : 0{,}04 : 0{,}45.$$

Вследствие этого диффузия калия и хлора идет в обе стороны. Натрий идет через мембрану за счет простой диффузии лишь в одну сторону — снаружи вовнутрь. Однако Na^+-K^+-АТФаза интенсивно выводит ионы натрия из клетки, а калия — в клетку. Потенциал покоя, рассчитанный по формуле Гольдмана—Ходжкина—Катца, составляет 60 мВ со знаком минус со стороны внутриклеточного пространства.

На основании большого экспериментального материала было установлено, что величина потенциала покоя может существенно

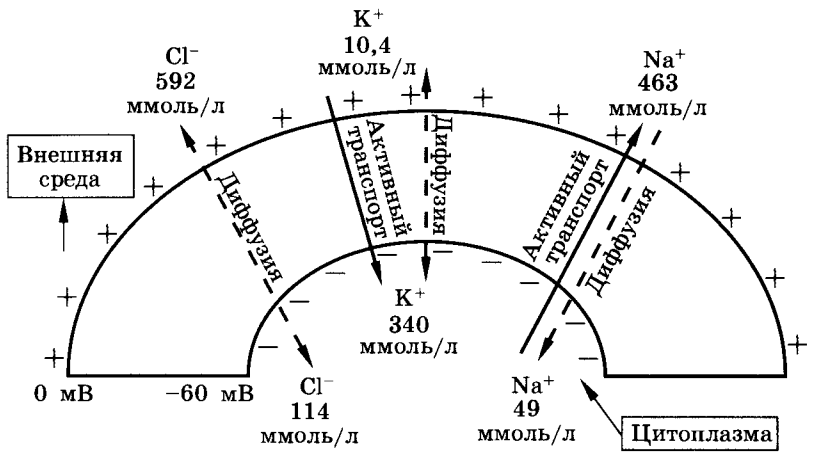


Рис. 11.16

различаться для разных клеток. В таблице 19 приведены данные для различных тканей.

Таблица 19. Потенциал покоя клеточных мембран для различных тканей

Ткань	Потенциал покоя, мВ
Аксон кальмара	60
Нерв лягушки	70
Поперечно-полосатое мышечное волокно лягушки	88
Сердечное мышечное волокно лягушки	70
Сердечное волокно собаки	90
Клетки водорослей	100—120

§ 11.8. Потенциал действия и его распространение

Все живые клетки при действии различных раздражителей (химических, механических, температурных и пр.) способны переходить в возбужденное состояние. Опыт показывает, что возбужденный участок становится электроотрицательным по отношению к покоящемуся, что является показателем перераспределения ионных потоков в возбужденном участке. Реверсия потенциала при возбуждении кратковременна, и после окончания возбуждения через некоторое время вновь восстанавливается исходный потенциал покоя. Общее изменение разности потенциалов на мембране, происходящее при возбуждении клеток, называется ***потенциалом действия***. На рис. 11.17 представлен потенциал действия гигантского аксона кальмара, обозначены отдельные стадии изменения потенциала. В частности, для клетки характерен так называемый ***запаздываю-***

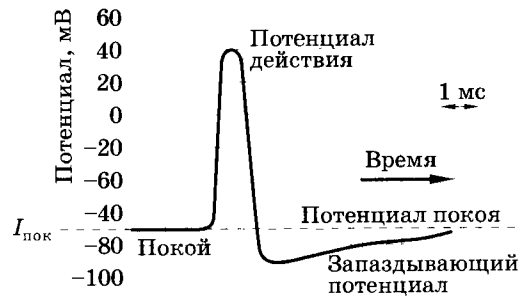


Рис. 11.17

щий потенциал, когда в течение некоторого времени на мембране существует даже меньший потенциал, чем потенциал покоя.

Было показано, что возбуждение связано с увеличением электропроводности клеточной мембраны. При этом временна́я зависимость электропроводимости повторяла форму потенциала действия. Чтобы решить вопрос, для каких ионов изменяется проницаемость мембраны, следует обратить внимание, что потенциал действия приводит к кратковременному возрастанию потенциала внутри клетки (см. рис. 11.17). Отрицательный относительно внешней среды потенциал становится положительным. Если по уравнению Нернста (11.38) вычислить равновесные потенциалы на мембране аксона кальмара, то получим соответственно для ионов K^+, Na^+ и Cl^- величины −90, +46 и −29 мВ. Так как при изменении проницаемости мембраны для какого-либо иона этот ион будет проникать через нее, стремясь создать равновесное состояние, то числовые данные показывают, что внутрь клетки проникают ионы Na^+, создавая там положительный потенциал. Следовательно, при возбуждении клетки в начальный период увеличивается проницаемость мембран именно для ионов натрия. «Натриевая теория» возникновения потенциала действия была предложена, разработана и экспериментально подтверждена А. Ходжкином и А. Хаксли, за что в 1963 г. они были удостоены Нобелевской премии.

Измерить проницаемость мембран для какого-либо иона (иначе говоря, электропроводимость или сопротивление мембраны для этого иона) можно, если на основании закона Ома найти отношение тока к напряжению, или наоборот. Практическая реализация такой задачи осложняется тем, что проницаемость (электрическое сопротивление) мембраны при возбуждении изменяется со временем. Это приводит к перераспределению электрического напряжения в цепи, и разность потенциалов на мембране изменяется. Ходжкин, Хаксли и Катц смогли создать опыт с фиксацией определенного значения разности потенциала на мембране. Это позволило им провести измерение ионных токов и, следовательно, проницаемости (сопротивления) мембран для ионов. Оказалось, что отношение проницаемостей мембраны для ионов натрия и калия практически повторяет форму потенциала действия. Кроме того, были получены кривые временно́й зависимости ионных токов через мембрану (рис. 11.18). На этом рисунке кривая *1* соответствует временно́й зависи-

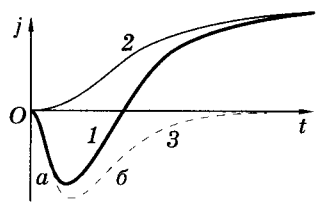


Рис. 11.18

мости суммарного ионного тока через мембрану гигантского аксона кальмара, полученного при изменении потенциала на мембране до +56 мВ (потенциал покоя равен −60 мВ). Вначале направление тока отрицательно, что соответствует прохождению положительных ионов через мембрану клетки. Было установлено, что ток этот обусловлен прохождением ионов натрия внутрь клетки, где концентрация их значительно меньше, чем снаружи.

Естественно, что при таком нарушении равновесия ионы калия начнут перемещаться наружу, где их концентрация существенно меньше. Для того чтобы выяснить, какая часть тока «натриевая», а какая «калиевая», можно провести то же возбуждение, но в искусственных условиях, когда в среде, окружающей аксон, нет натрия. В этом случае (см. кривую *2*) ток обусловливается только выходом ионов калия наружу из клетки. Разница значений тока для двух кривых показана на кривой *3*: кривая *3* есть разность кривых *1* и *2*. Она дает зависимость от времени ионного тока натрия. На этой кривой часть *а* соответствует открыванию натриевых каналов, а *б* — их закрытию (инактивации).

В целом последовательность событий, происходящих на клеточной мембране при возбуждении, выглядит следующим образом. При возбуждении в мембране открываются каналы для ионов натрия (проницаемость мембраны возрастает более чем в 5000 раз). В результате отрицательный заряд с внутренней стороны мембраны становится положительным, что соответствует пику мембранного потенциала (фаза деполяризации мембраны). Затем поступление натрия из внешней среды прекращается. В это время натриевые каналы закрываются, но открываются калиевые. Калий проходит в соответствии с градиентом концентрации из клетки до тех пор, пока не восстановится первоначальный отрицательный заряд на мембране и мембранный потенциал не достигнет своего первоначального значения (фаза реполяризации). На самом деле выход ионов калия из клетки продолжается дольше, чем это требуется для восстановления потенциала покоя. В результате за пиком потенциала действия следует небольшой минимум (запаздывающий потенциал).

Ионные каналы имеют белковое происхождение (см. рис. 11.3 и 11.13). Они селективно (выборочно) пропускают ионы разного вида. Канал может быть «закрыт» (блокирован) молекулами ядов, его пропускная способность зависит от действия некоторых лекарственных средств. Поэтому теория ионных каналов в мембранах является важной частью молекулярной фармакологии.

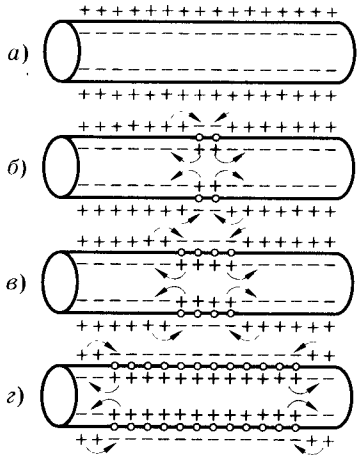


Рис. 11.19

Механизм распространения потенциала действия в деталях рассматривается в курсе нормальной физиологии. Мы же рассмотрим лишь некоторые основные положения. Распространение потенциала действия вдоль нервного волокна (аксона) обусловлено возникновением так называемых *локальных токов*, образующихся между возбужденным и невозбужденным участками клетки. На рис. 11.19 схематично указаны отдельные стадии возникновения и распространения потенциала действия. В состоянии покоя (рис. 11.19, *а*) внешняя поверхность клеточной мембраны имеет положительный потенциал, а внутренняя — отрицательный. В момент возбуждения полярность мембраны меняется на противоположную (рис. 11.19, *б*). В результате этого между возбужденным и невозбужденным участками мембраны возникает разность потенциалов. Наличие разности потенциалов и приводит к появлению между этими участками *локальных токов*. На поверхности клетки локальный ток течет от невозбужденного участка к возбужденному; внутри клетки он течет в обратном направлении (рис. 11.19, *в*). Локальный ток, как и любой электрический ток, раздражает соседние невозбужденные участки и вызывает увеличение проницаемости мембраны. Это приводит к возникновению потенциалов действия в соседних участках. В то же время в ранее возбужденном участке происходят восстановительные процессы реполяризации. Вновь возбужденный участок в свою очередь становится электроотрицательным и возникающий локальный ток раздражает следующий за ним участок. Этот процесс многократно повторяется и обусловливает распространение импульсов возбуждения по всей длине клетки в обоих направлениях (рис. 11.19, *г*). В нервной системе импульсы проходят лишь в определенном направлении из-за наличия синапсов, обладающих односторонней проводимостью.

По электрическим свойствам аксон напоминает кабель с проводящей сердцевиной и изолирующей оболочкой. Однако для того чтобы в кабеле не было значительных потерь энергии при протекании тока, сопротивление его должно быть малым, а сопротивление изоляции — очень большим. В аксоне проводящим веществом служит аксоплазма, т. е. раствор электролита, удельное

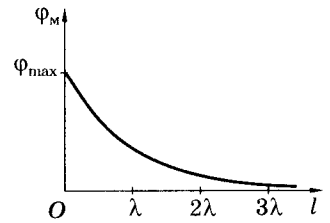


Рис. 11.20

сопротивление которого в миллионы раз больше, чем у меди или алюминия, из которых изготавливают обычные кабели. Удельное сопротивление биомембран достаточно велико, но вследствие их малой толщины сопротивление изоляции «аксонного кабеля» в сотни тысяч раз меньше, чем у технического кабеля. По этой причине однородное нервное волокно не может проводить электрический сигнал на далекое расстояние, интенсивность сигнала быстро затухает. Расчеты показывают, что напряжение на мембране волокна будет экспоненциально уменьшаться по мере удаления от места возбуждения (рис. 11.20). Если величина потенциала действия в месте возбуждения была равна φ_{max}, то на расстоянии l от этого места потенциал на мембране будет равен:

$$\varphi_м = \varphi_{max} e^{-\frac{l}{\lambda}}, \qquad (11.40)$$

где λ — *постоянная длины* нервного волокна, которая определяет степень затухания сигнала в аксоне по экспоненциальному закону. Эту величину можно рассчитать по следующей приближенной формуле:

$$\lambda = \sqrt{\frac{dR}{4\rho}}, \qquad (11.41)$$

где d — диаметр волокна, R — поверхностное сопротивление мембраны в Ом · м^2 (т. е. сопротивление 1 м^2 ее поверхности) и ρ — удельное сопротивление аксоплазмы в Ом · м.

Расчеты, проведенные для аксона кальмара, показывают, что на конце аксона величина сигнала должна быть ничтожно малой. Однако существование локальных токов приводит к тому, что возбуждение передается по нервному волокну без затухания. Это объясняется тем, что локальные токи лишь деполяризуют мембрану до критического уровня, а потенциалы действия в каждом участке мембраны поддерживаются независимыми ионными потоками, перпендикулярными к направлению распространения возбуждения.

Из (11.40) видно, что с увеличением λ степень затухания сигнала уменьшается. Было показано, что при этом возрастает скорость проведения импульса, а это очень важно для жизнедеятельности любого организма. Величины λ и ρ примерно одинаковы для всех животных клеток, и поэтому увеличения *постоянной*

длины λ можно добиться путем увеличения диаметра d аксона. Именно поэтому у кальмаров аксоны достигают «гигантских» размеров (диаметр до 0,5 мм), что обеспечивает кальмару достаточно быстрое проведение нервного импульса и, следовательно, быстроту реакции на внешние раздражители.

У высокоорганизованных животных с развитой нервной системой толстые волокна оказываются неэкономичными, и затухание сигнала предотвращается другим способом. Мембраны аксонов у них покрыты *миелином* — веществом, содержащим много холестерина и мало белка (рис. 11.21). Удельное сопротивление миелина значительно выше удельного сопротивления других биологических мембран. Помимо этого, толщина миелиновой оболочки во много раз больше толщины обычной мембраны, что приводит к возрастанию диаметра волокна и соответственно величины λ. Как видно из рис. 11.21, миелиновая оболочка не полностью покрывает все волокно; оно разделено на отдельные сегменты, между которыми на участках длиной около 1 мкм мембрана аксона непосредственно соприкасается с внеклеточным раствором. Области, в которых мембрана контактирует с раствором, называют перехватами Ранвье. В связи с большим сопротивлением миелиновой оболочки по поверхности аксона токи протекать не могут, и затухание сигнала резко уменьшается. При возбуждении одного узла возникают токи между ним и другими узлами. Ток, подошедший к другому узлу, возбуждает его, вызывает появление в этом месте потенциала действия, и процесс распространяется по всему волокну. Затраты энергии на распространение сигнала по волокну, покрытому миелином, значительно меньше, чем по немиелинизированному, так как общее количество ионов натрия, проходящих через мембрану в области узлов, значительно меньше, чем если бы они проходили через всю поверхность мембраны. При некоторых заболеваниях структура миелиновых оболочек нарушается, и это приводит к нарушению проведения нервного возбуждения. При блокировании узлов нервного волокна анестезирующими средствами, например ядом кураре, сопротивление аксона возрастает и прохождение сигналов по нерву замедляется или совсем прекращается.

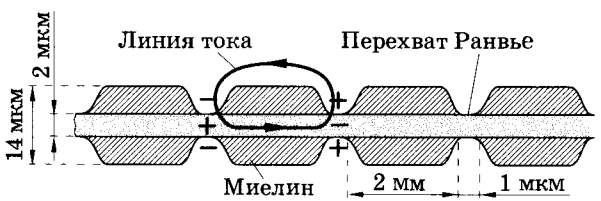


Рис. 11.21

Поскольку узлы замыкаются через аксоплазму и внеклеточную среду, то можно предположить, что при увеличении сопротивления внешней среды скорость проведения нервного импульса уменьшится. Это предположение было проверено на опыте. Нервные волокна сначала помещали в морскую воду, а затем в масло с большим удельным сопротивлением. Скорость проведения импульса во втором случае уменьшалась в 1,5—2 раза (в зависимости от диаметра волокна).

Существует некоторая формальная аналогия между распространением потенциала действия по нервному волокну и электромагнитной волной в двухпроводной линии или коаксиальном кабеле. Однако между этими процессами имеется существенное различие. Электромагнитная волна, распространяясь в среде, ослабевает, так как растрачивает свою энергию. Волна возбуждения, проходящая по нервному волокну, не затухает, получая энергию в самой среде (энергию заряженной мембраны). Волны, получающие энергию из среды в процессе распространения, называют ***автоволнами***, а среду — ***активно-возбудимой средой*** (АВС). В § 11.9 будут рассмотрены более подробно свойства автоволн, распространяющихся в АВС.

§ 11.9. Активно-возбудимые среды. Автоволновые процессы в сердечной мышце

Понятие об автоволнах. Остановимся более подробно на понятии «автоволны». ***Автоволной*** называется процесс распространения возбуждения в АВС. Автоволны, в отличие от других видов волн (механических, электромагнитных), не переносят с собой энергию, а используют энергию АВС. При этом АВС состоит из огромного числа отдельных элементов, каждый из которых обладает собственным источником энергии и может находиться в одном из трех состояний: покой, рефрактерность или возбуждение. Элемент, находящийся в покое, может возбудиться при взаимодействии с соседними элементами. Если же элемент АВС уже возбужден, то соседние элементы не могут дополнительно возбуждать его. Состояние рефрактерности (невозбудимости) характерно тем, что элемент нельзя возбудить обычным стимулом, в то же время он находится в невозбужденном состоянии и сам не способен возбудить соседние элементы среды.

Наглядным примером автоволны является процесс распространения пожара в степи. Пламя распространяется по сухой траве (области с определенным запасом энергии). При этом каждый покоящийся элемент среды (сухая травинка) зажигается от предыдущего (находящегося в возбуждении). Фронт волны (линия огня) идет вперед, оставляя за собой элементы в состоянии рефрактерности (сгоревшую траву). Через некоторое время элементы среды приходят в состояние покоя (вырастает новая трава и высыхает). Известно, что хорошим способом борьбы со степным пожаром является поджигание травы во встречном направлении (инициация встречной автоволны). При этом пожар в степи гаснет, поскольку за фронтом каждой волны располагается зона рефрактерности, в которой энергия АВС полностью израсходована.

Таким образом, автоволнам не свойственна интерференция и дифракция, они взаимно уничтожают друг друга при встрече (аннигилируют). Кроме того, автоволны не отражаются от границы раздела сред. Автоволна, распространяющаяся в АВС, сохраняет свои характеристики за счет энергии среды.

В живом организме многие важные функции осуществляются посредством автоволновых процессов. Так, нервные и мышечные волокна являются средами с распределенными источниками энергии. При этом в каждой точке, до которой доходит возбуждение, вновь генерируется потенциал действия. Таким образом, автоволны постоянно распространяются по клеткам скелетной мускулатуры, мочевого пузыря, кровеносных сосудов, в миокарде и т. д.

Сердечная мышца как пример АВС. Процессы проведения возбуждения в сердечной мышце (миокарде) можно моделировать на тканевом уровне с использованием понятия АВС. Мышечные волокна миокарда имеют клеточное строение. Энергообеспечение клеток миокарда (миоцитов) осуществляется в результате последовательного протекания процессов, связанных с выработкой АТФ, транспортом энергии от мест образования к местам использования и реализацией сокращения миокарда, а также поддержания ионных градиентов на клеточных мембранах.

Хотя структурная организация миоцитов неоднородна, сердечную мышцу с некоторым приближением можно представить как однородную проводящую АВС. В настоящее время имеется огромное количество экспериментальных и теоретических данных, позволяющих модифицировать ионную теорию возбуждения Ходжкина и Хаксли в применении к миокарду.

На рис. 11.22 представлен потенциал действия миоцита, где обозначены все фазы возбудимости клетки миокарда. В отличие от нервной клетки, потенциал действия миоцита состоит из очень быстрой фазы деполяризации (*1*), реполяризации — плато (*2*) и фазы быстрой реполяризации (*3*). Длительность потенциала действия составляет для разных клеток миокарда 250—300 мс. Потенциал действия миоцитов формируется ионными потоками, характер которых не вполне соответствует теории Ходжкина—Хаксли (см. § 11.8). Быстрая деполяризация обусловлена идущими в клетку ионами натрия. Последующее формирование плато потенциала действия связано, в основном, с переносом ионов кальция. В этой фазе работают кальциевые и калиевые каналы. Процесс реполяризации, за счет которого существенно возрастает длительность потенциала действия клеток миокарда, обусловлен двумя причинами. Во-первых, возникает выходящий из клетки поток ионов калия (аналогично нервным клеткам). Во-вторых, уменьшается поток входящих ионов кальция.

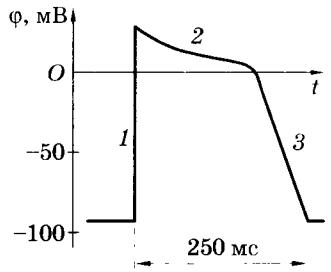


Рис. 11.22

Одним из важных свойств сердца является ритмичность его деятельности. Она обеспечивается согласованной работой функциональных узлов сердца — особых скоплений нервных и мышечных клеток. Появление аритмии считают наиболее опасным видом сердечных патологий. Не случайно поэтому моделирование процессов распространения возбуждения по миокарду с помощью представлений об АВС оказалось столь важным и интересным для использования в клинике.

Тау-модель распространения возбуждения в сердечной мышце. Распространение возбуждения в миокарде обусловливает последовательность сокращения разных отделов сердца. Аномалии проведения возбуждения являются важной причиной нарушения ритма сердца. В 1964 г. американцами Винером и Розенблютом была предложена математическая модель, объясняющая аномалии проведения возбуждения в миокарде. Позднее ее стали называть ***тау-моделью***. Авторы вводят теоретическую модель возбудимой ткани. При этом основными допущениями тау-модели являются следующие:

1) изменение потенциала действия миоцита аппроксимируется линейной функцией;

2) каждая клетка может находиться в одном из трех состояний — покоя, возбуждения, рефрактерности. При этом возбуждение наступает в том случае, если потенциал на мембране клетки превышает некоторое значение, называемое пороговым ($\varphi > \varphi_{пор}$). Если же потенциал φ больше потенциала покоя, но меньше порогового, $\varphi_{пок} < \varphi < \varphi_{пор}$, то клетка невозбудима (находится в рефрактерном состоянии);

3) возбуждение распространяется от одной точки среды к другой с постоянной скоростью v.

Анализируя эти допущения тау-модели, легко понять, что авторы фактически представляют миокард как АВС, в которой могут распространяться автоволны возбуждения. Изобразим такую волну возбуждения в двумерной системе координат $\varphi = f(x)$ (рис. 11.23). Здесь x — координата, вдоль которой распространяется автоволна, φ — потенциал на мембране миоцита. Участок τv представляет фронт волны и соответствует совокупности клеток, находящихся в возбужденном состоянии. За ней следует «рефрактерный хвост» $(R - \tau)v$, в области которого клетки находятся в состоянии рефрактерности. Величина λ представляет собой длину волны возбуждения. Винером было введено следующее соотношение:

$$\lambda = Rv.$$

Из этой формулы следует, что при сохранении постоянства скорости распространения волны возбуждения v увеличение периода рефрактерности R приводит к возрастанию величины λ. Если в среде есть участки с разной рефрактерностью, то длины волн возбуждения в них различаются. Для большей наглядности волну возбуждения схематически часто изображают в виде двух участков (рис. 11.24), соответствующих фронту волны (участок *1*) и рефрактерному «хвосту» (участок *2*).

Предложенная тау-модель позволила авторам объяснить механизм возникновения различных аномалий проведения возбуждения в сердечной мышце, в частности циркуляцию возбуждения и трепетание предсердий.

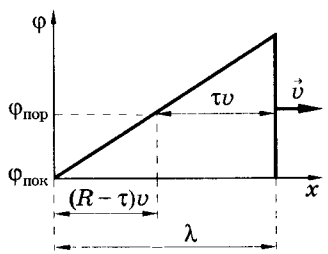


Рис. 11.23

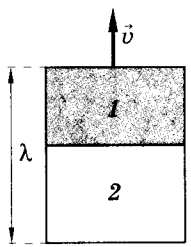
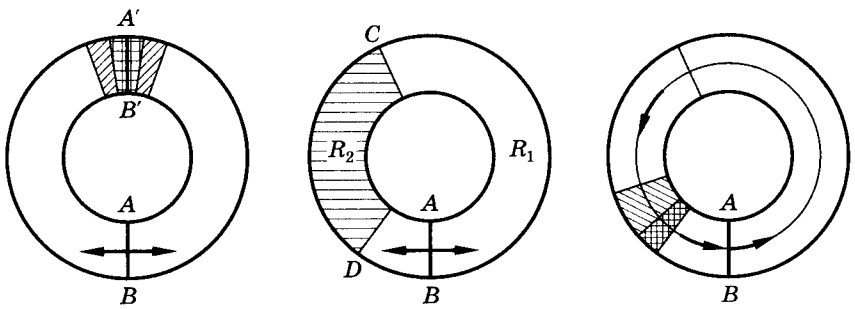


Рис. 11.24

Особенности распространения автоволн в кольце. Одной из причин нарушения ритма сердца может быть образование в миокарде замкнутого пути, по которому циркулирует волна возбуждения. Образование такой волны можно смоделировать в некотором гипотетическом кольце (рис. 11.25). Если кольцо однородно по рефрактерности (рис. 11.25, *а*), то две волны возбуждения, идущие по кольцу от источника возбуждения (линия AB), аннигилируют при встрече на линии $A'B'$. Вторичное возбуждение снова приводит к образованию автоволн, распространяющихся с одинаковой скоростью в противоположных направлениях. Процесс этот повторяется многократно, ритм следования волн возбуждения в кольце не нарушается.

Иная картина имеет место, если в кольце есть некий участок CD, элементы которого имеют период рефрактерности R_2 больший, чем период рефрактерности R_1 остальных элементов кольца. При определенных условиях в этом случае может возникнуть непрерывно бегущая по кольцу (циркулирующая) автоволна.

Первая автоволна, идущая от линии AB, как и в предыдущем случае, аннигилирует на линии $A'B'$. Предположим, что через некоторое время после прохождения первой волны возбуждения возникает вторая волна (рис. 11.25, *б*). Если это время меньше периода рефрактерности R_2, вторая волна слева дойдет до участка CD, когда его элементы все еще находятся в рефрактерном состоянии и не могут возбудиться. Следовательно, вторая волна возбуждения, идущая слева, затухает, и остается лишь волна, идущая справа. Если она доходит до участка CD, когда его элементы при-



а) *б*) *в*)

Рис. 11.25

дут в состояние покоя, волна проходит этот участок, и далее в кольце возникает незатухающий процесс — циркуляция волны возбуждения (рис. 11.25, *в*). Процесс будет продолжаться до тех пор, пока не израсходуется энергия среды.

Трансформация ритма на неоднородном по рефрактерности прямолинейном участке ABC. Иной характер аномалии проведения возбуждения в миокарде имеет место, если рассматривать значительный по площади прямолинейный участок сердечной мышцы. Рассмотрим прямолинейный участок миокарда, состоящий из областей с разной рефрактерностью (рис. 11.26).

Пусть рефрактерность выделенного участка ABC больше, чем период рефрактерности среды ($R_2 > R_1$). Первая волна возбуждения проходит беспрепятственно вдоль обоих участков с разной рефрактерностью (см. рис. 11.26, *а*). Если период следования волн возбуждения меньше, чем период рефрактерности R_2, то вторая волна уже не может возбудить эту область ABC. Фронт второй автоволны доходит до участка с рефрактерностью R_2 и разрывается (рис. 11.26, *б*). Таким образом, в среде с рефрактерностью R_1 обе волны возбуждения (первая и вторая) проходят беспрепятственно, а в участке с R_2 возникает аритмия.

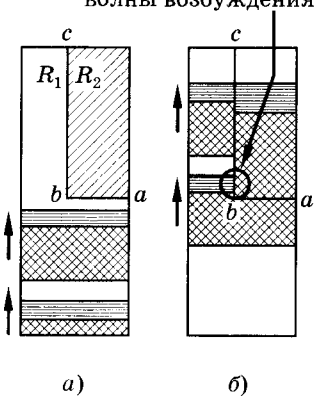


Рис. 11.26

Подобная ситуация трансформации ритма может иметь место реально в сердечной мышце, когда период рефрактерности отдельных участков миокарда увеличивается из-за омертвения ткани при инфаркте. В этом случае возрастает вероятность возникновения аритмии.

Ревербератор. Свойства ревербератора. На протяженном участке миокарда может располагаться несколько участков с повышенной рефрактерностью, при этом границы участков могут быть не прямолинейными. При распространении волн возбуждения в этом случае возникают спиральные автоволны — реверберато-ры. Рассмотрим механизм образования ревербератора на криволинейной границе *AB* раздела двух областей с разной рефрактерностью (рис. 11.27).

Пусть клетки миокарда слева от границы *AB* имеют период рефрактерности R_1, а справа — R_2, причем $R_2 > R_1$. Первая волна

возбуждения распространяется в обеих зонах с одинаковой скоростью (согласно представлениям Винера). Однако справа от границы *AB* клетки дольше пребывают в рефрактерном состоянии. Поэтому вторая волна, посланная вслед за первой через время $T < R_2$, не проходит в правую область (рис. 11.27, *а*). Возникает трансформация ритма, аналогично рассмотренному ранее варианту. Из-за криволинейности границы вторая волна начинает отставать от первой (вследствие того, что первая волна распространяется по прямой, а вторая волна — по криволинейной траектории), и чем меньше радиус кривизны линии *AB*, тем больше это отставание.

Наконец, в некоторый момент времени фронт второй волны может дойти до клеток с R_2, уже находящихся в состоянии покоя (см. рис. 11.27, *б*). Поскольку возбуждение распространяется во все стороны с одинаковой скоростью, вторая волна начинает проходить по обеим зонам с рефрактерностью R_1 и R_2, закручиваясь в виде спирали (рис. 11.27, *в*, *г*). Так возникает ревербератор. Укажем некоторые основные свойства реверберато-ров.

Во-первых, реверберато-ры размножаются на границах раздела участков миокарда с различной рефрактерностью. Причиной их возникновения является разрыв фронта волны возбуждения.

Во-вторых, время жизни реверберато-ра конечно, оно определяется числом оборотов спирали n, которое зависит от R_1, R_2 и τ:

$$n = 1 + \frac{\tau}{R_2 - R_1}.$$

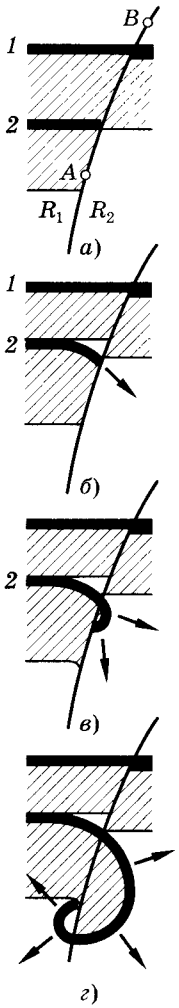


Рис. 11.27

При этом чем больше различие периодов рефрактерности участков *ABC* ($R_2 - R_1$), тем меньше времени живет реверберато-р.

В-третьих, поскольку период следования импульсов возбуждения в миокарде пропорционален времени рефрактерности, он различен для разных участков. Иными словами, спиральные волны от реверберато-ров не синхронизированы.

В принципе при нормальной работе сердца возникновение реверберато-ров практически неизбежно (вследствие реальной неодно-

родности ткани миокарда). Однако в норме число гибнущих реверберераторов превышает число образующихся. Если же скорость возникновения реверберераторов превышает скорость их гибели, весь миокард покрывается не синхронизируемыми спиральными волнами. Возникает цепная реакция образования реверберераторов. Считают, что именно она лежит в основе механизма возникновения фибрилляции сердца. Это явление хорошо известно врачам и физиологам. Оно состоит в том, что вместо ритмических, согласованных сокращений в сердце возникают беспорядочные возбуждения, лишенные какой-либо периодичности. Фибрилляция желудочков сердца полностью нарушает его гемодинамические функции и через несколько минут приводит к смерти. Фибрилляция предсердий не столь катастрофична (она может длиться годами), но все же представляет собой тяжелое заболевание. Определенную связь с фибрилляцией имеют и другие, менее радикальные, нарушения сердечной деятельности — различные виды аритмии. Устраняют фибрилляцию сильным электрическим разрядом, после которого синусный узел берет на себя роль единого «водителя ритма».

Для возникновения цепной реакции размножения реверберераторов необходимо, чтобы число образующихся реверберераторов было больше некоторого критического значения $K_{кр}$, что зависит от массы миокарда. Критическая масса миокарда — это та наименьшая масса, в которой может развиваться цепной процесс размножения реверберераторов. Эта масса не должна быть слишком малой, иначе фибрилляция не возникнет. Подтверждением этого является то, что у мелких животных (крыс, морских свинок и пр.) с малой массой сердечной мышцы не наблюдается процесса фибрилляции. В то же время у человека масса миокарда превышает критическую. Поэтому вероятность возникновения фибрилляции увеличивается при образовании в миокарде участков с различной рефрактерностью (вследствие ишемии, инфаркта и пр.).

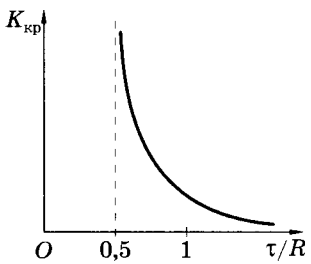


Рис. 11.28

Было показано, что величина $K_{кр}$ зависит от соотношения времен τ и R. Математический анализ модели образования реверберераторов дает следующую зависимость между указанными величинами:

$$K_{кр} \approx \frac{\tau/R}{2\tau/R - 1} = \frac{1}{2 - R/\tau}.$$

На рис. 11.28 представлена графически зависимость $K_{кр}$ от соотношения времен τ и R. Как видно, чем меньше τ/R, тем большее количество реверберераторов должно возникнуть в миокарде для развития цепной реакции. Иными словами, при уменьшении отношения τ/R уменьшается вероятность возникновения неконтролируемой цепной реакции размножения реверберераторов. Если $\tau/R < 0{,}5$, для возникновения фибрилляции необходимо возникновение теоретически бесконечно большого количества спиральных волн в сердечной мышце.

Основные положения теории возникновения цепной реакции размножения реверберераторов нашли практическое применение при подборе в клинике антиаритмиков — фармакологических препаратов, снижающих риск возникновения аритмии у пациента. При этом учитывают измеряемый электрофизиологическими методами период возникновения ответа на подаваемый к миокарду импульс (эта величина непосредственно связана с τ). Было обнаружено, в частности, что хинин и новокаинамид влияют на отношение τ/R, увеличивая R, в то время как препарат этмозин уменьшает величину τ.

Таким образом, теория автоволновых процессов оказалась полезной для решения прикладных медицинских задач. В частности, было показано, что эпилепсия является неконтролируемым автоволновым процессом, возникающим в коре головного мозга.

РАЗДЕЛ

4

Электродинамика

Электрические и магнитные явления связаны с особой формой существования материи — электрическими и магнитными полями и их взаимодействием. Эти поля в общем случае настолько взаимозависимы, что принято говорить о едином электромагнитном поле.

Электромагнитные явления имеют три направления медико-биологических приложений.

Первое из них — понимание электрических процессов, происходящих в организме, а также электрических и магнитных характеристик биологических сред. К этому направлению относятся физические основы электрокардиографии, магнитобиологии и реографии, а также изучение электропроводимости биологических тканей и жидкостей и др.

Второе направление связано с пониманием механизма воздействия электромагнитных полей на организм. Это воздействие может выступать как лечебный, производственный или климатический фактор.

Третье направление — приборное, аппаратурное. Электродинамика является теоретической основой электроники, и в частности медицинской электроники. В этом отношении значение электродинамики для медицины усиливается еще и потому, что многие неэлектрические параметры биологических систем, например температуру, стремятся преобразовать в электрический сигнал для удобства измерения и регистрации.

ГЛАВА 12

Электрическое поле

Электрическое поле есть разновидность материи, посредством которой осуществляется силовое воздействие на электрические заряды, находящиеся в этом поле. Характеристики электрического поля, которое генерируется биологическими структурами, являются источником информации о состоянии организма.

§ 12.1. Напряженность и потенциал — характеристики электрического поля

Силовой характеристикой электрического поля является напряженность, равная отношению силы, действующей в данной точке поля на точечный заряд, к этому заряду

$$\vec{E} = \vec{F}/q. \qquad (12.1)$$

Напряженность — вектор, направление которого совпадает с направлением силы, действующей в данной точке поля на положительный точечный заряд.

Напряженность электрического поля в произвольных точках аналитически задается следующими тремя уравнениями:

$$E_x = f_1(x, y, z);\ E_y = f_2(x, y, z);\ E_z = f_3(x, y, z), \qquad (12.2)$$

где E_x, E_y и E_z — проекции вектора напряженности на соответствующие координатные оси, введенные для описания поля. Электрическое поле графически удобно представлять ***силовыми линиями,*** касательные к которым совпадают с направлением вектора напряженности в соответствующих точках поля.

Обычно эти линии проводят с такой густотой, чтобы число линий, проходящих сквозь единичную площадку, перпендикулярную им, было пропорционально значению напряженности электрического поля в месте расположения площадки.

Представим себе, что заряд q перемещается в электрическом поле по траектории *1-а-2* (рис. 12.1). Силы поля при этом совершают работу, которую можно выразить через напряженность [см. (12.1)]:

$$A = \int_1^2 E_l q \mathrm{d}l = q \int_1^2 E_l \mathrm{d}l, \qquad (12.3)$$

где $\mathrm{d}l$ — элементарное перемещение; E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление $\mathrm{d}\vec{l}$. Покажем, что **работа сил электростатического поля (электрического поля неподвижных зарядов) не зависит от траектории, по которой перемещается заряд в этом поле. *Поля, обладающие таким свойством, называют потенциальными.***

Пусть заряд q переместился по замкнутой траектории *1-а-2-б-1* (рис. 12.1). Так как поле электростатическое, то положение зарядов, создающих поле, при этом не изменилось, и потенциальная энергия, зависящая от их взаимного положения, осталась прежней. Поэтому **работа сил электростатического поля по перемещению заряда по замкнутой траектории равна нулю**[1]:

$$A = q\oint E_l \mathrm{d}l = q\int_1^2 E_l \mathrm{d}l + q\int_2^1 E_l \mathrm{d}l = 0. \qquad (12.4)$$

(по *а*) (по *б*)

Так как силы, действующие на заряд q, определяются его положением в поле, то выражения для работ сил поля при перемещении заряда по одной и той же траектории в противоположных направлениях отличаются только знаком:

$$q\int_2^1 E_l \mathrm{d}l = -q\int_1^2 E_l \mathrm{d}l.$$

(по *б*) (по *б*)

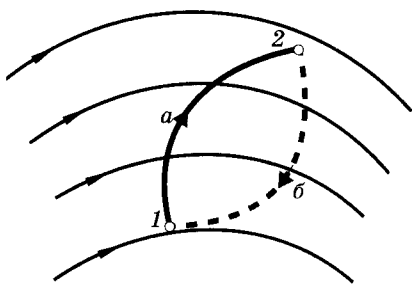


Рис. 12.1

Подстановка этого выражения в (12.4) дает

$$q\int_1^2 E_l \mathrm{d}l = q\int_1^2 E_l \mathrm{d}l. \qquad (12.5)$$

(по *а*) (по *б*)

Равенство (12.5) означает, что работа сил электростатического поля не зависит от траектории заряда, а зависит от величины заряда, положения начальной и конечной точек траектории и от напряженности поля.

[1] Предполагается, что потери на излучение ничтожно малы.

На основании этого свойства вводят понятие разности потенциалов $\Delta\varphi$, которая для электростатического поля равна напряжению U.

Разностью потенциалов между точками поля называют отношение работы, совершаемой силами поля при перемещении точечного положительного заряда из одной точки поля в другую, к этому заряду:

$$U_{12} = \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q} = \frac{q\int_1^2 E_l \mathrm{d}l}{q} = \int_1^2 E_l \mathrm{d}l, \qquad (12.6)$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы в точках *1* и *2* электрического поля, U_{12} — напряжение между этими точками. Разность потенциалов между двумя точками зависит от положения выбранных точек и от напряженности электрического поля, как следует из (12.6).

Наряду с разностью потенциалов в качестве характеристики электрического поля используют понятие ***потенциала***. Однако для данной точки поля оно имеет однозначный смысл только в том случае, если задан потенциал какой-либо произвольной точки поля. На практике принято считать, что потенциал проводников, соединенных с землей, или потенциал шасси, на котором смонтировано радиоустройство (и в том и в другом случаях говорят о заземлении), равны нулю. В теоретических задачах обычно считают равным нулю потенциал бесконечно удаленных точек.

Вычислим **потенциал поля точечного заряда**, расположенного в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 12.2). Пусть точки *1* и *2* находятся на одной силовой линии на расстояниях соответственно r_1 и r_2 от источника поля — заряда Q. Проинтегрируем выражение (12.6) по отрезку *1—2*, учитывая, что в соответствии с законом Кулона (для точечного заряда) $E_l = E = Q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2)$ и $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}, \qquad (12.7)$$

где $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная[1].

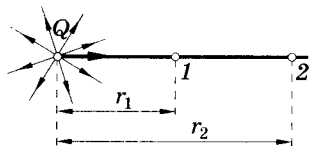


Рис. 12.2

[1] Размерность электрической постоянной ε_0 выражается также в виде $\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$, что следует из закона Кулона.

Предположим, что потенциал в бесконечно удаленной точке равен нулю: $\varphi_2 \to 0$ при $r_2 \to \infty$. Тогда из (12.7) получаем

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1},$$

или в более общем виде

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \qquad (12.8)$$

Могли быть и другие предположения относительно значения потенциала в бесконечно удаленной точке, однако сделанное выше допущение привело к наиболее простому выражению (12.8), по которому обычно и вычисляют потенциал поля точечного заряда.

Потенциалы электрического поля в различных точках наглядно можно представить в виде ***поверхностей одинакового потенциала (эквипотенциальных поверхностей)***. Обычно проводят эквипотенциальные поверхности, отличающиеся от соседних на одно и то же значение потенциала. На рис. 12.3 изображены эквипотенциальные поверхности[1] (штриховые линии) и силовые линии (сплошные) поля двух разноименных одинаковых точечных зарядов.

Аналитически зависимость электрического потенциала от координат в разных точках поля задается некоторой функцией координат

$$\varphi = f(x, y, z), \qquad (12.9)$$

которая в частных случаях может иметь, например, вид (12.8).

Так как напряженность электрического поля определяется через силу, а потенциал — через работу сил поля, то эти характеристики связаны между собой аналогично силе и работе. Интегральная зависимость напряженности поля и потенциала дается формулой (12.6) или выражением

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E_l \mathrm{d}l. \qquad (12.10)$$

Здесь с учетом знака «−» изменены пределы интегрирования: верхнему пределу интеграла соответствует в левой части уменьшаемое φ_2, нижнему — вычитаемое φ_1.

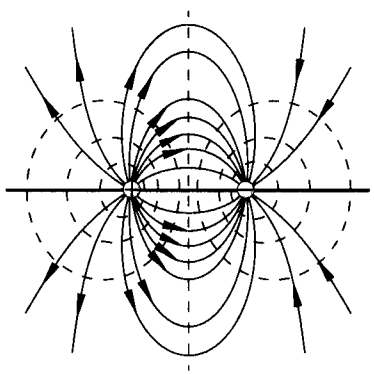


Рис. 12.3

[1] В плоскости рисунка эквипотенциальные поверхности изображаются эквипотенциальными линиями.

Получим дифференциальную связь между E и φ. Предположим, что точки *2* и *1* расположены сколь угодно близко, тогда из (12.10) получим

$$\mathrm{d}\varphi = -E_l \mathrm{d}l, \text{ или } E_l = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}l. \qquad (12.11)$$

Производная от потенциала по направлению $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}l$ характеризует отношение приращения потенциала $\mathrm{d}\varphi$ к соответствующему расстоянию $\mathrm{d}l$ в некотором направлении l; E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на это направление.

Смысл формулы (12.11) виден из рис. 12.4. В точке 0 проведен вектор $\vec{E}$, который спроецирован на направления l_1, l_2 и l_3. Эти проекции по модулю равны производным от потенциала по соответствующим направлениям: $|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}l_1|$, $|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}l_2|$, $|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}l_3|$. Наибольшее изменение потенциала, приходящееся на единицу длины, происходит вдоль прямой, совпадающей с $\vec{E}$; знак «минус» в (12.11) означает, что потенциал быстрее всего *убывает* в направлении $\vec{E}$ и быстрее всего *возрастает* в направлении $-E$. Можно сказать, что вектор $\vec{E}$ равен взятому с обратным знаком градиенту потенциала:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi}^{1}. \qquad (12.12)$$

В направлении, перпендикулярном силовой линии, имеем

$$E_l = 0 \to \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}l = 0 \to \varphi = \mathrm{const}. \qquad (12.13)$$

Из этого следует, что **силовые линии и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны.** Если поле однородно, например поле плоского конденсатора, то из формулы (12.6) находим, что для двух точек, расположенных на одной силовой линии на расстоянии l,

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l = U_{12}/l. \qquad (12.14)$$

Учитывая (12.11) и (12.9), можно записать проекции вектора напряженности электрического поля по трем координатным осям:

$$E_x = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x,\ E_y = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}y,$$
$$E_z = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}z. \qquad (12.15)$$

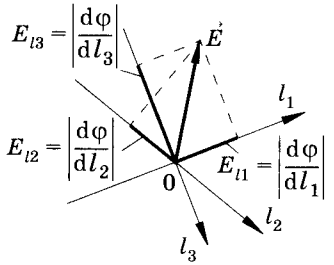


Рис. 12.4

[1] Градиент потенциала — вектор, модуль которого равен производной от функции $\varphi = f(x, y, z)$ (см. 12.9), взятой по направлению нормали к эквипотенциальной поверхности.

Тогда напряженность определяют по формуле

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}. \qquad (12.16)$$

Если поле создано N точечными зарядами, то напряженность в некоторой точке можно вычислить как векторную сумму напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом отдельно (принцип суперпозиции):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \qquad (12.17)$$

а электрический потенциал в этой точке — как алгебраическую сумму потенциалов от каждого заряда, предполагая, что потенциал бесконечно удаленных точек равен нулю:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_i}. \qquad (12.18)$$

Существующие электроизмерительные приборы рассчитаны на измерение разности потенциалов, а не напряженности. Ее можно найти из этих измерений, используя связь $\vec{E}$ и φ.

§ 12.2. Электрический диполь

Электрическим диполем (диполем) называют систему, состоящую из двух равных, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга (плечо диполя).

Основной характеристикой диполя (рис. 12.5) является его ***электрический момент (дипольный момент)*** — вектор, равный произведению заряда на плечо диполя l, направленный от отрицательного заряда к положительному:

$$\vec{p} = q\vec{l}. \qquad (12.19)$$

Единицей электрического момента диполя является *кулон-метр*.

Поместим диполь в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ (рис. 12.6).

На каждый из зарядов диполя действуют силы $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ и $\vec{F}_- = -q\vec{E}$, эти силы равны по модулю, противоположно направлены и создают момент пары сил. Как видно из рисунка, он равен

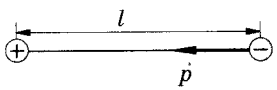


Рис. 12.5

$$M = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha, \qquad (12.20)$$

или в векторной форме

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \qquad (12.21)$$

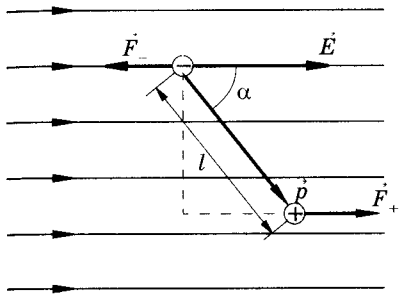


Рис. 12.6

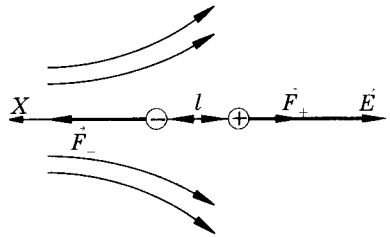


Рис. 12.7

Таким образом, **на диполь в однородном электрическом поле действует момент силы, зависящий от электрического момента и ориентации диполя, а также напряженности поля.**

Рассмотрим теперь диполь в неоднородном электрическом поле. Предположим, что диполь расположен вдоль силовой линии (рис. 12.7). На него действуют силы

$$\vec{F}_+ = qE_+ \text{ и } F_- = -qE_-,$$

где E_+ и E_- — напряженности поля соответственно в месте нахождения положительного и отрицательного зарядов (на рис. 12.7 $E_- > E_+$). Значение равнодействующей этих сил

$$F = F_- - F_+ = qE_- - qE_+ = q(E_- - E_+). \qquad (12.22)$$

Введем отношение $(E_- - E_+)/l$, характеризующее среднее изменение напряженности, приходящееся на единицу длины плеча диполя. Так как обычно плечо невелико, то приближенно можно считать

$$(E_- - E_+)/l = \mathrm{d}E/\mathrm{d}x, \qquad (12.23)$$

где $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ — производная от напряженности электрического поля по направлению оси OX, являющаяся мерой неоднородности электрического поля вдоль соответствующего направления. Из (12.23) следует, что

$$E_- - E_+ = l\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x},$$

тогда формулу (12.22) можно представить в виде

$$F = ql\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}. \qquad (12.24)$$

Итак, на диполь действует сила, зависящая от его электрического момента и степени неоднородности поля $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$. Если диполь ориентирован в неоднородном электрическом поле не вдоль силовой линии, то на него дополнительно действует еще и момент силы. Таким образом, свободный диполь ориентируется вдоль силовых линий и втягивается в область бóльших значений напряженности поля.

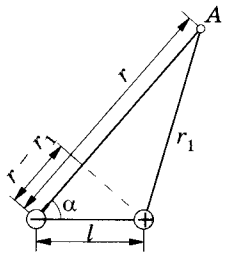


Рис. 12.8

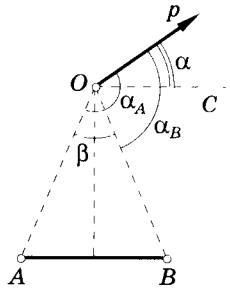


Рис. 12.9

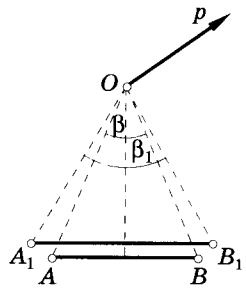


Рис. 12.10

До сих пор рассматривался диполь, помещенный в электрическое поле, однако сам диполь также является источником поля. На основании (12.18) запишем выражение для электрического потенциала поля, созданного диполем, в некоторой точке A, удаленной от зарядов соответственно на расстояния r и r_1 (рис. 12.8):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{r - r_1}{rr_1}. \qquad \textbf{(12.25)}$$

Обычно предполагают, что $l \ll r$, $l \ll r_1$; тогда $r \approx r_1$ и

$$rr_1 \approx r^2,\ r - r_1 \approx l\cos\alpha, \qquad \textbf{(12.26)}$$

где α — угол между вектором $\vec{p}$ и направлением от диполя на точку A (рис. 12.8). Используя (12.26), из (12.25) получаем

$$\varphi = \frac{ql\cos\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{p\cos\alpha}{r^2}. \qquad \textbf{(12.27)}$$

Рассмотрим некоторые приложения формулы (12.27).

Пусть диполь, электрический момент которого равен p, находится в точке O (рис. 12.9), а его плечо мало. Используя (12.27), запишем разность потенциалов двух точек поля A и B, равноотстоящих от диполя (углы α_A и α_B показаны на рис. 12.9):

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}(\cos\alpha_B - \cos\alpha_A). \qquad \textbf{(12.28)}$$

Угол между $\vec{p}$ и прямой AB или OC обозначим α, $\angle AOB = \beta$, углы $\alpha_A = \alpha + \beta/2 + \pi/2$, $\alpha_B = \alpha - \beta/2 + \pi/2$.

Учитывая эти равенства, выполним тригонометрические преобразования:

$$\cos\alpha_B - \cos\alpha_A = -2\sin\frac{2\alpha+\pi}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha. \qquad \textbf{(12.29)}$$

Подставляя (12.29) в (12.28), имеем

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}2\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha = \frac{\sin(\beta/2)}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}p\cos\alpha. \qquad \textbf{(12.30)}$$

Как видно из (12.30), разность потенциалов двух точек поля диполя, равноотстоящих от него (при данных ε и r), зависит от синуса половинного угла, под которым видны эти точки от диполя (рис. 12.10), и проекции

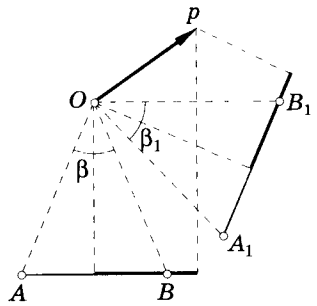


Рис. 12.11

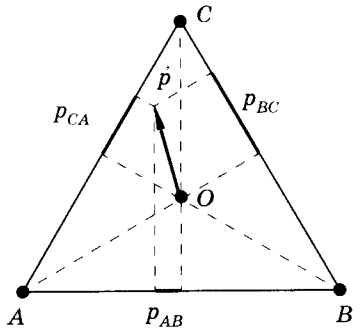


Рис. 12.12

электрического момента диполя $p\cos\alpha$ на прямую, соединяющую эти точки (рис. 12.11). Эти замечания справедливы в рамках тех ограничений, которые были сделаны при выводе формулы (12.27).

Пусть диполь, создающий электрическое поле, находится в центре равностороннего треугольника ABC (рис. 12.12). Тогда на основании (12.30) можно получить, что напряжения на сторонах этого треугольника относятся как проекции вектора $\vec{p}$ на его стороны:

$$U_{AB} : U_{BC} : U_{CA} = p_{AB} : p_{BC} : p_{CA}. \qquad \textbf{(12.31)}$$

§ 12.3. Понятие о мультиполе

Диполь является частным случаем системы электрических зарядов, обладающей определенной симметрией. Можно указать еще примеры симметричных систем зарядов (рис. 12.13). Общее название подобных распределений зарядов — ***электрические мультиполи.***

Они бывают разных порядков ($l = 0, 1, 2$ и т. д.), число зарядов мультиполя определяется выражением 2^l. Так, *мультиполем нулевого порядка* ($2^0 = 1$) является одиночный ***точечный заряд*** (рис. 12.13, *а*), *мультиполем первого порядка* ($2^1 = 2$) — ***диполь***, *мультиполем второго порядка* ($2^2 = 4$) — ***квадруполь*** (рис. 12.13, *б*), *мультиполем третьего порядка* ($2^3 = 8$) — ***октуполь*** (рис. 12.13, *в*) и т. д.

Потенциал поля мультиполя убывает на значительных расстояниях r от него пропорционально $1/r^{l+1}$. Так, для заряда ($l = 0$) $\varphi \sim 1/r$, диполя ($l = 1$) $\varphi \sim 1/r^2$, для квадруполя ($l = 2$) $\varphi \sim 1/r^3$ и т. д.

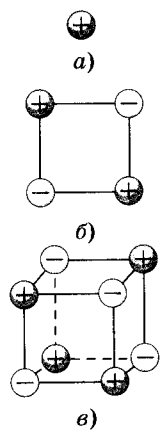


Рис. 12.13

Если заряд распределен в некоторой области пространства, то потенциал электрического поля в любой точке A вне системы зарядов можно представить в виде некоторого приближенного ряда:

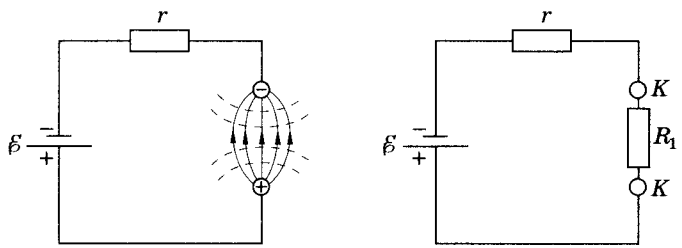
$$\varphi = \frac{f_1}{r} + \frac{f_2}{r^2} + \frac{f_3}{r^3} \ldots . \qquad (12.32)$$

Здесь r расстояние от системы зарядов до точки A с потенциалом φ; $f_1, f_2, f_3, \ldots$ — некоторые функции, зависящие от вида мультиполя, его зарядов и от направления на точку A. Первое слагаемое (12.32) соответствует монополю, второе — диполю, третье — квадруполю и т. д. В случае нейтральной системы зарядов первое слагаемое равно нулю. Если r так велико, что можно пренебречь всеми членами ряда, начиная с третьего, тогда из (12.32) получаем потенциал поля диполя [см. (12.27)].

§ 12.4. Дипольный электрический генератор (токовый диполь)

В вакууме или в идеальном изоляторе электрический диполь может сохраняться сколь угодно долго. Однако в реальной ситуации (электропроводящая среда) под действием электрического поля диполя возникает движение свободных зарядов и диполь либо экранируется, либо нейтрализуется.

Можно к диполю подключить источник напряжения, иными словами, клеммы источника напряжения представить как диполь. В этом случае, несмотря на наличие тока в проводящей среде, диполь будет сохраняться (рис. 12.14, *а*). Резистор R_1 является эквивалентом сопротивления проводящей среды, $\mathcal{E}$ — ЭДС источника, r — его внутреннее сопротивление (рис. 12.14, *б*).



а) *б*)

Рис. 12.14

На основании закона Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1},$$

если $r \gg R_1$, то $I = \mathcal{E}/r$.

Можно заключить, что в этом случае сила тока во внешней цепи будет оставаться почти постоянной, она почти не зависит от свойств среды (при условии $r \gg R_1$). Такая двухполюсная система, состоящая из истока и стока тока, называется ***дипольным электрическим генератором*** или ***токовым диполем***.

Между дипольным электрическим генератором и электрическим диполем имеется большая аналогия, которая основывается на общей аналогии электрического поля в проводящей среде и электростатического поля.

Проиллюстрируем эту аналогию на примере плоского конденсатора.

Пусть между пластинами плоского конденсатора находится среда с удельным электрическим сопротивлением ρ или, иначе, с удельной электрической проводимостью γ ($\gamma = 1/\rho$). Сопротивление между пластинами конденсатора, как для проводника с сечением S и длиной l, равно

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S}.$$

Электрическая проводимость равна

$$G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{S}{l}. \qquad (12.33)$$

Если сравнить (12.33) с выражением для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{l}, \qquad (12.34)$$

то можно заключить: формула (12.33) для проводимости получается из формулы (12.34) для емкости заменой произведения $\varepsilon\varepsilon_0$ на γ.

Суть аналогии электрического поля в проводящей среде и электростатического поля сводится к следующему:

— линии тока (электрическое поле в проводящей среде) совпадают с линиями напряженности электростатического поля при одинаковой форме электродов;

— в том и другом случаях многие формулы имеют тождественный вид, переход от одних формул к другим осуществляется заменой $\varepsilon\varepsilon_0$ на γ, q на I, C на G (или $1/C$ на R). Закон Ома $G = I/U$ аналогичен формуле $C = q/U$.

Воспользуемся этой аналогией и получим выражение для токового диполя. Аналогично электрическому моменту диполя введем дипольный момент дипольного электрического генератора:

$$p_т = Il,$$

где l — расстояние между точками истока и стока тока. Потенциал поля дипольного электрического генератора выражается формулой, аналогичной (12.27):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{p_т \cos\alpha}{r^2} \qquad (12.35)$$

(в безграничной среде). Конфигурации линий напряженности электростатического поля электрического диполя и линий напряженности электрического поля токового диполя (они же совпадают и с линиями тока) одинаковы (см. рис. 12.3). В соответствии с изложенным в § 12.3 можно ввести и понятие мультипольного электрического генератора.

По существу, электрический мультипольный генератор — это некоторая пространственная совокупность электрических токов (совокупность истоков и стоков различных токов).

Все, что было сказано выше о потенциалах полей системы зарядов (электростатическое поле), справедливо и для такого генератора (токового мультиполя) в слабо проводящей среде.

§ 12.5. Физические основы электрокардиографии

Живые ткани являются источником электрических потенциалов (биопотенциалов).

Регистрация биопотенциалов тканей и органов с диагностической (исследовательской) целью получила название ***электрографии***. Такой общий термин употребляется сравнительно редко, более распространены конкретные названия соответствующих диагностических методов: ***электрокардиография*** (ЭКГ) — регистрация биопотенциалов, возникающих в сердечной мышце при ее возбуждении, ***электромиография*** — метод регистрации биоэлектрической активности мышц, ***электроэнцефалография*** (ЭЭГ) — метод регистрации биоэлектрической активности головного мозга и др.

В большинстве случаев биопотенциалы снимаются электродами не непосредственно с органа (сердце, головной мозг), а с других, соседних тканей, в которых электрические поля этим органом создаются. В клиническом отношении это существенно упрощает саму процедуру регистрации, делая ее безопасной и несложной.

Физический подход к электрографии заключается в создании (выборе) модели электрического генератора, которая соответствует картине «снимаемых» потенциалов. В связи с этим здесь возникают две фундаментальные теоретические задачи: расчет потенциала в области измерения по заданным характеристикам электрического генератора (модели) — прямая задача, расчет характеристик электрического генератора по измеренному потенциалу — обратная задача.

Дальнейшие конкретные рассмотрения физических вопросов электрографии сделаны на примере электрокардиографии.

Одной из основных задач теоретической электрокардиографии является вычисление распределения трансмембранного потенциала клеток сердечных мышц по потенциалам, измеренным вне сердца. Однако даже чисто теоретически такую задачу решить невозможно, так как одно и то же «внешнее» проявление биопотенциалов сердца будет при разном «внутреннем» их распределении.

Физический (биофизический) подход к выяснению связи между биопотенциалами сердца и их внешним проявлением заключается в моделировании источников этих биопотенциалов.

Все сердце в электрическом отношении представляется как некоторый эквивалентный электрический генератор либо чисто умозрительно (гипотетически), либо в виде реального устройства как совокупность электрических источников в проводнике, имеющем форму человеческого тела. На поверхности проводника при функционировании эквивалентного электрического генератора будет электрическое напряжение, которое в процессе сердечной деятельности возникает на поверхности тела человека. Предполагают, что среда, окружающая сердце, безгранична и однородна с удельной электрической проводимостью γ.

В этом случае для потенциала в некоторой точке можно записать формулу, аналогичную (12.32). При больших значениях r в рамках тех допущений, которые были сделаны в § 12.3, и в этом случае можно ограничиться дипольным приближением и использовать формулу (12.35) для потенциала поля диполя.

Это означает, что в мультипольном эквивалентном генераторе сердца основная часть в потенциал на поверхности тела человека вносится его дипольной составляющей. Иначе говоря, моделировать электрическую деятельность сердца вполне допустимо, если использовать дипольный эквивалентный электрический генератор. При условии ограниченности (конечности) окружающей среды можно прийти к выражению, которое будет отличаться от (12.32) только некоторым множителем.

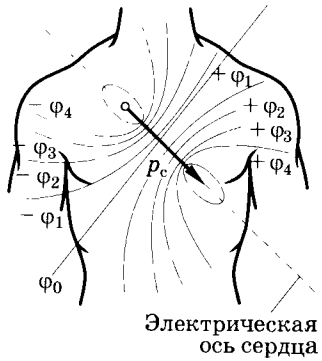


Рис. 12.15

Дипольное представление о сердце лежит в основе ***теории отведений Эйнтховена.*** Согласно ей, ***сердце есть диполь с дипольным моментом*** p_c[1], *который поворачивается, изменяет свое положение и точку приложения* (изменением точки приложения этого вектора часто пренебрегают) *за время сердечного цикла.*

На рис. 12.15 показаны положения вектора $\vec{p}_c$ и эквипотенциальных линий для момента времени, когда дипольный момент максимален; это соответствует «зубцу» R на электрокардиограмме (см. рис. 12.17).

В табл. 20 приведены значения максимального дипольного момента сердца для человека и некоторых животных, они сопоставляются с массами сердца и тела.

Таблица 20

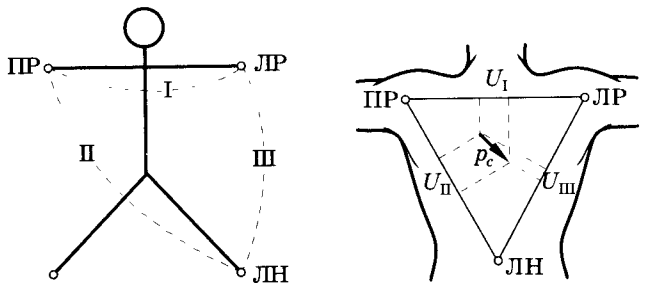
Объект	Масса сердца, г	Масса тела, кг	Максимальный дипольный момент сердца, мА · см
Лягушка	0,16	0,036	0,005
Крыса	1,10	0,277	0,107
Собака	108	14,2	1,63
Человек	300	71,5	2,32
Лошадь	3060	419	13,0

В. Эйнтховен предложил снимать разности биопотенциалов сердца между вершинами равностороннего треугольника, которые приближенно расположены в правой руке (ПР), левой руке (ЛР) и левой ноге (ЛН) (рис. 12.16, *а*). На рис. 12.16, *б* схематически изображен этот треугольник.

По терминологии физиологов, разность биопотенциалов, регистрируемая между двумя точками тела, называют ***отведением.***

Различают I отведение (правая рука — левая рука), II отведение (правая рука — левая нога) и III отведение (левая рука — левая нога), соответствующие разностям потенциалов U_I, U_{II} и U_{III}. По Эйнтховену, сердце расположено в центре треугольника. Отведения позволяют определить по формуле (12.31) соотношение между проекциями электрического момента сердца на стороны треугольника.

[1] В медико-биологической литературе используют термин «вектор электродвижущей силы сердца».



а) *б*)

Рис. 12.16

Так как электрический момент диполя — сердца — изменяется со временем, то в отведениях будут получены временны́е зависимости напряжения, которые и называют ***электрокардиограммами.***

На рис. 12.17 показана нормальная электрокардиограмма человека в одном из отведений.

Электрокардиограмма не дает представления о пространственной ориентации вектора $\vec{p}_c$. Однако для диагностических целей такая информация важна. В связи с этим применяют метод пространственного исследования электрического поля сердца, называемый *вектор-кардиографией.*

Вектор-кардиограмма — геометрическое место точек, соответствующих концу вектора $\vec{p}_c$, ***положение которого изменяется за время сердечного цикла.***

Проекция вектор-кардиограммы на плоскость, например на фронтальную, может быть практически получена сложением напряжений двух взаимно перпендикулярных отведений. На рис. 12.18 показано такое сложение с использованием электронного осциллографа, на экране которого наблюдается кривая B. По форме этой кривой делают диагностические выводы.

Большую работу по моделированию электрической активности сердца проделал Л. И. Титомир.

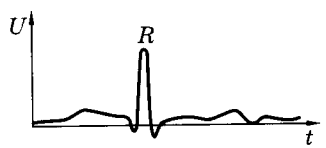


Рис. 12.17

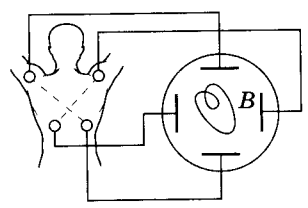


Рис. 12.18

§ 12.6. Диэлектрики в электрическом поле

Диэлектриками называют тела, не проводящие электрического тока.

Термин «диэлектрик» введен М. Фарадеем для обозначения веществ, через которые проникают электрические поля, в отличие от металлов, внутри которых электростатического поля нет. К диэлектрикам относят твердые тела, такие, как эбонит, фарфор, а также жидкости (например, чистая вода) и газы.

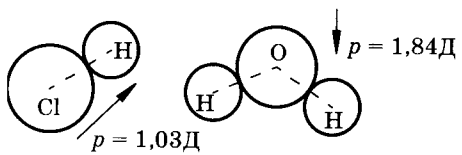
При изменении внешних условий (нагревание, воздействие ионизирующих излучений и т. п.) диэлектрик может проводить электрический ток. Изменение состояния диэлектрика при помещении в электрическое поле можно объяснить его молекулярным строением. Условно выделим три класса диэлектриков: 1) ***полярные***; 2) ***неполярные***; 3) ***кристаллические.***

К первому классу принадлежат такие вещества, как вода, нитробензол и др. Молекулы этих диэлектриков не симметричны, «центры масс» их положительных и отрицательных зарядов не совпадают, поэтому такие молекулы обладают электрическим дипольным моментом даже в случае, когда электрического поля нет.

На рис. 12.19 схематически показаны молекулы соляной кислоты (*а*) и воды (*б*) и соответствующие им дипольные моменты в дебаях[1].

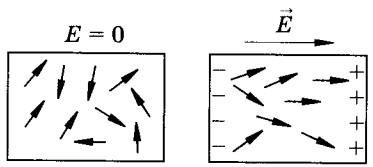
В отсутствие электрического поля дипольные моменты молекул ориентированы хаотически (рис. 12.20, *а*) и векторная сумма моментов всех N молекул равна нулю: $\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = 0$.

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, то дипольные моменты молекул стремятся ориентироваться вдоль поля (рис. 12.20, *б*), однако полной ориентации не будет вследствие молекулярно-теплового хаотического движения. В этом случае $\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \neq 0$.



а) *б)*

Рис. 12.19



а) *б)*

Рис. 12.20

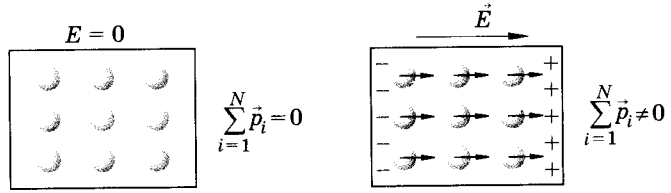
[1] Дебай (Д) — внесистемная единица дипольного момента молекул: 1Д = 3,33564 · 10^{-30} Кл · м.

Ко второму классу диэлектриков относят такие вещества (например, водород, кислород и др.), молекулы которых в отсутствие электрического поля не имеют дипольных моментов. В таких молекулах заряды электронов и ядер расположены так, что «центры масс» положительных и отрицательных зарядов совпадают. Если неполярную молекулу поместить в электрическое поле, то разноименные заряды несколько сместятся в противоположные стороны и молекула будет иметь дипольный момент. На рис. 12.21 схематически в виде кружков показаны молекулы такого диэлектрика в отсутствие поля $\sum_i \vec{p}_i = 0$ (*а*) и при наложении поля $\sum_i \vec{p}_i \neq 0$ (*б*) (стрелки у кружков означают дипольные моменты молекул).

Третий класс — кристаллические диэлектрики (например, NaCl), решетка которых состоит из положительных и отрицательных ионов. Такой диэлектрик можно схематически рассматривать как совокупность двух «подрешеток», одна из которых заряжена положительно, другая — отрицательно. При отсутствии поля подрешетки расположены симметрично и суммарный электрический момент такого диэлектрика равен нулю[1]. Если диэлектрик поместить в электрическое поле, то подрешетки немного сместятся в противоположные стороны и диэлектрик приобретет электрический момент.

Все эти процессы, происходящие в разных диэлектриках при наложении электрического поля, объединяют общим термином *поляризация*, т. е. приобретение диэлектриком дипольного момента.

Для первого класса диэлектриков характерна *ориентационная* поляризация, для второго — *электронная*, т. е. смещение главным образом электронных оболочек, для третьего — *ионная*. Такая классификация условна, так как в реальном диэлектрике могут одновременно существовать все виды поляризации.



а) *б)*

Рис. 12.21

[1] Строго говоря, ионные кристаллы могут обладать электрическим моментом и при отсутствии внешнего поля, однако здесь это не учтено.

Изменение напряженности электрического поля, в котором находится диэлектрик, будет влиять на состояние его поляризации. Охарактеризовать степень поляризации диэлектрика суммарным электрическим моментом всех его N молекул $\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right)$ нельзя, так как эта величина зависит, в частности, от объема диэлектрика. Для оценки состояния поляризации диэлектрика вводят величину, называемую ***поляризованностью,*** среднее значение которой равно отношению суммарного электрического момента элемента объема V диэлектрика к этому объему:

$$\vec{P}_e = \sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{p}_i}{V}. \qquad (12.36)$$

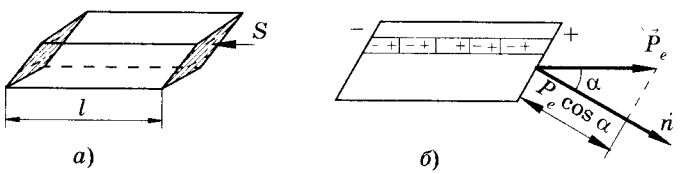
Единицей поляризованности является *кулон на квадратный метр* (Кл/м^2).

При поляризации диэлектрика на одной его поверхности (грани) создаются положительные заряды, а на другой — отрицательные (см. рис. 12.20, *б* и 12.21, *б*). Эти электрические заряды называют *связанными,* так как они принадлежат молекулам диэлектрика (или кристаллической решетке при ионной поляризации) и не могут перемещаться в отрыве от молекул или быть удалены с поверхности диэлектрика в отличие от свободных зарядов, которых в идеальном диэлектрике нет.

При возрастании напряженности электрического поля растет степень упорядоченности ориентации молекул (ориентационная поляризация), увеличиваются дипольные моменты молекул (электронная поляризация), а также происходит большее смещение «подрешеток» (ионная поляризация) — все это приводит к увеличению поверхностной плотности $\sigma_{св}$ связанных электрических зарядов.

Таким образом, $\sigma_{св}$ также характеризует степень поляризации диэлектрика.

Установим связь между P_e и $\sigma_{св}$ на примере поляризованного диэлектрика, имеющего форму параллелепипеда (рис. 12.22, *а*). Такой параллелепипед представим как совокупность диполей, которые, простоты ради, можно рассматривать как «цепочки»; одна из них показана на рис. 12.22, *б*. Так как внутренние части «цепочки» диполей электрически компенсируются, то такая «цепочка» подобна длинному диполю с расстоянием между зарядами, равным ребру параллелепипеда.



а) *б*)

Рис. 12.22

Если на грани параллелепипеда с площадью S возник связанный заряд $q_{св}$, то суммарный электрический момент $\left|\sum_{i=1}^{N}p_i\right|$ всего параллелепипеда численно равен $q_{св}\,l$, но так как $q_{св} = \sigma_{св}S$, то $\left|\sum_{i=1}^{N}\dot{p}_i\right| = \sigma_{св}Sl$. Объем параллелепипеда $V = Sl\cos\alpha$. На основании двух последних равенств имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\dot{p}_i\right| = \frac{\sigma_{св}V}{\cos\alpha}. \qquad (12.37)$$

Учитывая (12.36) и (12.37), получаем $P_e = \left|\sum_{i=1}^{N}\dot{p}_i\right|/V = \frac{\sigma_{св}}{\cos\alpha}$, откуда

$$\sigma_{св} = P_e\cos\alpha. \qquad (12.38)$$

Итак, поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ равна нормальной к грани составляющей вектора P_e.

Рассмотрим, например, плоский диэлектрик, расположенный в однородном электрическом поле (рис. 12.23); $\vec{E}_0$ — напряженность поля в отсутствие диэлектрика (поле в вакууме). Связанные заряды создают однородное поле напряженностью $\vec{E}_{св}$, в результате в диэлектрике будет электрическое поле напряженностью

$$E = E_0 - E_{св}. \qquad (12.39)$$

Известно, что ***диэлектрическая проницаемость*** среды ε равна отношению силы взаимодействия зарядов в вакууме к силе взаимодействия этих же зарядов на том же расстоянии в среде:

$$F_0/F = \varepsilon, \text{ или } F_0 = \varepsilon F.$$

Так как напряженность электрического поля пропорциональна силе, действующей на заряд [см. (12.1)], то аналогичное соотношение можно записать для E_0 и E:

$$E_0 = \varepsilon E. \qquad (12.40)$$

Напряженность электрического поля, образованного связанными электрическими зарядами, $E_{св} = \sigma_{св}/\varepsilon_0$. Для данного примера

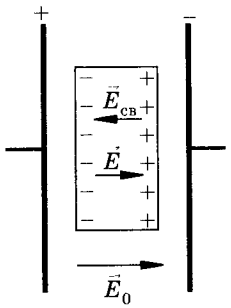


Рис. 12.23

из (12.38) имеем $\sigma_{св} = P_e$, тогда $E_{св} = P_e/\varepsilon_0$. Подставляя эту формулу и (12.40) в (12.39), получаем $E = \varepsilon E - P_e/\varepsilon_0$, или $E(\varepsilon_0 - 1) = P_e/\varepsilon_0$, откуда

$$P_e = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E. \qquad (12.41)$$

Как и можно было ожидать, поляризованность пропорциональна напряженности электрического поля в диэлектрике. На основании (12.41) вводят понятие ***диэлектрической восприимчивости*** среды

$$\chi = \varepsilon - 1, \qquad (12.42)$$

которая вместе с диэлектрической проницаемостью ε характеризует способность диэлектрика к поляризации и зависит от его молекулярного строения, а возможно и от температуры. В переменных электрических полях ε и χ изменяются также в зависимости от частоты.

В табл. 21 приведены значения диэлектрической проницаемости ε для различных биологических сред и некоторых веществ в постоянном электрическом поле при комнатной температуре.

Таблица 21

	ε		ε
Керосин	2	Белок яичный	72
Масло растительное	2—4	Вода	81
Стекло	6—10	Кровь цельная	85
Крахмал	12	Серое вещество мозга	85
Молоко коровье	66	Нерв зрительный	89
		Белое вещество мозга	90

Различие диэлектрической проницаемости нормальных и патологических тканей и сред как в постоянных, так и в переменных, электрических полях можно использовать для диагностических целей.

§ 12.7. Пьезоэлектрический эффект

В кристаллических диэлектриках поляризация может возникнуть и при отсутствии электрического поля из-за деформации. Это явление получило название ***пьезоэлектрического эффекта (пьезоэффекта)***.

Различают *поперечный* (рис. 12.24) и *продольный* (рис. 12.25) пьезоэффекты. Стрелки показывают силы, действующие на кристалл. При изменении характера деформации, например, при переходе от сжатия к растяжению, изменится и знак возникающих поляризационных зарядов.

Пьезоэлектрический эффект обусловлен деформацией элементарных кристаллических ячеек и сдвигом подрешеток относительно друг друга при механических деформациях. Поляризованность при небольших механических деформациях пропорциональна их величине. Пьезоэффект возникает в кварце, сегнетовой соли и некоторых других кристаллах.

Для демонстрации пьезоэффекта можно использовать установку, схема которой изображена на рис. 12.26. К кристаллу K, обладающему пьезоэлектрическими свойствами, приложены металлические пластины M, которые замкнуты через неоновую лампу H. Эта лампа потребляет небольшой силы ток и загорается при определенном напряжении, т. е. является своеобразным индикатором напряжения.

При ударе по кристаллу (деформации) появляется напряжение на его гранях, а значит, и на металлических пластинах, и неоновая лампа вспыхивает.

Наряду с рассмотренным прямым пьезоэлектрическим эффектом наблюдается и обратный пьезоэффект: при наложении электрического поля на кристаллы последние деформируются.

Оба пьезоэффекта — прямой и обратный — применяют в тех случаях, когда необходимо преобразовать механическую величину в электрическую или наоборот.

Так, прямой пьезоэффект используют в медицине — в датчиках для регистрации пульса, в технике — в адаптерах, микрофонах и для измерения вибраций, а обратный пьезоэффект — для создания механических колебаний и волн ультразвуковой частоты.

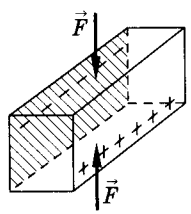


Рис. 12.24

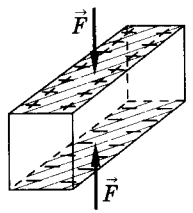


Рис. 12.25

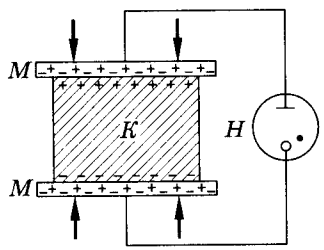


Рис. 12.26

Существенный пьезоэффект возникает в костной ткани при наличии сдвиговых деформаций.

Причина эффекта — деформация коллагена — основного белка соединительной ткани. Поэтому пьезоэлектрическими свойствами обладают также сухожилия и кожа. При нормальной функциональной нагрузке, а также при отсутствии дефектов в строении кости в ней существуют только деформации сжатия—растяжения и пьезоэффект отсутствует. Когда что-то ненормально и возникает сдвиговая деформация, то возникает пьезоэффект. Он оказывает влияние на постоянно идущие в кости процессы разрушения и созидания и содействует тому, чтобы исчез сдвиг (меняется архитектура и даже форма кости). Указывают два возможных механизма воздействия пьезоэффекта: а) электрическое поле изменяет активность клеток, продуцирующих коллаген, и б) электрическое поле участвует в укладке макромолекул. Исследованием этого вопроса занимался В. Ф. Чепель.

§ 12.8. Энергия электрического поля

Система зарядов или заряженных тел, заряженный конденсатор обладают энергией.

В этом можно убедиться, разряжая, например, конденсатор через лампочку, присоединенную к нему: лампочка вспыхнет.

Вычислим энергию поля конденсатора. Чтобы зарядить его, будем многократно переносить положительный заряд $\mathrm{d}q$ с одной обкладки на другую. По мере его переноса увеличивается напряжение между обкладками конденсатора. Работа, которую необходимо совершить против сил электрического поля для зарядки конденсатора, равна энергии конденсатора:

$$W_{эл} = A.$$

Элементарная работа по перемещению заряда против сил поля равна $\mathrm{d}A = U\mathrm{d}q$. Перенос заряда $\mathrm{d}q$ с одной обкладки конденсатора на другую изменяет напряжение его на $\mathrm{d}U$, и тогда из формулы для электроемкости запишем $\mathrm{d}q = C\mathrm{d}U$, а значит, $\mathrm{d}A = CU\mathrm{d}U$.

Проинтегрировав это равенство в пределах от $U_0 = 0$ до некоторого конечного значения U, найдем выражение для ***энергии поля заряженного конденсатора***:

$$A = W_{эл} = CU^2/2 \qquad \textbf{(12.43)}$$

или, учитывая, что $C = q/U$,

$$W_{эл} = qU/2 = q^2/(2C). \qquad \textbf{(12.44)}$$

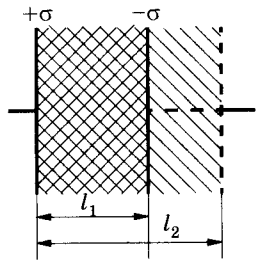


Рис. 12.27

Если, не изменяя заряда на обкладках конденсатора, отключенного от источника напряжения, раздвинуть его пластины от расстояния l_1 до l_2, то электроемкость уменьшится (см. 12.34). Как видно из (12.44), при этом энергия конденсатора с увеличением объема, занимаемого электрическим полем (рис. 12.27), возрастет, а напряженность поля останется постоянной. Отсюда ясно, что энергия заряженного конденсатора сосредоточена в объеме, занимаемом электрическим полем.

Более убедительно пояснить существование энергии электрического поля можно на примере переменного электромагнитного поля (передача сигнала на расстояние, давление света и т. п.).

Выразим энергию поля через его характеристики. С этой целью преобразуем (12.43), подставив выражение для емкости плоского конденсатора (12.34) и напряжение из (12.14):

$$W_{эл} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 V/2, \qquad \textbf{(12.45)}$$

где $V = Sl$ — объем, занимаемый электрическим полем конденсатора.

Предполагая, что электрическое поле плоского конденсатора однородно, разделим (12.45) на объем и получим ***объемную плотность энергии поля***:

$$w_{эл} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2. \qquad \textbf{(12.46)}$$

Единицей объемной плотности является *джоуль на кубический метр* (Дж/м^3).

В заключение заметим, что формула (12.46) справедлива и для неоднородного электрического поля, но тогда она выражает объемную плотность энергии в точке. Энергия неоднородного поля может быть найдена интегрированием (12.46) по соответствующему объему

$$W_{эл} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon E^2 \mathrm{d}V.$$

В общем случае диэлектрическая проницаемость различна в разных точках среды, т. е. зависит от координат, поэтому в этой формуле ε входит под знак интеграла.

§ 12.9. Электропроводимость электролитов

Биологические жидкости являются электролитами, электропроводимость которых имеет сходство с электропроводимостью металлов: в обеих средах, в отличие от газов, носители тока существуют независимо от наличия электрического поля.

В этих средах под воздействием электрического поля возникает упорядоченное (направленное) движение свободных электрических зарядов (электронов, ионов) — ***электрический ток***. Скалярной характеристикой электрического тока является ***сила тока*** (I), равная отношению заряда (Δq), переносимого через сечение проводника или некоторую поверхность за интервал времени Δt, к этому интервалу:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ или } I = \frac{dq}{dt}. \qquad (12.47)$$

Если электрический ток равномерно распределен по сечению проводника, то отношение силы тока к площади сечения проводника (S) называется ***плотностью тока*** (j):

$$j = \frac{I}{S}. \qquad (12.48)$$

Установим связь плотности тока с некоторыми характеристиками носителей тока. В § 11.4 была установлена связь между плотностью потока вещества, молярной концентрацией и скоростью направленного движения частиц [см. (11.26)]. Запишем эту формулу для плотности потока частиц, заменив молярную концентрацию c концентрацией n:

$$J = \upsilon n. \qquad (12.49)$$

Если эту формулу умножить на заряд q носителя тока, то произведение qJ будет соответствовать заряду, проходящему через единицу площади сечения за одну секунду, т. е. будет являться плотностью тока:

$$j = qJ = qn\upsilon. \qquad (12.50)$$

Как видно, плотность тока прямо пропорциональна заряду носителя тока, концентрации носителей и скорости их направленного движения. Естественно, что выражение (12.50) справедливо при равенстве зарядов носителей тока и одинаковой их скорости.

Плотность тока для электролитов следует представить в виде суммы выражений типа (12.50) для положительных и отрицательных ионов:

$$j_+ = qn_+\upsilon_+ \text{ и } j_- = qn_-\upsilon_-, \qquad (12.51)$$

т. е. суммарная плотность тока равна

$$j = j_+ + j_- = q(n_+\upsilon_+ + n_-\upsilon_-). \qquad (12.52)$$

Если предположить, что каждая молекула диссоциирует на два иона, то концентрация положительных и отрицательных ионов одинакова:

$$n_+ = n_- = \alpha n, \qquad (12.53)$$

где α — коэффициент диссоциации, n — концентрация молекул электролита.

Направленное движение ионов в электрическом поле можно приближенно считать равномерным, при этом сила qE, действующая на ион со стороны электрического поля, уравновешивается силой трения $r\upsilon$:

$$qE = r\upsilon,$$

откуда, заменяя $q/r = b$, получаем

$$\upsilon = bE. \qquad (12.54)$$

Коэффициент пропорциональности b называют ***подвижностью носителей заряда (ионов)***. Он равен отношению скорости направленного движения ионов, вызванного электрическим полем, к напряженности этого поля[1].

Для ионов разных знаков из (12.54) соответственно имеем

$$\upsilon_+ = b_+E \text{ и } \upsilon_- = b_-E. \qquad (12.55)$$

Подставляя (12.53) и (12.55) в (12.52), находим

$$j = nq\,\alpha(b_+ + b_-)E. \qquad (12.56)$$

Представим электролит в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями-электродами площадью S, расположенными на расстоянии l (рис.12.28). Считая поле однородным, учитывая выражение (12.14), преобразуем (12.56):

$$jS = nq\alpha(b_+ + b_-)\frac{U}{l}S. \qquad (12.57)$$

Так как $I = jS$, то (12.57) соответствует закону Ома для участка цепи без источника тока: $I = \frac{U}{R}$, где

$$R = \frac{l}{S}\frac{1}{nq\alpha(b_+ + b_-)} \qquad (12.58)$$

— сопротивление электролита. Сравнивая (12.58) с соотношением $R = \frac{\rho l}{S}$, получаем

$$\gamma = 1/\rho = nq\alpha(b_+ + b_-). \qquad (12.59)$$

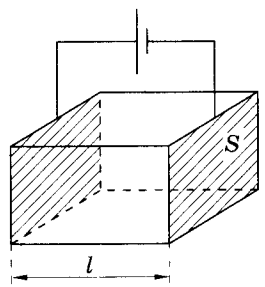


Рис. 12.28

[1] Подвижность носителей заряда b связана с подвижностью u диффундирующих частиц (см. § 11.3) соотношением $b = uq$.

Отсюда следует, что *удельная проводимость γ электролита тем больше, чем больше концентрация ионов, их заряд и подвижность. При повышении температуры возрастает подвижность ионов и увеличивается электропроводимость.*

§ 12.10. Электропроводимость биологических тканей и жидкостей при постоянном токе

Биологические ткани и органы являются довольно разнородными образованиями с различными электрическими сопротивлениями, которые могут изменяться при действии электрического тока. Это обусловливает трудности измерения электрического сопротивления живых биологических систем.

Электропроводимость отдельных участков организма, находящихся между электродами, наложенными непосредственно на поверхность тела, существенно зависит от сопротивления кожи и подкожных слоев. Внутри организма ток распространяется в основном по кровеносным и лимфатическим сосудам, мышцам, оболочкам нервных стволов. Сопротивление кожи, в свою очередь, определяется ее состоянием: толщиной, возрастом, влажностью и т. п.

Электропроводимость тканей и органов зависит от их функционального состояния и, следовательно, может быть использована как диагностический показатель. Так, например, при воспалении, когда клетки набухают, уменьшается сечение межклеточных соединений и увеличивается электрическое сопротивление; физиологические явления, вызывающие потливость, сопровождаются возрастанием электропроводимости кожи и т. д.

Приведем удельные сопротивления различных тканей и жидкостей организма (табл. 22).

Электропроводимость тканей при переменном токе рассмотрена в § 14.4.

Таблица 22

	ρ, Ом · м		ρ, Ом · м
Спинномозговая жидкость	0,55	Ткань жировая	33,3
Кровь	1,66	Кожа сухая	10^5
Мышцы	2	Кость без надкостницы	10^7
Ткань мозговая и нервная	14,3		

§ 12.11. Электрический разряд в газах. Аэроионы и их лечебно-профилактическое действие

Газ, состоящий только из нейтральных частиц, является диэлектриком (изолятором). Если его ионизовать, то он становится электропроводным. ***Любое устройство, явление, фактор, способный вызвать ионизацию молекул и атомов газа, называют ионизатором.***

Им может быть свет, рентгеновское излучение, пламя, ионизирующее излучение и пр. Электрический заряд в воздухе может образоваться и при распылении в нем полярных жидкостей (баллоэлектрический эффект), т. е. таких жидкостей, молекулы которых имеют постоянный электрический дипольный момент. Так, например, при дроблении в воздухе вода распадается на заряженные капельки. Знак заряда крупных капель (положительный для чистой воды) противоположен по знаку заряду мельчайших капелек. Более крупные капли сравнительно быстро оседают, и в воздухе остаются отрицательно заряженные частицы воды. Такое явление наблюдается у фонтана.

Электропроводимость газа зависит также и от вторичной ионизации.

Чтобы ионизовать нейтральный атом, следует совершить некоторую работу $A_и$ по отрыву электрона, равную энергии ионизации. В физике принято энергию (работу) ионизации выражать ***ионизационным потенциалом***

$$\varphi_и = A_и / e. \qquad (12.60)$$

Таким образом, ионизационный потенциал в вольтах численно равен работе ионизации в электрон-вольтах.

Приведем значения наименьшего ионизационного потенциала, соответствующего отрыву внешних электронов, для некоторых газов (табл. 23).

Таблица 23

	$\varphi_и$, В		$\varphi_и$, В
Пары натрия	5,1	Азот	15,5
Пары ртути	10,4	Водород	15,6
Кислород	12,5	Гелий	21,5
Углекислый газ	14,4		

Ионизационный потенциал внутренних электронов значительно выше.

Наряду с ионизацией наблюдается и обратный процесс — *рекомбинация* ионов, при которой выделяется энергия. Примером этого явления служит свечение газоразрядных трубок.

Если ионизатор прекратит свое действие, то вследствие рекомбинации при отсутствии электрического поля газ сравнительно быстро станет изолятором.

В земных условиях воздух практически всегда содержит некоторое количество ионов благодаря природным ионизаторам, главным образом радиоактивным веществам в почве и газах, и космическому излучению. Ионы и электроны, находящиеся в воздухе, могут, присоединяясь к нейтральным молекулам и взвешенным частицам, образовать более сложные ионы. Эти ионы в атмосфере называют ***аэроионами***.

Они различаются не только знаком, но и массой, их условно делят на легкие (газовые ионы) и тяжелые (взвешенные заряженные частицы — пылинки, частицы дыма и влаги).

Тяжелые ионы вредно действуют на организм. Легкие и в основном отрицательные аэроионы оказывают благотворное влияние. Их используют, в частности, для лечения — ***аэроионотерапия***.

Различают естественную аэроионотерапию, связанную с пребыванием больного в природных условиях с повышенной ионизацией воздуха (горы, водопады пр.)[1], и искусственную, проводимую с помощью специальных устройств — ***аэроионизаторов***, которым может быть любой ионизатор, создающий ионы в воздухе. Однако, используемый для лечебных целей, он не должен вызывать побочного вредного воздействия на организм. Разновидностью искусственной аэроионотерапии является электростатический душ (***франклинизация***).

При франклинизации применяют постоянное электрическое поле высокого напряжения (до 50 кВ). Лечебное действие оказывают образующиеся при этом аэроионы и небольшое количество озона. Франклинизацию проводят в виде общих и местных процедур. При общей франклинизации больной сидит на изолированном деревянном стуле с металлической пластиной, соединенной с положительным полюсом аппарата. Над головой больного на расстоянии 10—15 см устанавливают электрод в виде паука, подключенный к отрицательному полюсу аппарата.

[1] Изменение ионного состава воздуха в связи с солнечной активностью является, вероятно, одной из причин влияния Солнца на земные биологические организмы. Оно изучается в разделе биофизики, называемом *гелиобиологией*.

ГЛАВА 13

Магнитное поле

Магнитным полем называют вид материи, посредством которой осуществляется силовое воздействие на движущиеся электрические заряды, помещенные в поле, и другие тела, обладающие магнитным моментом. Магнитное поле есть одна из форм проявления электромагнитного поля.

§ 13.1. Основные характеристики магнитного поля

Аналогично электрическому полю, необходимо для магнитного поля ввести количественную характеристику. Для этого выбирают некоторый объект — «пробное тело», реагирующее на магнитное поле. В качестве такого тела достаточно взять *малую рамку (контур) с током*, чтобы можно было считать, что рамка помещается в некоторую точку поля. Опыт показывает, что на пробную рамку с током в магнитном поле действует момент силы M, зависящий от ряда факторов, в том числе и от ориентации рамки. Максимальное значение M_{max} зависит от магнитного поля, в котором находится контур, и от самого контура: силы тока I, протекающего по нему, и площади S, охватываемой контуром, т. е.

$$M_{max} \sim IS. \qquad (13.1)$$

Величину

$$p_m = IS \qquad (13.2)$$

называют ***магнитным моментом*** контура с током. Таким образом,

$$M_{max} \sim p_m. \qquad (13.3)$$

Магнитный момент — векторная величина. Для плоского контура с током вектор $\vec{p}_m$ направлен перпендикулярно плоскости контура и связан с направлением тока I правилом правого винта (рис. 13.1).

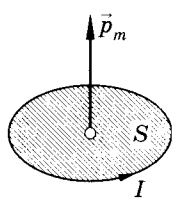


Рис. 13.1

Магнитный момент является характеристикой не только контура с током, но и многих элементарных частиц (протоны, нейтроны, электроны и т. д.), определяя поведение их в магнитном поле.

Единицей магнитного момента служит *ампер-квадратный метр* (А · м^2). Магнитный момент элементарных частиц, ядер, атомов и молекул выражают в особых единицах, называемых *атомным* ($\mu_Б$) или *ядерным* ($\mu_я$) *магнетоном Бора*:

$$\mu_Б = 0{,}927 \cdot 10^{-23}\ А \cdot м^2\ (Дж/Тл),$$

$$\mu_я = 0{,}505 \cdot 10^{-26}\ А \cdot м^2\ (Дж/Тл).$$

Зависимость (13.3) используют для введения силовой характеристики магнитного поля — вектора магнитной индукции $\vec{B}$.

Магнитная индукция в некоторой точке поля равна отношению максимального вращающего момента, действующего на рамку с током в однородном магнитном поле, к магнитному моменту этой рамки:

$$B = M_{max}/p_m. \qquad (13.4)$$

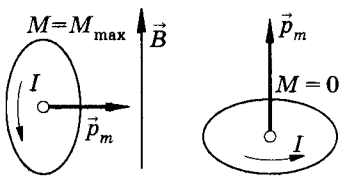
Вектор $\vec{B}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{p}_m$ в положении устойчивого равновесия контура. На рис. 13.2 показано положение рамки с током в магнитном поле индукции $\vec{B}$, соответствующее максимальному моменту силы (*а*) и нулевому (*б*). Последний случай соответствует устойчивому равновесию (векторы $\vec{B}$ и $\vec{p}_m$ коллинеарны).

Единицей магнитной индукции является *тесла* (Тл):

$$1\ Тл = \frac{1\ Н \cdot м}{1\ А \cdot м^2} = 1\ Н/(А \cdot м).$$

Таким образом, в поле с магнитной индукцией 1 Тл на контур, магнитный момент которого 1 А · м^2, действует максимальный момент силы 1 Н · м.

Магнитное поле графически изображают с помощью ***линий магнитной индукции,*** касательные к которым показывают направление вектора $\vec{B}$. Густота линий, т. е. число линий, проходящих через единичную, перпендикулярно им расположенную площадку, пропорциональна модулю вектора $\vec{B}$. Линии магнитной индукции не имеют начала или конца и являются замкнутыми. Подобные поля называют ***вихревыми. Циркуляция вектора магнитной индукции по любой линии магнитной индукции не равна нулю:***



а) *б*)

Рис. 13.2

$$\oint = B_l dl \neq 0. \qquad (13.5)$$

Рассмотрим некоторую площадку S, находящуюся в области однородного магнитного поля индукции $\vec{B}$ (рис. 13.3)[1]. Проведем линии магнитной индукции через эту площадку. Ее проекция на плоскость, перпендикулярную линиям, равна S_0. Число линий, пронизывающих S и S_0, одинаково. Так как густота линий соответствует значению B, то общее число линий, пронизывающих площадки, пропорционально

$$\Phi = BS_0. \qquad (13.6)$$

На рис. 13.3 видно, что $S_0 = S \cos\alpha$, откуда

$$\Phi = BS\cos\alpha \text{ или } \Phi = B_n S, \qquad (13.7)$$

где $B_n = B\cos\alpha$ — проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали $\vec{n}$ к площадке, Ф — ***магнитный поток.***

В более общем случае, например, неоднородного магнитного поля поверхности, а не плоской площадки (рис. 13.4), магнитный поток Ф также пропорционален числу линий магнитной индукции, пронизывающих поверхность.

Единицей магнитного потока, согласно (13.6), является *вебер* (Вб):

$$1\ Вб = 1\ Тл \cdot м^2.$$

Из формулы (13.7) видно, что поток может быть как положительным ($\cos\alpha > 0$), так и отрицательным ($\cos\alpha < 0$).

В соответствии с этим линии магнитной индукции, выходящие из замкнутой поверхности, считают положительными, а входящие — отрицательными. Так как линии магнитной индукции замкнуты, то магнитный поток сквозь замкнутую поверхность равен нулю.

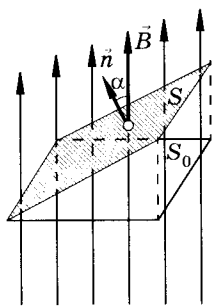


Рис. 13.3

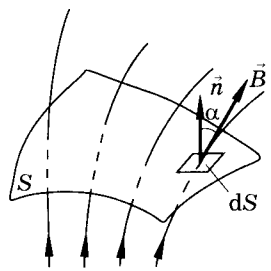


Рис. 13.4

[1] Так как линии $\vec{B}$ замкнуты, то магнитное поле не может быть однородным безгранично.

Как и всякая материальная субстанция, магнитное поле обладает энергией. Проиллюстрируем наличие такой энергии на примере магнитного поля, созданного контуром с постоянным током. Если разомкнуть цепь контура, то исчезнет ток и, следовательно, магнитное поле. При размыкании цепи возникнет искра или дуговой разряд. Это означает, что энергия магнитного поля превратилась в другие формы энергии — световую, звуковую и тепловую.

Выражение для объемной плотности энергии магнитного поля имеет следующий вид:

$$w_м = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}, \qquad \textbf{(13.8)}$$

где μ — магнитная проницаемость среды, а μ_0 — магнитная постоянная.

§ 13.2. Закон Ампера

Одним из главных проявлений магнитного поля является его силовое действие на движущиеся электрические заряды и токи. В результате обобщения многочисленных опытных данных А. М. Ампером был установлен закон, определяющий это силовое воздействие.

Приведем его в дифференциальной форме, что позволит вычислять силу, действующую на различные контуры с током, расположенные в магнитном поле.

В проводнике, находящемся в магнитном поле, выделим достаточно малый участок $d\vec{l}$, который можно рассматривать как вектор, направленный по току (рис. 13.5). Произведение $Id\vec{l}$ называют ***элементом тока***. Сила, действующая со стороны магнитного поля на элемент тока,

$$dF = klB\sin\beta \cdot dl, \qquad \textbf{(13.9)}$$

где k — коэффициент пропорциональности; в СИ $k = 1$, поэтому

$$dF = IB\sin\beta \cdot dl, \qquad \textbf{(13.10)}$$

или в векторной форме

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \qquad \textbf{(13.11)}$$

Для плоского контура с током находим силу, действующую на участок l проводника со стороны магнитного поля, интегрированием скалярного выражения (13.10):

$$F = I\int_l B\,\sin\beta\,dl. \qquad \textbf{(13.12)}$$

Соотношения (13.9)—(13.12) выражают **закон Ампера**.

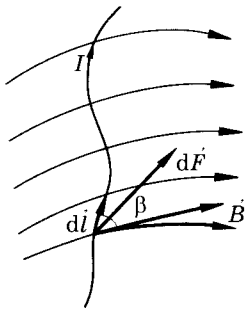


Рис. 13.5

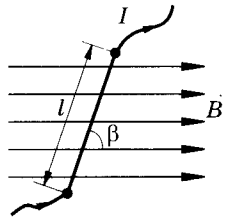


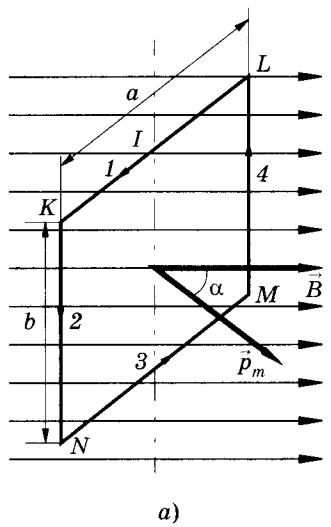
Рис. 13.6

Рассмотрим некоторые примеры на применение формулы (13.11).

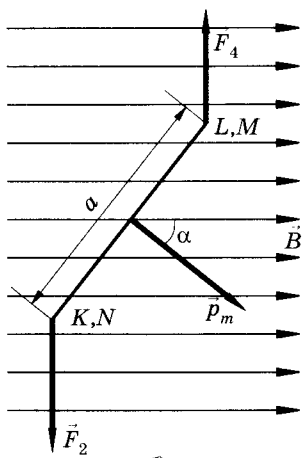
1. Прямолинейный участок проводника с током I длиной l, расположенный в однородном магнитном поле под углом β к магнитной индукции $\vec{B}$ (рис. 13.6). Для нахождения силы, действующей на эту часть проводника со стороны магнитного поля, интегрируем (13.12) и получаем

$$F = IBl\sin\beta. \qquad \textbf{(13.13)}$$

2. Прямоугольная рамка $KLMN$ с током I, помещенная в однородное магнитное поле индукции $\vec{B}$ (рис. 13.7, *а*). Пронумеруем стороны рамки и обозначим силы, действующие на них со стороны магнитного поля, F_1, F_2, F_3, F_4.



а)



б)

Рис. 13.7

Силы F_1 и F_3, приложенные к серединам соответствующих сторон, направлены противоположно вдоль оси и по формуле (13.13) равны. Силы же $F_2 = F_4 = IBb$ создают пару сил, момент которой (рис. 13.7, *б*)

$$M = IBb\,(a/2)\sin\alpha + IBb(a/2)\sin\alpha = IBba\sin\alpha. \qquad \textbf{(13.14)}$$

Так как $Iba = IS = p_m$, то из (13.14) имеем

$$M = p_m B\sin\alpha, \qquad \textbf{(13.15)}$$

или в векторной форме

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \qquad \textbf{(13.16)}$$

Фактически на основе этой зависимости в § 13.1 было введено понятие вектора магнитной индукции.

§ 13.3. Действие магнитного поля на движущийся электрический заряд. Сила Лоренца

Сила, действующая, согласно закону Ампера, на проводник с током в магнитном поле, есть результат его воздействия на движущиеся электрические заряды, создающие этот ток.

Рассмотрим цилиндрический проводник длиной l с током I, расположенный в магнитном поле индукции $\vec{B}$ (рис. 13.8). Скорость направленного движения некоторого положительного заряда q равна v. Сила, действующая на отдельный движущийся заряд, определяется отношением силы F, приложенной к проводнику с током, к общему числу N этих зарядов в нем:

$$f_Л = F/N. \qquad \textbf{(13.17)}$$

Раскроем выражение для силы, используя (13.13) и полагая, что сила тока равна $I = jS$:

$$F = jSBl\sin\beta,$$

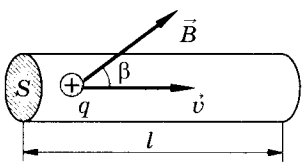


Рис. 13.8

где j — плотность тока. Учитывая (12.50), получаем

$$F = jSBl\sin\beta = qnvSBl\sin\beta, \qquad \textbf{(13.18)}$$

где $n = N/(Sl)$ — концентрация частиц. Подставляя (13.18) в (13.17), получаем выражение для силы, действующей со

стороны магнитного поля на отдельный движущийся электрический заряд и называемой ***силой Лоренца***:

$$f_Л = \frac{qNvSlBl\sin\beta}{SlN} = qvB\sin\beta. \qquad \textbf{(13.19)}$$

Направление силы Лоренца можно определить из векторной записи уравнения (13.19) с учетом знака заряда q:

$$\vec{f}_Л = q\vec{v} \times \vec{B}. \qquad \textbf{(13.20)}$$

Как видно из (13.20), эта сила всегда перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Из механики известно, что если сила перпендикулярна скорости, то она изменяет лишь ее направление, но не значение. Следовательно, сила Лоренца не изменяет кинетической энергии движущегося заряда и не совершает работы.

Если заряд неподвижен относительно магнитного поля или его скорость параллельна (антипараллельна) вектору магнитной индукции, то сила Лоренца равна нулю.

Пусть в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору индукции $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{v}$ положительно заряженная частица (рис. 13.9). На нее действует сила Лоренца $f_Л$, которая вызовет центростремительное ускорение, и, по второму закону Ньютона,

$$mv^2/r = qvB, \qquad \textbf{(13.21)}$$

где q и m — заряд и масса частицы, r — радиус траектории, по которой она будет двигаться. Из (13.21) получаем

$$r = mv/(qB). \qquad \textbf{(13.22)}$$

Отсюда следует, что радиус траектории остается постоянным, а сама траектория есть окружность.

Используя (13.22) и считая, что значение скорости частицы не изменяется, найдем период вращения ее по окружности:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{(q/m)B}. \qquad \textbf{(13.23)}$$

Отношение q/m называют ***удельным зарядом частицы***. Период вращения ее в магнитном поле [см. (13.23)] не зависит от радиуса окружности и скорости, а определяется только магнитной индукцией и удельным зарядом. Эту особенность используют в ускорителе заряженных частиц — ***циклотроне***.

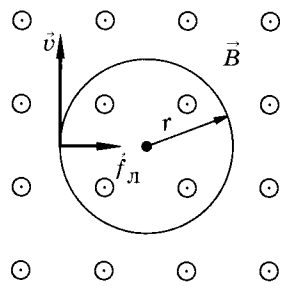


Рис. 13.9

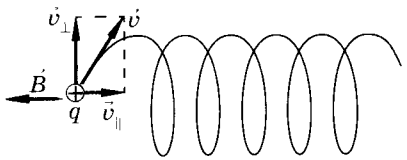


Рис. 13.10

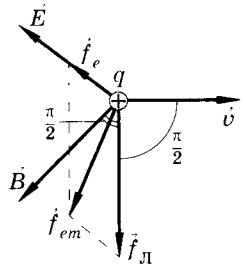


Рис. 13.11

Чтобы описать форму траектории заряженной частицы, влетающей со скоростью $\vec{v}$ в однородное магнитное поле под произвольным углом к $\vec{B}$ (рис. 13.10), разложим вектор $\vec{v}$ на две составляющие $\vec{v}_\parallel$ и $\vec{v}_\perp$, направленные соответственно вдоль вектора магнитной индукции магнитного поля и перпендикулярно ему. Составляющая $\vec{v}_\parallel$ при движении частицы в магнитном поле остается постоянной; сила Лоренца, действующая на частицу, изменит направление составляющей скорости $\vec{v}_\perp$. Под действием этой силы частица вращается по окружности. Таким образом, траекторией движения будет винтовая линия — вращение по окружности со скоростью $\vec{v}_\perp$ совместно с перемещением вдоль вектора магнитной индукции со скоростью $\vec{v}_\parallel$.

Если на движущуюся заряженную частицу q действуют электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$ и магнитное поле с магнитной индукцией $\vec{B}$ (рис. 13.11), то результирующая сила равна

$$\vec{f}_{em} = \vec{f}_e + \vec{f}_Л = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}^1. \qquad \textbf{(13.24)}$$

Во многих системах (осциллограф, телевизор, электронный микроскоп) осуществляют управление электронами или другими заряженными частицами, воздействуя на них электрическими и магнитными полями, в этом случае основной расчетной формулой является (13.24).

§ 13.4. Магнитные свойства вещества

Нет таких веществ, состояние которых не изменялось бы при помещении их в магнитное поле. Более того, находясь в магнитном поле, вещества сами становятся источниками такого поля. В этом смысле все вещества принято называть *магнетиками*.

[1] В физической литературе именно эту суммарную силу часто называют силой Лоренца.

Так как макроскопические различия магнетиков обусловлены их строением, то целесообразно рассмотреть магнитные характеристики электронов, ядер, атомов и молекул, а также поведение этих частиц в магнитном поле. Изложение проведем в рамках классической физики.

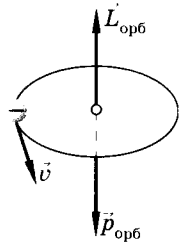


Рис. 13.12

Условно будем считать, что электрон в атоме равномерно вращается вокруг ядра со скоростью $\vec{v}$ по круговой орбите радиусом r (рис. 13.12). Такое движение аналогично круговому току и характеризуется орбитальным магнитным моментом $\vec{p}_{орб}$ (необходимо помнить, что электрон — отрицательно заряженная частица и его движение противоположно направлению тока).

Сила тока, соответствующего движению электрона, который вращается с частотой ν, равна

$$I = e\nu, \qquad \textbf{(13.25)}$$

где e — заряд электрона. Так как $\nu = v/(2\pi r)$, то

$$I = ev/(2\pi r). \qquad \textbf{(13.26)}$$

Тогда [см. (13.2)]

$$p_{орб} = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2}. \qquad \textbf{(13.27)}$$

Одной из характеристик движения вращающегося тела или движения материальной точки по круговой орбите является ***момент импульса*** (механический момент). Он аналогичен импульсу тела при поступательном движении. Вектор момента импульса электрона, вращающегося по круговой орбите ($\vec{L}_{орб}$), показан на рис. 13.12, а его модуль равен

$$L_{орб} = m_e vr, \qquad \textbf{(13.28)}$$

где m_e — масса электрона.

Отношение магнитного момента частицы к ее моменту импульса называют ***магнитомеханическим отношением.*** Разделив (13.27) на (13.28), найдем ***орбитальное магнитомеханическое отношение для электрона***:

$$G_{орб} = \frac{p_{орб}}{L_{орб}} = \frac{e}{2m_e}. \qquad \textbf{(13.29)}$$

Электрон обладает также и собственным моментом импульса, который называется ***спином.*** Спину соответствует спиновый магнитный момент. ***Спиновое механическое отношение*** вдвое больше орбитального:

$$G_s = \frac{e}{m_e}. \qquad \textbf{(13.30)}$$

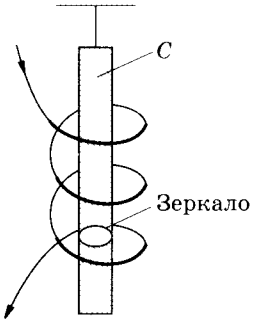


Рис. 13.13

Магнитомеханическое отношение обычно выражают через ***множитель Ланде*** g:

$$G = g\frac{e}{2m_e}. \qquad \textbf{(13.31)}$$

Как видно из (13.29)—(13.31), для орбитального магнито-механического отношения $g_{\text{орб}} = 1$, для спинового отношения $g_s = 2$.

Формулы (13.29) и (13.30) показывают также, что между магнитным и механическим моментами существует вполне определенная «жесткая» связь, так как e и m_e — величины постоянные; эта связь проявляется в магнитомеханических явлениях. Одно из таких явлений впервые наблюдали Эйнштейн и де Гааз в 1915 г. Легкий стержень C подвешивался на тонкой нити в соленоиде (рис. 13.13). При пропускании тока по соленоиду создавалось магнитное поле и магнитные моменты электронов располагались упорядоченно, что приводило к упорядоченной ориентации моментов импульса. В результате весь стержень приобретал импульс и поворачивался, что было заметно по отклонению светового «зайчика», отраженного от зеркала.

Магнитомеханические явления позволяют определять магнитомеханические отношения и на основании этого делать выводы о роли орбитальных или спиновых магнитных моментов в процессах намагничивания. Так, например, опыты Эйнштейна и де Гааза показали, что за намагниченность ферромагнитных материалов ответственны спиновые магнитные моменты электронов.

Ядра, атомы и молекулы также имеют магнитный момент. Магнитный момент молекулы является векторной суммой магнитных моментов атомов, из которых она состоит.

Магнитное поле воздействует на ориентацию частиц вещества, имеющих магнитные моменты, в результате чего вещество намагничивается. Степень намагничивания вещества характеризуется ***намагниченностью*** $\vec{J}$. Среднее значение вектора намагниченности равно отношению суммарного магнитного момента $\sum \vec{p}_m$ всех частиц, расположенных в объеме магнетика, к этому объему:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{mi}}{V}. \qquad \textbf{(13.32)}$$

Таким образом, намагниченность является средним магнитным моментом единицы объема магнетика. Единицей намагниченности служит *ампер на метр* (А/м).

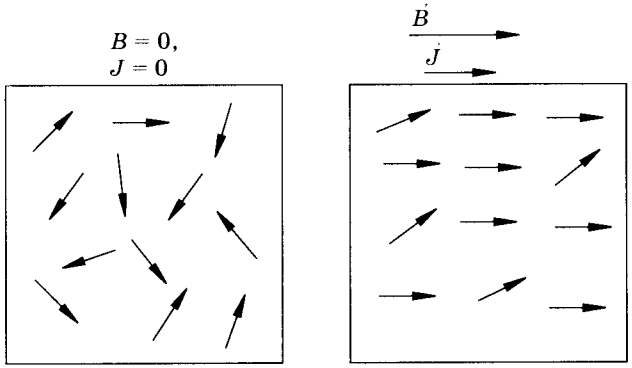


Рис. 13.14

Магнетики делят на три основных класса: ***парамагнетики, диамагнетики, ферромагнетики.*** Каждому из них соответствует и свой тип магнетизма: парамагнетизм, диамагнетизм и ферромагнетизм.

Рассмотрим их природу.

Согласно классической теории парамагнетизма, молекулы парамагнетиков имеют отличные от нуля магнитные моменты.

В отсутствие магнитного поля эти моменты расположены хаотически и намагниченность равна нулю (рис. 13.14, *а*). При внесении парамагнитного образца в магнитное поле магнитные моменты молекул ориентируются предпочтительно по направлению $\vec{B}$, в результате чего $\vec{J} \neq 0$ (рис. 13.14, *б*). Степень упорядоченности магнитных моментов зависит от двух противоположных факторов — магнитного поля и молекулярно-хаотического движения, поэтому намагниченность зависит как от магнитной индукции, так и от температуры.

Если стержень из парамагнетика подвесить в вакууме в однородном магнитном поле, то в положении равновесия он установится вдоль линий магнитной индукции (рис. 13.15, вид сверху), что соответствует ориентации $\vec{J}$ по направлению $\vec{B}$. Магнитное поле, созданное парамагнетиком, усиливает, хотя и незначительно, внешнее магнитное поле, поэтому индукция B результирующего поля больше магнитной индукции B_0 поля вне парамагнетика ($B > B_0$). Это означает, что магнитная проницаемость парамагнетиков больше единицы ($\mu > 1$). К парамагнетикам относятся алюминий, кислород, молибден и т. д.

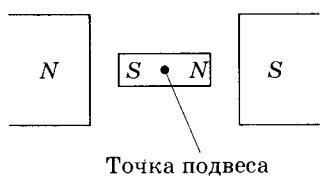


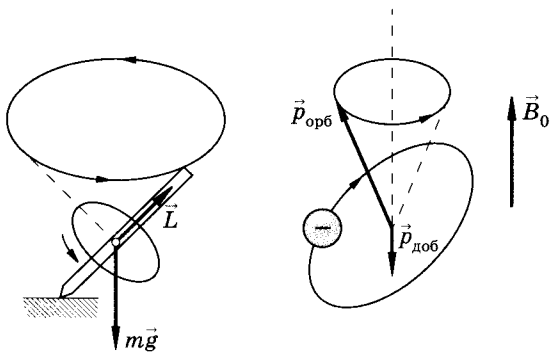
Рис. 13.15

В неоднородном магнитном поле в вакууме частицы парамагнитного вещества перемещаются в сторону большего значения магнитной индукции, как говорят, втягиваются в поле.

Объяснение природы диамагнетизма несколько сложнее, поэтому сначала целесообразно рассмотреть одно механическое явление.

Читатель, несомненно, наблюдал, что ось обычного детского волчка описывает вращательные конусообразные движения, которые называют ***прецессией*** (рис. 13.16, *а*). Она возникает тогда, когда на вращающееся тело с моментом импульса $L_{орб}$ действует опрокидывающий момент силы. Если бы волчок не вращался, то он бы опрокинулся под действием момента силы тяжести $m\vec{g}$, вращение же волчка приводит к прецессии.

Аналогичное явление происходит и с электронными орбитами в магнитном поле. Электрон, вращающийся по орбите, обладает моментом импульса, подобно волчку, а также характеризуется орбитальным магнитным моментом $\vec{p}_{орб}$. Поэтому на него, как на контур с током, со стороны магнитного поля действует момент силы. Таким образом, создаются условия для возникновения прецессии электронной орбиты (рис. 13.16, *б*). Это приводит к появлению добавочного магнитного момента электрона $\vec{p}_{доб}$, направленного противоположно индукции $\vec{B}_0$ внешнего магнитного поля, что ослабляет поле. Так возникает диамагнетизм. Диамагнетизм присущ всем веществам. В парамагнетиках диамагнетизм перекрывается более сильным парамагнетизмом. Если магнитный момент молекул равен нулю, то диамагнетизм преобладает над парамагнетизмом; вещества, состоящие из таких молекул, относят к диамагнетикам.



а) *б*)

Рис. 13.16

На рис. 13.17 схематично показаны молекулы диамагнетика при отсутствии магнитного поля (*а*) и в поле (*б*). Намагниченность диамагнетиков направлена противоположно магнитной индукции, ее значение растет с возрастанием индукции.

Так как собственное магнитное поле, созданное диамагнетиком, направлено противоположно внешнему, то индукция B внутри меньше индукции B_0 вне диамагнетика ($B < B_0$). Следовательно, магнитная проницаемость диамагнетика меньше единицы ($\mu < 1$). К диамагнетикам относятся азот, водород, медь, вода и др. Частицы диамагнетика в вакууме в неоднородном магнитном поле будут «выталкиваться из поля».

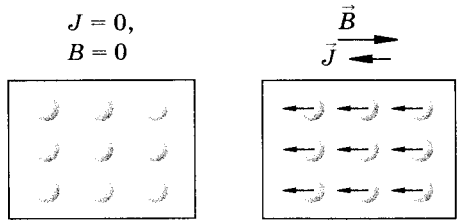
Магнитные свойства веществ зависят от строения молекул, поэтому магнитные методы измерений используют в химических исследованиях. Специальный раздел физической химии — ***магнетохимия*** — изучает связь между магнитными и химическими свойствами вещества.

Ферромагнетики, подобно парамагнетикам, создают намагниченность, направленную по индукции поля; их магнитная проницаемость много больше единицы ($\mu \gg 1$). Однако ферромагнетизм существенно отличен от парамагнетизма. Ферромагнитные свойства присущи не отдельным атомам или молекулам, а лишь некоторым веществам, находящимся в кристаллическом состоянии. Объяснение этому явлению дает квантовая теория.

К ферромагнетикам относятся кристаллическое железо, никель, кобальт, многие сплавы этих элементов между собой и с другими неферромагнитными соединениями, а также сплавы и соединения хрома и марганца с неферромагнитными элементами.

Намагниченность ферромагнетиков зависит не только от магнитной индукции внешнего магнитного поля, но и от их предыдущего состояния. Ферромагнитные свойства вещества сохраняются лишь ниже определенной температуры, называемой точкой Кюри.

Хотя ферромагнетиков и не очень много в природе, в основном именно их используют как магнитные материалы в технике. Это



а) *б*)

Рис. 13.17

обусловлено их сильным магнетизмом и остаточной намагниченностью (например, постоянные магниты).

Значительные механические силы, действующие на ферромагнитные тела и постоянные магниты в магнитном поле, находят разнообразные применения в медицине: исправление грудной клетки у детей (Ю. Ф. Исаков, Э. А. Степанов и др.), магнитные заглушки для предотвращения выделений из искусственного наружного свища ободочной кишки (В. Д. Федоров и др.), удаление ферромагнитных пылинок и опилок из глаза.

§ 13.5. Магнитные свойства тканей организма. Понятие о биомагнетизме и магнитобиологии

Ткани организма в значительной степени диамагнитны, подобно воде. Однако в организме имеются и парамагнитные вещества, молекулы и ионы. Железо в организме присутствует в таких соединениях, которые не являются ферромагнитными.

Магнетизм биологических объектов, т. е. их магнитные свойства и магнитные поля, создаваемые ими, получили название ***биомагнетизма***.

Магнитные поля, создаваемые биологическими объектами, достаточно слабы и возникают от биотоков. В некоторых случаях магнитную индукцию таких полей удается измерить. Так, например, на основании регистрации временно́й зависимости индукции магнитного поля сердца (биотоков сердца) создан диагностический метод — ***магнитокардиография***.

Так как магнитная индукция пропорциональна силе тока, а сила тока (биотока), согласно закону Ома, пропорциональна напряжению (биопотенциалу), то в целом магнитокардиограмма аналогична электрокардиограмме. Однако магнитокардиография в отличие от электрокардиографии является бесконтактным методом, ибо магнитное поле может регистрироваться и на некотором расстоянии от биологического объекта — источника поля. Развитие магнитокардиографии зависит от технических возможностей измерения достаточно слабых магнитных полей.

Магнитное поле оказывает воздействие на биологические системы, которые в нем находятся. Это воздействие изучает раздел биофизики, называемый *магнитобиологией*.

Имеются сведения о гибели дрозофилы в неоднородном магнитном поле, морфологических изменениях у животных и растений после пребывания в постоянном магнитном поле, об ориентации растений в магнитном поле, влиянии магнитного поля на нервную систему, характеристики крови и т. д.

Естественно, что первичными во всех случаях являются физические или физико-химические процессы.

Такими процессами могут быть ориентация молекул, изменение концентрации молекул или ионов в неоднородном магнитном поле, силовое воздействие (сила Лоренца) на ионы, перемещающиеся вместе с биологической жидкостью, эффект Холла, возникающий в магнитном поле при распространении электрического импульса возбуждения, и др.

В настоящее время физическая природа воздействия магнитного поля на биологические объекты еще не установлена. Этот важный вопрос находится в стадии исследования.

ГЛАВА 14

Электромагнитные колебания и волны

Электромагнитными (электрическими) колебаниями называют периодические (или почти периодические) взаимосвязанные изменения зарядов, токов и характеристик электрического и магнитного полей. Распространение электромагнитных колебаний в пространстве происходит в виде электромагнитных волн. Среди различных физических явлений электромагнитные колебания и волны занимают особое место. Почти вся электротехника, радиотехника и оптика базируется на этих понятиях.

§14.1. Свободные электромагнитные колебания

Свободными (собственными) электромагнитными колебаниями называют такие, которые совершаются без внешнего воздействия за счет первоначально накопленной энергии.

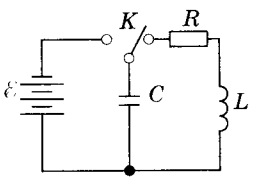


Рис. 14.1

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из резистора R, катушки индуктивности L и конденсатора C (рис. 14.1); сопротивлением проводов и возможным излучением электромагнитных волн пренебрегаем. Конденсатор ключом K заряжается от источ-

ника $\mathscr{E}$, а затем разряжается на резистор и катушку индуктивности. При этом в контуре возникает ЭДС самоиндукции $\left(\mathscr{E}_i = -L\frac{dI}{dt}\right)$, которая, согласно закону Ома, будет равна сумме напряжений на элементах цепи: на резисторе $U_R = IR$ и конденсаторе $U_C = \frac{q}{C}$. Поэтому запишем

$$-L\frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}. \qquad (14.1)$$

Преобразуем это уравнение, поделив все члены на L и учитывая, что $I = \frac{dq}{dt}$ и $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \qquad (14.2)$$

Это есть ***дифференциальное уравнение свободных электромагнитных колебаний.*** Произведя замены:

$$\frac{R}{L} = 2\beta \text{ и } \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \qquad (14.3)$$

получим уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (14.4)$$

Незатухающие колебания. Если контур не содержит резистора (рис. 14.2), то из (14.4) имеем:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (14.5)$$

Известно, что (14.5) является дифференциальным уравнением гармонического колебания, его решение [см. (5.8)] имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (14.6)$$

где q_m — наибольший (начальный) заряд на обкладках конденсатора, ω_0 — круговая частота собственных колебаний (***собственная круговая частота***) контура, φ_0 — начальная фаза.

По гармоническому закону изменяется не только заряд на обкладках конденсатора, но и напряжение, и сила тока в контуре, соответственно:

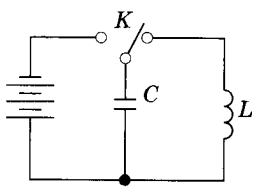


Рис. 14.2

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (14.7)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (14.8)$$

где U_m и I_m — амплитуды напряжения и силы тока.

Графики зависимости заряда (напряжения) от времени аналогичны графику зависимости смещения $x(t)$, а график зависимости силы тока от времени — графику скорости $v(t)$ (см. рис. 5.4).

Из (14.3) найдем выражение для периода собственных колебаний (***формула Томсона***):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (14.9)$$

Затухающие колебания. При наличии резистора (рис. 14.1) процесс в контуре описывается уравнением (14.4), которое аналогично уравнению (5.19) для механических колебаний. При условии, что затухание не слишком велико, т. е. $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2 > 0$ ($\omega_0 > \beta$), находим следующее решение [см. (5.20)]:

$$q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (14.10)$$

График этой функции аналогичен графику на рис. 5.6. Если затухание мало ($\omega_0^2 \gg \beta^2$), то $\omega \approx \omega_0$. В этом случае логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}. \qquad (14.11)$$

Апериодический разряд конденсатора на резистор (сильное затухание). При сильном затухании $\omega_0 < \beta$, $\omega_0^2 < \beta^2$, или, используя (14.3),

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}, \text{ или } \frac{1}{C} < \frac{R^2}{4L}. \qquad (14.12)$$

Неравенство (14.12) выполняется, в частности, в контуре при отсутствии индуктивности ($L \to 0$). Для этого случая (разряд конденсатора на резистор) из (14.1) имеем

$$IR = -\frac{q}{C}, \frac{dq}{dt}R = -\frac{q}{C}, \text{ или } \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}. \qquad (14.13)$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\int_{q_m}^{q}\frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}, \ln\frac{q}{q_m} = -\frac{t}{RC}. \qquad (14.14)$$

Потенцируя второе из выражений (14.14), имеем

$$q = q_m e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (14.15)$$

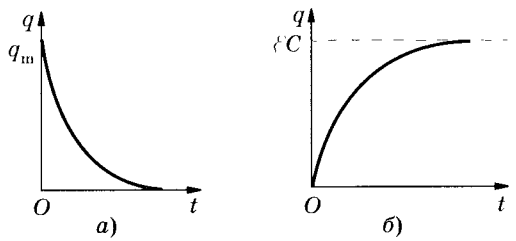


Рис. 14.3

Уравнение (14.15) описывает процесс разрядки конденсатора C на резистор R. При отсутствии индуктивности колебания не возникают (рис. 14.3, *а*). По такому закону изменяется и напряжение на обкладках конденсатора. Теоретически такой процесс, как это следует из (14.15), протекает бесконечно долго, однако принято длительность подобных процессов оценивать временем, в течение которого параметр, характеризующий процесс (в данном случае заряд и напряжение), уменьшится в e раз (***постоянная времени***, τ).

Выражение для постоянной времени можно получить из (14.15), если вместо q подставить $\frac{q_m}{e}$, а t заменить на τ: $\frac{q_m}{e} = q_m e^{-\frac{\tau}{RC}}$, откуда для контура с конденсатором и резистором постоянная времени равна

$$\tau = RC. \qquad \textbf{(14.16)}$$

Можно показать, что зарядка конденсатора от источника постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ также происходит по экспоненциальному закону

$$q = \mathcal{E}C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = q_m(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \qquad \textbf{(14.17)}$$

График этой зависимости представлен на рис. 14.3,*б*.

§ 14.2. Переменный ток

В широком смысле слова переменный ток — любой ток, изменяющийся со временем. Однако чаще термин «переменный ток» применяют к квазистационарным токам, зависящим от времени по гармоническому закону.

Квазистационарным называют такой ток, для которого время установления одинакового значения по всей цепи значительно меньше периода колебаний.

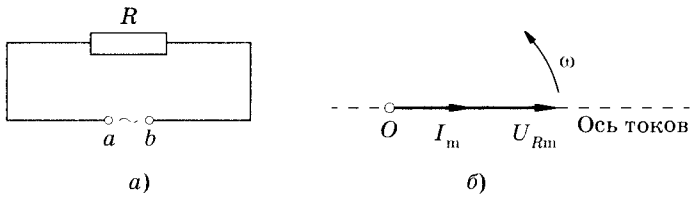


Рис. 14.4

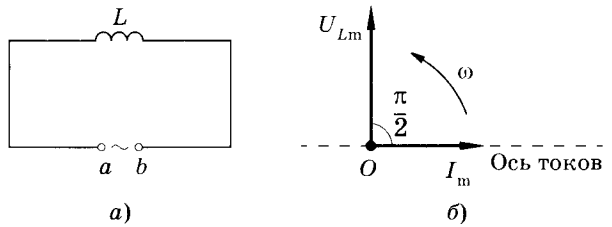


Рис. 14.5

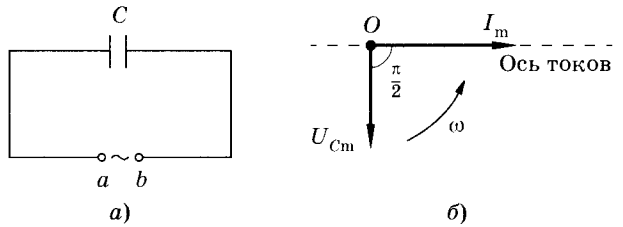


Рис. 14.6

Будем считать, что для квазистационарных токов, так же как и для постоянных, сила тока одновременно одинакова в любом сечении неразветвленного проводника. Для них справедлив закон Ома, однако сопротивление цепи зависит от частоты изменения тока. Потерями энергии на электромагнитное излучение этих токов пренебрегаем. Переменный ток можно рассматривать как вынужденные электромагнитные колебания.

Представим три разных цепи (рис. 14.4, *а* — 14.6, *а*), к каждой из которых приложено переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t, \qquad \textbf{(14.18)}$$

где U_m — амплитудное значение напряжения, ω — круговая частота колебаний.

Для цепи с резистором (рис. 14.4, *а*) выражение (14.18) запишем в форме

$$U_R = U_{Rm} \cos \omega t. \qquad \textbf{(14.19)}$$

Используя закон Ома, получим выражение для тока через сопротивление R:

$$I = \frac{U_{Rm}}{R}\cos\omega t = I_m \cos\omega t, \qquad (14.20)$$

где

$$I_m = \frac{U_{Rm}}{R} \qquad (14.21)$$

— амплитуда тока. Как видно из (14.19) и (14.20), ток и напряжение при этом изменяются в одной фазе, что можно изобразить с помощью векторной диаграммы (рис. 14.4, *б*). На диаграмме амплитуды U_{Rm} и I_m представлены как одинаково направленные векторы, равномерно вращающиеся против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Проекция этих векторов на «ось токов» (горизонтальная прямая) дает мгновенные значения напряжения и тока. В цепи с сопротивлением R (омическим сопротивлением) происходит выделение тепла.

Цепь, представленная на рис. 14.5, *а*, содержит катушку с индуктивностью L, омическое сопротивление равно нулю.

Для этой цепи выражение (14.18) запишем в форме

$$U_L = U_{Lm}\cos\omega t. \qquad (14.22)$$

При приложении переменного напряжения U_L в катушке возникает противоположно направленная ЭДС самоиндукции $\left(\mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt}\right)$, при этом, согласно закону Ома, $U_L = -\mathcal{E}_i$, откуда

$$U_L = L\frac{dI}{dt}. \qquad (14.23)$$

Подставляя (14.23) в (14.22), имеем

$$U_{Lm}\cos\omega t = L\frac{dI}{dt}. \qquad (14.24)$$

Разделив переменные в уравнении (14.24), проинтегрируем его:

$$dI = \frac{U_{Lm}}{L}\cos\omega t\, dt, \int dI = \frac{U_{Lm}}{L}\int \cos\omega t\, dt,$$

$$I = \frac{U_{Lm}}{L\omega}\sin\omega t + \text{const}. \qquad (14.25)$$

Постоянный член в (14.25) равен нулю, так как в цепи действует только переменное напряжение и нет причин для появления постоянной составляющей тока. Окончательно получаем

$$I = [U_{Lm}/(L\omega)]\sin\omega t = I_m\cos(\omega t - \pi/2), \qquad (14.26)$$

где

$$I_m = U_{Lm}/(L\omega) \qquad (14.27)$$

— амплитуда тока. Как видно из (14.26) и (14.22), фаза тока ($\omega t - \pi/2$), а напряжения — ωt. Следовательно, ток отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$, что показано на векторной диаграмме рис. 14.5, *б*.

Сравнивая (14.27) с законом Ома, заметим, что выражение

$$X_L = L\omega \qquad (14.28)$$

играет роль сопротивления цепи, которое называют ***индуктивным***. Это сопротивление вместе с U_{Lm} определяет силу тока: чем больше частота ω и индуктивность L, тем меньше I_m.

При чисто индуктивном сопротивлении теплота в цепи не выделяется, так как $R = 0$. Роль индуктивности сводится к накоплению энергии магнитного поля и возвращению этой энергии обратно источнику тока. Таким образом, происходит периодическая перекачка энергии от источника в цепь и от цепи к источнику, в идеальном случае без потерь энергии.

В цепи, в которой имеется только конденсатор с электроемкостью C (рис. 14.6 *а*), омическое сопротивление всюду, кроме емкости, и индуктивность цепи равны нулю. Омическое сопротивление R конденсатора для постоянного тока бесконечно велико. Напряжение на конденсаторе выражается зависимостью:

$$U_C = U_{Cm}\cos\omega t. \qquad (14.29)$$

Ток в цепи будет определяться скоростью изменения заряда на обкладках конденсатора. Используя соотношение для электроемкости, найдем

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_C) = C\frac{dU_C}{dt}. \qquad (14.30)$$

На основании (14.29) запишем

$$I = -U_{Cm}C\omega\sin\omega t = I_m\cos(\omega t + \pi/2), \qquad (14.31)$$

где

$$I_m = U_{Cm}C\omega \qquad (14.32)$$

— амплитуда тока. Как видно из (14.31) и (14.29), фаза тока ($\omega t + \pi/2$), а фаза напряжения — ωt. Следовательно, ток опережает напряжение на $\pi/2$, что показано на векторной диаграмме (рис. 14.6, *б*).

Сравнивая (14.32) с законом Ома, заметим, что выражение

$$X_C = 1/(C\omega) \qquad (14.33)$$

играет роль сопротивления цепи, которое называют ***емкостным***. Оно определяет амплитуду тока: чем меньше емкость C и частота ω, тем меньше I_m. Для постоянного тока ($\omega = 0$) емкость является бесконечно большим сопротивлением, и тока в такой цепи не будет. Заметим, что отсутствие конденсатора в цепях с резисто-

ром или индуктивностью формально означало не $C = 0$, а $X_C = 0$, т. е. $C \to \infty$.

В цепи с конденсатором теплота не выделяется, так как омическое сопротивление проводников равно нулю (нагревание диэлектрика в переменном электрическом поле здесь не учитывается, оно будет рассмотрено позже). Роль емкости сводится к накоплению энергии электрического поля конденсатора и возвращению этой энергии обратно источнику тока. Происходит периодическая перекачка энергии от источника в цепь и от цепи к источнику, в идеальном случае без потерь энергии.

Из формул (14.28) и (14.33) можно убедиться, что индуктивное и емкостное сопротивление в СИ измеряются в омах.

§ 14.3. Полное сопротивление в цепи переменного тока. Резонанс напряжений

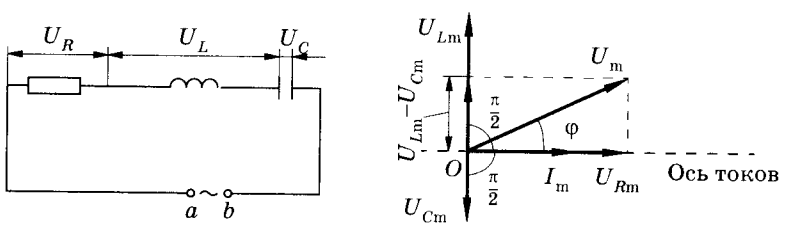
Представим цепь, в которой последовательно соединены резистор, катушка индуктивности и конденсатор (рис. 14.7, *а*). Напряжение на зажимах *a*, *b* цепи, создаваемое внешним источником, выражается зависимостью (14.18). Как было показано в § 14.2, в общем случае сила тока в цепи и напряжение изменяются не в одной фазе, поэтому

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \qquad (14.34)$$

где φ — разность фаз напряжения и силы тока.

Сумма напряжений на отдельных участках равна внешнему напряжению:

$$U = U_m \cos \omega t = U_R + U_L + U_C. \qquad (14.35)$$



а) *б*)

Рис. 14.7

В соответствии с изложенным в § 14.2, напряжения U_R, U_L и U_C можно записать так:

$$U_R = U_{Rm} \cos(\omega t - \varphi) \qquad (14.36)$$

(в фазе с током);

$$U_L = U_{Lm} \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \qquad (14.37)$$

(опережает силу тока по фазе на $\pi/2$);

$$U_C = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2) \qquad (14.38)$$

(отстает от силы тока по фазе на $\pi/2$).

Подставив (14.36)—(14.38) в (14.35), после тригонометрических преобразований можно получить выражение для полного сопротивления цепи переменного тока и разности фаз φ. Однако более просто и наглядно удается это сделать с помощью векторных диаграмм.

На рис. 14.7, *б* по оси токов направлен вектор амплитуды силы тока I_m. Так как по всей цепи амплитуда силы тока одинакова, то амплитуды напряжений на участках отложим относительно этого вектора: вектор U_{Rm} — в одной фазе с силой тока; вектор U_{Lm} — с опережением силы тока по фазе на $\pi/2$, вектор U_{Cm} — с отставанием от силы тока по фазе на $\pi/2$. Суммируя три вектора, находим графически значения U_m и φ. Используя теорему Пифагора, имеем

$$U_m^2 = U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2. \qquad (14.39)$$

Подставляя в (14.39) выражения этих амплитуд из (14.21), (14.27) и (14.32) и учитывая закон Ома, находим

$$I_m^2 Z^2 = I_m^2 R^2 + [I_m L\omega - I_m/(C\omega)]^2, \qquad (14.40)$$

где Z — ***полное сопротивление цепи переменного тока***, называемое ***импедансом***. Из (14.40) получаем

$$Z = \sqrt{R^2 + [L\omega - 1/(C\omega)]^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \qquad (14.41)$$

Омическое сопротивление R цепи называют также ***активным***, оно обусловливает выделение теплоты в цепи в соответствии с законом Джоуля—Ленца. Разность индуктивного и емкостного сопротивлений $(X_L - X_C)$ называют ***реактивным сопротивлением***. Оно не вызывает нагревания элементов электрической цепи.

Запишем закон Ома применительно к амплитудам напряжения и силы тока в цепи (рис. 14.7):

$$I_m = U_m/Z = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad (14.42)$$

Из рис. 14.8 выразим также и значение φ через известные величины:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{Lm} - U_{Cm}}{U_{Rm}} = \frac{I_m L\omega - I_m/(C\omega)}{I_m R} =$$

$$= \frac{L\omega - 1/(C\omega)}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}. \qquad (14.43)$$

Если индуктивное и емкостное сопротивления цепи при их последовательном соединении одинаковы ($X_L = X_C$), то [см. (14.41)] $Z = R$, и из (14.43) имеем $\operatorname{tg}\varphi = 0$ и $\varphi = 0$. Это означает, что сила тока и приложенное напряжение изменяются в одной фазе так, как будто в цепи имеется только омическое сопротивление; напряжения на индуктивности и емкости одинаковы по амплитуде, но противоположны по фазе.

Этот случай вынужденных электрических колебаний называют ***резонансом напряжения.***

Так как $U_{Lm} = U_{Cm}$, то $L\omega_{рез} = 1/(C\omega_{рез})$. Отсюда находим резонансную частоту:

$$\omega_{рез} = \sqrt{1/(LC)}. \qquad (14.44)$$

При этом условии полное сопротивление Z цепи имеет наименьшее значение, равное R, а сила тока достигает наибольшего значения. Векторная диаграмма для резонанса напряжений в цепи показана на рис. 14.8.

Если $L\omega > 1/(C\omega)$, то $\operatorname{tg}\varphi > 0$ и $\varphi > 0$, сила тока отстает по фазе от приложенного напряжения (см. рис. 14.7, *б*). При $L\omega < 1/(C\omega)$ имеем $\operatorname{tg}\varphi < 0$ и $\varphi < 0$. Сила тока опережает по фазе напряжение. Векторная диаграмма для этого случая дана на рис. 14.9.

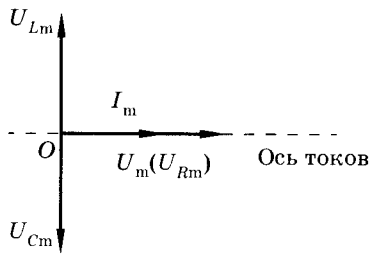


Рис. 14.8

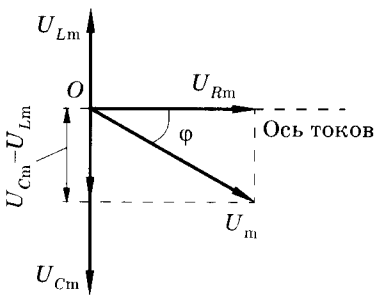


Рис. 14.9

§ 14.4. Импеданс тканей организма. Дисперсия импеданса. Физические основы реографии

Ткани организма проводят не только постоянный (см. § 12.10), но и переменный ток. Опыт показывает, что в этом случае сила тока, проходящая через биологическую ткань, опережает по фазе приложенное напряжение. Следовательно (см. § 14.3), ***емкостное сопротивление тканей больше индуктивного.*** В таблице 24 в качестве примера приведены значения разности фаз тока и напряжения для некоторых тканей (частота 1 кГц).

Таблица 24

Название ткани	Разность фаз в градусах
Кожа человека, лягушки	−55
Нерв лягушки	−64
Мышцы кролика	−65

Отсюда следует, что моделировать электрические свойства биологических тканей можно, используя резисторы, которые обладают активным сопротивлением, и конденсаторы — носители емкостного сопротивления. В качестве модели обычно используют ***эквивалентную электрическую схему тканей организма.*** Она представляет собой схему, состоящую из резисторов и конденсаторов, *частотная зависимость* (*дисперсия*) *импеданса которой близка к частотной зависимости импеданса биологической ткани.*

На рис. 14.10 представлен график частотной зависимости импеданса мышечной ткани. Ради компактности кривая построена в логарифмических координатах. Из графика видны две особенности этой зависимости: во-первых, плавное *уменьшение импеданса с увеличением частоты* (общий ход зависимости импеданса от частоты) и, во-вторых, наличие *трех областей частот*, в которых имеет место отклонение от общего хода зависимости импеданса от частоты: Z мало изменяется. Они были названы, соответственно, областями α-, β- и γ-дисперсии импеданса.

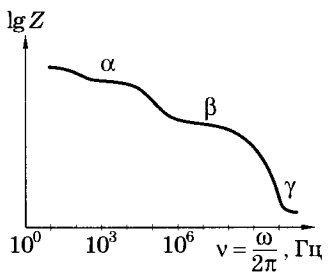


Рис. 14.10

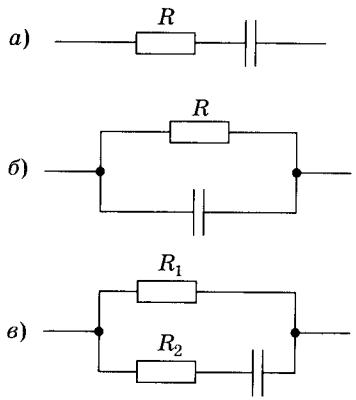


Рис. 14.11

Установим, какая электрическая схема (модель) наиболее удачно отражает *общий ход зависимости импеданса* ткани организма от частоты. В качестве вариантов рассмотрим схемы, представленные на рис. 14.11.

Для схемы, изображенной на рис. 14.11, *а*, частотная зависимость импеданса может быть получена из (14.41) при $L = 0$:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}. \qquad \textbf{(14.45)}$$

В соответствии с формулой (14.45) импеданс уменьшается с увеличением частоты, однако имеется противоречие с опытом: при $\omega \to 0$ $Z \to \infty$. Последнее означает бесконечно большое сопротивление при постоянном токе, что противоречит опыту (рис. 14.10).

Схема, изображенная на рис. 14.11, *б*, соответствует общей тенденции экспериментальной кривой: при увеличении частоты уменьшается емкостное сопротивление и уменьшается импеданс. Однако при $\omega \to \infty$ $X_C \to 0$ и $Z \to 0$, что не соответствует опыту.

Наиболее удачна схема рис. 14.11, *в*, в ней отсутствуют противоречия с опытом, характерные для двух предыдущих схем. Именно такое сочетание резисторов и конденсатора может быть принято за эквивалентную электрическую схему тканей организма. Частотная зависимость импеданса эквивалентной электрической схемы соответствует общему ходу экспериментальной зависимости импеданса от частоты. Важно отметить, что при этом электроемкость и, следовательно, *диэлектрическая проницаемость остаются постоянными.*

Поясним причину возникновения областей α-, β- и γ-дисперсии импеданса. Ткань организма является структурой, обладающей свойствами проводника (электролита) и диэлектрика. Поляризация диэлектрика (§ 12.6) во внешнем электрическом поле происходит не мгновенно, а зависит от времени. Это означает зависимость от времени поляризованности диэлектрика (P_e) при воздействии постоянного электрического поля (E — напряженность электрического поля):

$$P_e = f(t) \text{ при } E = \text{const}. \qquad \textbf{(14.46)}$$

Если электрическое поле изменяется по гармоническому закону, то поляризованность будет также изменяться по гармоническому закону, а амплитуда поляризованности будет зависеть от частоты изменения поля с запаздыванием по фазе:

$$P_{em} = f(\omega) \text{ при } E = E_m \cos \omega t. \qquad \textbf{(14.47)}$$

Из (12.41) получим выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon = 1 + \frac{P_{em}}{\varepsilon_0 E_m}. \qquad \textbf{(14.48)}$$

Из (14.48) следует, что условие (14.47) означает *частотную зависимость диэлектрической проницаемости при воздействии переменным* (гармоническим) *электрическим полем*: $\varepsilon = f(\omega)$. *Изменение диэлектрической проницаемости с изменением частоты электрического поля означает изменение электроемкости и, как следствие, изменение импеданса.*

Запаздывание изменения поляризованности относительно изменения напряженности электрического поля зависит от механизма поляризации вещества. Самый быстрый механизм — *электронная поляризация* (см. § 12.6), так как масса электронов достаточно мала. Это соответствует частотам (около 10^{15} Гц), которые существенно превышают области α-, β-, и γ-дисперсии.

Ориентационная поляризация воды, молекулы которой имеют сравнительно малую массу, соответствует γ-дисперсии (частоты около 20 ГГц).

Крупные полярные органические молекулы, например белки, имеют значительную массу и успевают реагировать на переменное электрическое поле с частотой 1—10 МГц. Это соответствует β-дисперсии.

При α-дисперсии происходит поляризация целых клеток в результате диффузии ионов, что занимает относительно большое время, и α-дисперсии соответствует область низких частот (0,1—10 кГц). В этой области емкостное сопротивление мембран очень велико, поэтому преобладают токи, огибающие клетки и протекающие через окружающие клетки растворы электролитов.

Итак, области α-, β- и γ-дисперсии импеданса объясняются тем, что с увеличением частоты переменного электрического поля в явлении поляризации участвуют разные структуры биологических тканей: при низких частотах на изменение поля реагируют все структуры (α-дисперсия), с увеличением частоты реагируют крупные молекулы-диполи органических соединений и молекулы воды (β-дисперсия), а при самых больших частотах реагируют только молекулы воды (γ-дисперсия). Во всех случаях имеет место электронная поляризация. С увеличением частоты электрического тока (электрического поля) все меньше структур будет реагировать на изменение этого поля и меньше будет значение поляризо-

ванности P_{em}. Отсюда, согласно (14.48), с увеличением частоты будет уменьшаться диэлектрическая проницаемость ε, а следовательно, и электроемкость C, а это, согласно (14.33), приведет к увеличению емкостного сопротивления X_C и импеданса Z. Следовательно, на фоне общего хода зависимости $Z = f(\omega)$ (см. рис. 14.10) появляются области с меньшим убыванием Z при возрастании частоты (области α-, β- и γ-дисперсии).

Частотная зависимость импеданса позволяет оценить жизнеспособность тканей организма, что важно знать для пересадки (трансплантации) тканей и органов. Различие в частотных зависимостях импеданса получается и в случаях здоровой и больной ткани.

Импеданс тканей и органов зависит также и от их физиологического состояния. Так, при кровенаполнении сосудов импеданс изменяется в зависимости от состояния сердечно-сосудистой деятельности.

Диагностический метод, основанный на регистрации изменения импеданса тканей в процессе сердечной деятельности, называют реографией (импеданс-плетизмография).

С помощью этого метода получают реограммы головного мозга (***реоэнцефалограмма***), сердца (***реокардиограмма***), магистральных сосудов, легких, печени и конечностей. Измерения обычно проводят на частоте 30 кГц.

В заключение отметим, что знание пассивных электрических свойств биологических тканей важно при разработке теоретических основ методов электрографии органов и тканей, так как создаваемый токовыми диполями электрический ток проходит через них. Кроме того, представления о дисперсии импеданса позволяют оценить механизм действия токов и полей, используемых в терапевтических целях.

§ 14.5. Электрический импульс и импульсный ток

Электрическим импульсом назовем кратковременное изменение электрического напряжения или силы тока.

В технике импульсы подразделяются на две большие группы: видео- и радиоимпульсы.

Видеоимпульсы — это такие электрические импульсы тока или напряжения, которые имеют постоянную составляющую, отличную от нуля. Таким образом, видеоимпульс имеет преимущественно одну полярность. По форме видеоимпульсы бывают (рис. 14.12): а) прямоугольные; б) пилообразные; в) трапециедальные; г) экспоненциальные; д) колоколообразные и др.

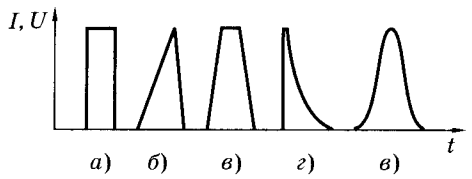


Рис. 14.12

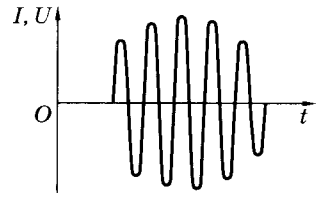


Рис. 14.13

Радиоимпульсы — это модулированные электромагнитные колебания (рис. 14.13).

В физиологии термином «электрический импульс», или «электрический сигнал», обозначают именно видеоимпульсы, поэтому рассмотрим параметры этих импульсов, оценивающие их форму, длительность и свойства отдельных участков.

Характерными участками импульса (рис. 14.14) являются: *1—2* — фронт, *2—3* — вершина, *3—4* — срез (или задний фронт), *4—5* — хвост. Импульс, изображенный на этом рисунке, очень схематичен. У него четко определены моменты начала t_1, перехода от фронта к вершине t_2 и конца импульса t_5. В реальном сигнале (импульсе) эти времена размыты (рис. 14.15), поэтому их экспериментальное определение может внести существенную погрешность.

Для уменьшения возможной погрешности условились выделять моменты времени, при которых напряжение (или сила тока) имеет значения $0{,}1\ U_m$ и $0{,}9\ U_m$, где U_m — амплитуда, т. е. наибольшее значение импульса (рис. 14.15). На этом же рисунке показаны: $\tau_ф$ — длительность фронта; $\tau_{ср}$ — длительность среза и $\tau_и$ — длительность импульса. Отношение

$$(0{,}9\ U_m - 0{,}1\ U_m)/\tau_ф = 0{,}8\ U_m/\tau_ф$$

называют ***крутизной фронта.***

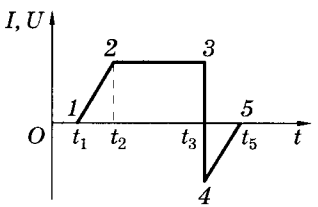


Рис. 14.14

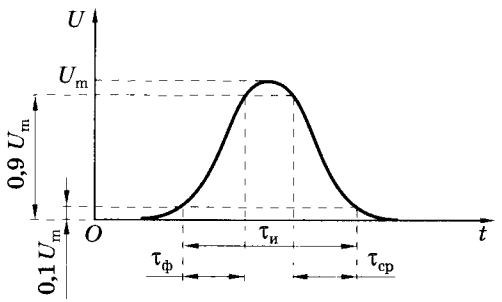


Рис. 14.15

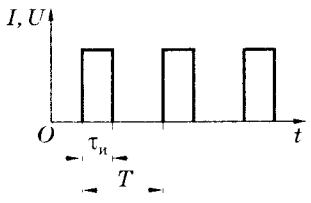


Рис. 14.16

Повторяющиеся импульсы называют импульсным током. Он характеризуется периодом (периодом повторения импульсов) T — средним временем между началами соседних импульсов (рис. 14.16) и частотой (частотой повторения импульсов) $f = 1/T$. ***Скважностью следования импульсов*** называется отношение:

$$Q = T/\tau_и = 1/(f\tau_и). \qquad \textbf{(14.49)}$$

Величина, обратная скважности, есть ***коэффициент заполнения***:

$$K = 1/Q = f\tau_и. \qquad \textbf{(14.50)}$$

§ 14.6. Электромагнитные волны

Обобщая результаты опытов Х. К. Эрстеда по воздействию электрического тока на магнитную стрелку, опытов Фарадея по электромагнитной индукции и других фактов, Максвелл создал в рамках классической физики теорию электромагнитного поля.

В основе теории Максвелла лежат два положения: а) всякое переменное электрическое поле порождает магнитное и б) всякое переменное магнитное поле порождает электрическое (явление электромагнитной индукции).

Взаимное образование электрических и магнитных полей приводит к понятию **электромагнитной волны** — распространение единого электромагнитного поля в пространстве.

Если распространение плоской механической волны описывалось одним уравнением (5.48), то распространение плоской электромагнитной волны описывается двумя уравнениями — соответственно для электрической и магнитной компонент единого электромагнитного поля:

$$E = E_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \text{ и } B = B_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]; \qquad \textbf{(14.51)}$$

здесь E и B соответственно напряженность электрического поля и магнитная индукция, E_m и B_m — их амплитудные значения.

Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{v}$ (скорость распространения волны) взаимно перпендикулярны (см. рис. 14.17).

В теории Максвелла было получено выражение для скорости распространения электромагнитной волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad \textbf{(14.52)}$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ — скорость света в вакууме, ε и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости, ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные.

Таким образом, скорость распространения электромагнитных волн равна скорости света. Это послужило основанием для создания Максвеллом электромагнитной теории света.

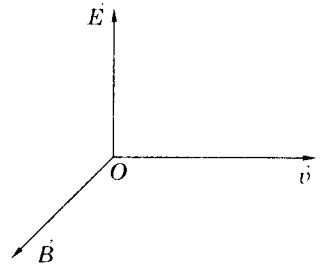


Рис. 14.17

Сопоставляя (14.52) и выражение для показателя преломления $n = c/v$, можно установить связь между n и диэлектрической и магнитной проницаемостями:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \qquad \textbf{(14.53)}$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля складывается из объемных плотностей энергии электрического (12.46) и магнитного (13.8) полей:

$$w_{эм} = w_{эл} + w_м = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \qquad \textbf{(14.54)}$$

Электрическая и магнитная составляющие электромагнитного поля в диэлектрике энергетически равноправны, поэтому

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}, \qquad \textbf{(14.55)}$$

тогда для объемной плотности энергии можно записать несколько выражений:

$$w_{эм} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}EB. \qquad \textbf{(14.56)}$$

Подставляя в (14.56) выражение (14.51), получаем

$$w_{эм} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]B_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m B_m \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \qquad \textbf{(14.57)}$$

Усредняя по времени (за период) выражение (14.57) и учитывая, что среднее значение $\langle\cos^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\rangle = 0{,}5$, получаем выражение для ***среднего значения объемной плотности энергии электромагнитной волны***:

$$\langle w_{эм}\rangle = 0{,}5\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m B_m. \qquad \textbf{(14.58)}$$

Плотность потока энергии волн (***интенсивность волны***) получим из общей формулы (5.54), подставляя в нее (14.58) и (14.52):

$$I = 0{,}5\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m B_m \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = 0{,}5\frac{E_m B_m}{\mu\mu_0}. \qquad (14.59)$$

Из (14.56) можно получить $E_m B_m = E_m^2\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$. Если подставить это выражение в (14.59), то получим:

$$I = 0{,}5\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m^2 = 0{,}5\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}B_m^2. \qquad (14.60)$$

Как видно, интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля. Заметим, что аналогичная связь между интенсивностью и амплитудой существует и для механических волн [см. (5.56)].

§ 14.7. Шкала электромагнитных волн. Классификация частотных интервалов, принятая в медицине

Из теории Максвелла вытекает, что различные электромагнитные волны, в том числе и световые, имеют общую природу. В связи с этим целесообразно представить всевозможные электромагнитные волны (электромагнитное излучение) на единой шкале (рис. 14.18).

Вся шкала условно подразделена на шесть диапазонов: ***радиоволны*** (длинные, средние и короткие), ***инфракрасные, видимые, ультрафиолетовые, рентгеновские волны*** и ***гамма-излучение***. Эта



Рис. 14.18

классификация определяется либо механизмом образования волн, их частотой, либо возможностью их зрительного восприятия человеком.

Радиоволны обусловлены переменными токами в проводниках и электронными потоками (макроизлучатели). Инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучения исходят из атомов, молекул и быстрых заряженных частиц (микроизлучатели). Рентгеновское излучение возникает при внутриатомных процессах, γ-излучение имеет ядерное происхождение.

Некоторые диапазоны перекрываются, так как волны одной и той же длины могут образоваться в разных процессах. Так, наиболее коротковолновое ультрафиолетовое излучение перекрывается длинноволновым рентгеновским.

В этом отношении очень характерна пограничная область инфракрасных волн и радиоволн. До 1922 г. между этими диапазонами был пробел. Наиболее коротковолновое излучение этого незаполненного промежутка имело молекулярное (атомное) происхождение (излучение нагретого тела), а наиболее длинноволновое излучалось макроскопическими вибраторами Герца. Российским физиком А. А. Глаголевой-Аркадьевой[1] было предложено пропускать искру через смесь большого числа мелких металлических опилок в масле. При этом можно было получать различные электромагнитные волны с длиной волны 82 мкм и более. Таким образом, диапазоны инфракрасных и радиоволн были сомкнуты.

Сейчас никого не удивляет, что даже миллиметровые волны могут генерироваться не только радиотехническими средствами, но и молекулярными переходами. Появился раздел — *радиоспектроскопия*, который изучает поглощение и излучение радиоволн различными веществами.

В медицине принято следующее условное разделение электромагнитных колебаний на частотные диапазоны (табл. 25).

Таблица 25

Низкие (НЧ)	до 20 Гц
Звуковые (ЗЧ)	20 Гц — 20 кГц
Ультразвуковые или надтональные (УЗЧ)	20 кГц — 200 кГц
Высокие (ВЧ)	200 кГц — 30 МГц
Ультравысокие (УВЧ)	30 МГц — 300 МГц
Сверхвысокие (СВЧ)	300 МГц — 300 ГГц
Крайневысокие (КВЧ)	свыше 300 ГГц

[1] Александра Андреевна Глаголева-Аркадьева была первым заведующим кафедрой физики 2-го Московского медицинского института (ныне Российский медицинский университет).

Часто физиотерапевтическую электронную аппаратуру низкой и звуковой частот называют ***низкочастотной***. Электронную аппаратуру всех других частот называют обобщающим понятием ***высокочастотная***.

ГЛАВА 15

Физические процессы в тканях при воздействии током и электромагнитными полями

Все вещества состоят из молекул, каждая из них является системой зарядов. Поэтому состояние тел существенно зависит от протекающих через них токов и от воздействующего электромагнитного поля. Электрические свойства биологических тел более сложны, чем свойства неживых объектов, ибо организм — это еще и совокупность ионов с переменной концентрацией в пространстве. Первичный механизм воздействия токов и электромагнитных полей на организм — физический, он и рассматривается в главе применительно к медицинским лечебным методам.

§ 15.1. Первичное действие постоянного тока на ткани организма. Гальванизация. Электрофорез лекарственных веществ

Человеческий организм в значительной степени состоит из биологических жидкостей, содержащих большое количество ионов, которые участвуют в различных обменных процессах.

Под влиянием электрического поля ионы движутся с разной скоростью и скапливаются около клеточных мембран, образуя встречное электрическое поле, называемое *поляризационным*. Таким образом, первичное действие постоянного тока связано с движением ионов, их разделением и изменением их концентрации в разных элементах тканей.

Воздействие постоянного тока на организм зависит от силы тока, поэтому весьма существенно электрическое сопротивление тканей и прежде всего кожи. Влага, пот значительно уменьшают сопротивление, что даже при небольшом напряжении может вызвать значительный ток через организм.

Непрерывный постоянный ток напряжением 60—80 В используют как лечебный метод физиотерапии (***гальванизация***).

Источником тока обычно служит двухполупериодный выпрямитель — аппарат для гальванизации. Применяют для этого электроды из листового свинца или станиоля толщиной 0,3—0,5 мм. Так как продукты электролиза раствора поваренной соли, содержащегося в тканях, вызывают прижигание, то между электродами и кожей помещают гидрофильные прокладки, смоченные, например, теплой водой.

Дозируют силу постоянного тока по показаниям миллиамперметра, при этом обязательно учитывают предельно допустимую плотность тока — 0,1 мА/см^2.

Постоянный ток используют в лечебной практике также и для введения лекарственных веществ через кожу или слизистые оболочки. Этот метод получил название ***электрофореза лекарственных веществ***.

Для этой цели поступают так же, как и при гальванизации, но прокладку активного электрода смачивают раствором соответствующего лекарственного вещества. Лекарство вводят с того полюса, зарядом которого оно обладает: анионы вводят с катода, катионы — с анода.

Введение лекарственных веществ с помощью постоянного тока хорошо иллюстрирует следующий опыт. Двум кроликам выбривают участки кожи на обоих боках и к выбритым местам прикрепляют фланелевые прослойки; одни из них смочены раствором азотнокислого стрихнина, другие — раствором поваренной соли (рис. 15.1). На фланель накладывают электроды и пропускают по цепи ток силой 50 мА. Спустя некоторое время кролик, у которого стрихнин на аноде, погибает при типичных явлениях отравления этим веществом. Другой же кролик, у которого стрихнин на катоде, не погибает, но если изменить направление тока, то и он погибнет.

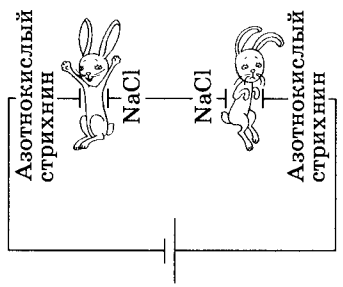


Рис. 15.1

Гальванизацию и электрофорез лекарственных веществ можно осуществлять с помощью жидкостных электродов в виде ванн, в которые погружаются конечности пациента.

§ 15.2. Воздействие переменными (импульсными) токами

Действие переменного тока на организм существенно зависит от его частоты. При низких, звуковых и ультразвуковых частотах (см. § 14.7) переменный ток, как и постоянный, вызывает раздражающее действие на биологические ткани. Это обусловлено смещением ионов растворов электролитов, их разделением, изменением их концентрации в разных частях клетки и межклеточного пространства.

Раздражение тканей зависит также и от формы импульсного тока, длительности импульса и его амплитуды. Так, например, увеличение крутизны фронта импульса уменьшает пороговую силу тока, который вызывает сокращение мышц. Это свидетельствует о том, что мышцы приспосабливаются к изменению силы тока, наступают ионные компенсационные процессы. Крутизна прямоугольного импульса очень велика (теоретически — бесконечна), поэтому для таких импульсов пороговая сила тока меньше, чем для других. Существует определенная связь между пороговой I_{max} амплитудой и длительностью прямоугольного импульса, который вызывает раздражение (рис. 15.2). Каждой точке кривой и точкам, лежащим выше кривой, соответствуют импульсы, которые вызывают сокращение мышц. Точки, расположенные ниже кривой, отображают импульсы, не вызывающие раздражения. Кривая на рисунке называется ***характеристикой возбуждения***. Она специфична для разных мышц.

Так как специфическое физиологическое действие электрического тока зависит от формы импульсов, то в медицине для стимуляции центральной нервной системы (электросон, электронаркоз), нервно-мышечной системы, сердечно-сосудистой системы (кардиостимуляторы, дефибрилляторы) и т. д. используют токи с различной временно́й зависимостью.

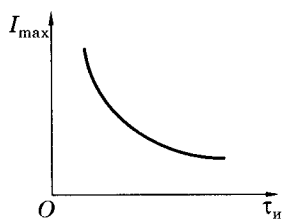


Рис. 15.2

Ток с импульсами прямоугольной формы с длительностью импульсов $\tau_и = 0{,}1$—1 мс и диапазоном частот 5—150 Гц используют для лечения электросном, токи с $\tau_и = 0{,}8$—3 мс и диапазоном частот 1—1,2 Гц применяют во вживляемых (имплантируемых) кардиостимуляторах. Ток с импульсами треугольной формы (рис. 15.3, *а*; с $\tau_и$ = = 1—1,5 мс, частота 100 Гц), а также с импульсами экспоненциальной формы (рис. 15.3, *б*; $\tau_и$ = 3—60 мс, частоты 8—80 Гц) применяют для возбуждения мышц, в частности при электрогимнастике. Для разных видов электролечения используют диадинамические токи, предложенные Бернаром. На рис. 15.3, *в* показана форма одного из видов такого импульсного тока, частота следования импульсов около 100 Гц.

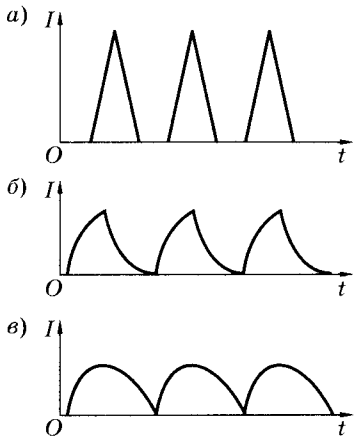


Рис. 15.3

Действие переменного (гармонического) тока на организм при низких, звуковых и ультразвуковых частотах оценивается следующими пороговыми значениями: порогом ощутимого тока и порогом неотпускающего тока.

Порогом ощутимого тока называют наименьшую силу тока, раздражающее действие которого ощущает человек. Эта величина зависит от места и площади контакта тела с подведенным напряжением, частоты тока, индивидуальных особенностей человека (пол, возраст, специфика организма). Для однородных групп испытуемых порог ощутимого тока подчиняется закону нормального распределения со средним значением около 1 мА на частоте 50 Гц у мужчин для участка предплечье — кисть, на рис. 15.4 (кривая *1*) показана зависимость среднего значения порога ощутимого тока для этой группы испытуемых от частоты тока.

Если увеличивать силу тока от порога ощутимого его значения, то можно вызвать такое сгибание сустава, при котором человек не сможет самостоятельно разжать руку и освободиться от проводника — источника напряжения. Минимальную силу этого тока называют ***порогом неотпускающего тока***. Токи меньшей силы являются ***отпускающими***. Порог неотпускающего тока — важный параметр, его превышение может быть губительным для человека. Значения

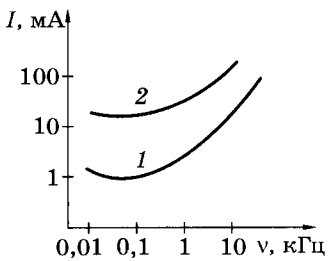


Рис. 15.4

порога неотпускающего тока также подчиняются закону нормального распределения. На рис. 15.4 (кривая *2*) графически представлена зависимость среднего по группе испытуемых мужчин значения порога неотпускающего тока от частоты.

Воздействуя на сердце, ток может вызвать фибрилляцию желудочков, которая приводит к гибели человека. Пороговая сила тока, вызывающего фибрилляцию, зависит от плотности тока, протекающего через сердце, частоты и длительности его действия.

При частотах приблизительно более 500 кГц смещение ионов становится соизмеримым с их смещением в результате молекулярно-теплового движения, поэтому ток или электромагнитная волна не будет вызывать раздражающего действия. Основным первичным эффектом в этом случае является тепловое воздействие. Лечебное прогревание высокочастотными электромагнитными колебаниями обладает рядом преимуществ перед таким традиционным и простым способом, который реализуется грелкой.

Прогревание грелкой внутренних органов осуществляется за счет теплопроводности наружных тканей — кожи и подкожножировой клетчатки. Высокочастотное прогревание происходит за счет образования теплоты во внутренних частях организма, т. е. его можно создать там, где оно нужно. Выделяемая теплота зависит от диэлектрической проницаемости тканей, их удельного сопротивления и частоты электромагнитных колебаний. Подбирая соответствующую частоту, можно осуществлять «термоселективное» воздействие, т. е. преимущественное образование теплоты в нужных тканях и органах.

Прогревание высокочастотными колебаниями удобно и тем, что, регулируя мощность генератора, можно управлять мощностью тепловыделения во внутренних органах, а при некоторых процедурах возможно и дозирование нагрева. Кроме теплового эффекта электромагнитные колебания и волны при большой частоте вызывают и внутримолекулярные процессы, которые приводят к некоторым специфическим воздействиям.

Чтобы нагреть ткани, необходимо пропускать большой ток. Как уже было отмечено, в этих случаях постоянный ток или ток низкой, звуковой и даже ультразвуковой частот может привести к электролизу и разрушению ткани. Поэтому для нагревания токами используются токи высокой частоты (см. § 14.7).

Мощность тока, расходуемую на нагревание тканей, вычислим по формуле $P = I^2R$. Преобразуем ее, считая, что биологическая ткань расположена между двумя плоскими электродами с площадью S, находящимися на расстоянии l, вплотную к ним (аналогично тому, что изображено на рис. 12.28).

Пусть плотность тока j одинакова во всех точках ткани и равна плотности тока на электродах. Учитывая, что $R = \rho l/S$, получаем

$$P = I^2R = j^2S^2\rho l/S = j^2\rho V, \qquad \textbf{(15.1)}$$

где $V = Sl$ — объем ткани, ρ — ее удельное сопротивление. Разделив (15.1) на этот объем, получим количество теплоты q, выделяющееся за 1 с в 1 м^3:

$$q = j^2\rho. \qquad \textbf{(15.2)}$$

Как и следовало ожидать, q зависит от плотности тока и удельного сопротивления ткани.

Пропускание тока высокой частоты через ткань используют в физиотерапевтических процедурах, называемых ***диатермией*** *и* ***местной дарсонвализацией****.*

При диатермии применяют ток частотой около 1 МГц со слабозатухающими колебаниями, напряжение 100—150 В; сила тока несколько ампер. Так как наибольшим удельным сопротивлением обладают кожа, жир, кости, мышцы, то они и нагреваются сильнее. Наименьшее нагревание у органов, богатых кровью или лимфой, — легкие, печень, лимфатические узлы. Недостаток диатермии — большое количество теплоты непродуктивно выделяется в слое кожи и подкожной клетчатке.

В последнее время диатермия уходит из терапевтической практики и заменяется другими методами высокочастотного воздействия. Это обусловлено повышенной опасностью диатермии: неисправность аппарата, случайное искрение в месте наложения электродов при прямом двухполюсном касании биологического объекта и значительном токе могут привести к трагическим последствиям.

Для местной дарсонвализации применяют ток частотой 100—400 кГц, напряжение его — десятки киловольт, а сила тока небольшая — 10—15 мА.

Ток к пациенту П (рис. 15.5) поступает от источника высокочастотных колебаний И через вакуумный или заполненный графитом стеклянный электрод Э. Второго электрода нет, так как участок между точкой А цепи и пациентом обладает электроемкостью (на рисунке на этом участке условно изображен конденсатор), что означает [см. (14.33)] электропроводность среды для переменного тока. Действующим фактором является не только импульсный ток высокой час-

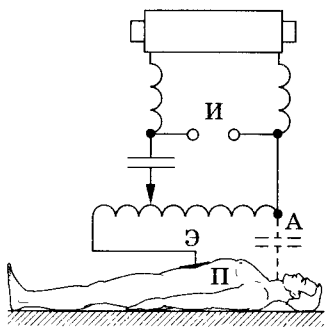


Рис. 15.5

тоты, но и электрический разряд, возникающий между кожей пациента и электродом.

Токи высокой частоты используются также и для хирургических целей (***электрохирургия***). Они позволяют прижигать, «сваривать» ткани (***диатермокоагуляция***) или рассекать их (***диатермотомия***).

При диатермокоагуляции применяют ток плотностью 6—10 мА/мм^2, в результате чего температура ткани повышается и ткань коагулирует. При диатермотомии плотность тока доводят до 40 мА/мм^2, в результате чего острым электродом (электроножом) удается рассечь ткань. Электрохирургическое воздействие имеет определенные преимущества перед обычным хирургическим вмешательством.

§ 15.3. Воздействие переменным магнитным полем

В проводящих телах, находящихся в переменном магнитном поле, вследствие электромагнитной индукции возникают токи, которые принято называть ***вихревыми***.

Эти токи могут использоваться для прогревания биологических тканей и органов. Такой лечебный метод — ***индуктотермия*** — имеет ряд преимуществ перед методом, изложенным в § 15.2.

Рассмотрим, от каких факторов зависит степень нагревания тканей при индуктотермии. Схема воздействия показана на рис. 15.6. Согласно основному закону электромагнитной индукции в контуре при изменении магнитного потока возникает ЭДС, равная

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий контур, S — площадь площадки, охватываемой контуром, B — магнитная индукция во всех точках этой площадки [см. (13.7); предполагается, что $\alpha = 0$]. Из последней формулы на основании закона Ома можно записать выражение для силы тока в контуре:

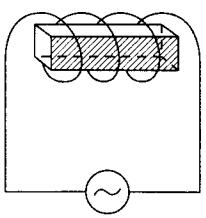


Рис. 15.6

$$I = -\frac{S}{R}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

Используя формулу $R = \rho l/S$ для сопротивления, получаем

$$I = -\frac{k_1}{\rho}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, \qquad (15.3)$$

где k_1 — некоторый коэффициент, учитывающий геометрические размеры образца (ткани). Предположим, что магнитная индукция изменяется по гармоническому закону $B = B_\mathrm{m}\cos\omega t$, тогда

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -B_\mathrm{m}\omega\sin\omega t. \qquad (15.4)$$

Подставляя в (15.2) вместо плотности тока силу тока из (15.3) и учитывая (15.4), находим

$$q = \frac{k}{\rho^2}B_\mathrm{m}^2\omega^2\rho\sin^2\omega t = k\frac{\omega^2}{\rho}B_\mathrm{m}^2\sin^2\omega t, \qquad (15.5)$$

где k — коэффициент, зависящий от размеров образца.

Таким образом, при индуктотермии количество теплоты, выделяющееся в тканях, пропорционально квадратам частоты и индукции переменного магнитного поля и обратно пропорционально удельному сопротивлению. Поэтому сильнее будут нагреваться ткани, богатые сосудами, например мышцы, чем такие ткани, как жир. Обычно при индуктотермии применяют местное воздействие переменного магнитного поля, используя спирали или плоские свернутые кабели.

Лечение вихревыми токами возможно также при общей дарсонвализации. В этом случае пациента помещают в клетку-соленоид, по виткам которого пропускают импульсный ток высокой частоты.

§ 15.4. Воздействие переменным электрическим полем

В тканях, находящихся в переменном электрическом поле (см. схематическое изображение на рис. 15.7, здесь электроды *не касаются* ткани), возникают токи проводимости в проводниках и частично в диэлектрике, а также имеет место изменение поляризации диэлектрика. Обычно для лечебной цели используют электрические поля ультравысокой частоты, поэтому соответствующий физиотерапевтический метод получил название ***УВЧ-терапии***.

Для того чтобы оценить эффективность действия поля УВЧ, необходимо рассчитать количество теплоты, выделяющееся в проводниках и диэлектриках.

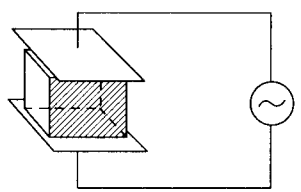


Рис. 15.7

Пусть тело, проводящее электрический ток, находится в переменном электрическом поле. В данном случае электроды не касаются тела. Поэтому выделяющееся в теле количество теплоты целесообразно выразить не через плотность тока на электродах [см. (15.2)], а через напряженность E электрического поля в проводящем теле.

Выполним достаточно простые преобразования: $P = U^2/R = E^2l^2S/(\rho l) = E^2Sl/\rho$. Разделив это равенство на объем Sl тела, получим количество теплоты, выделяющееся за 1 с в 1 м^3 ткани:

$$q = P/(Sl) = E^2/\rho, \qquad \textbf{(15.6)}$$

где E — эффективная напряженность[1] электрического поля.

Рассмотрим теперь диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε, находящийся в переменном электрическом поле.

Среднее значение мощности в цепи переменного тока выражается формулой:

$$P = (U_m I_m/2)\cos\varphi = UI\cos\varphi, \qquad \textbf{(15.7)}$$

где φ — разность фаз между силой тока и напряжением. Если применить формулу (15.7) к конденсатору с *идеальным изолятором* (см. рис. 14.6), то, учитывая $\varphi = \pi/2$, получаем нулевое значение мощности. В *реальном диэлектрике* небольшой ток проводимости и периодическое изменение поляризации вызывают поглощение подводимой электрической мощности, диэлектрик нагревается, на что расходуется часть энергии переменного электрического поля, т. е. имеют место диэлектрические потери.

Как видно из формулы (15.7), наличие потерь в диэлектрике означает, что между силой тока и напряжением будет сдвиг по фазе $\varphi \neq \pi/2$ (рис. 15.8).

Представим на векторной диаграмме (см. рис. 15.8) амплитуду тока I_m двумя составляющими: реактивной I_p и активной I_a. Реактивная составляющая сдвинута по фазе относительно напряжения U на $\pi/2$ и не вызывает диэлектрических потерь, активная составляющая направлена вдоль вектора напряжения, она и обусловливает диэлектрические потери. Угол δ между I_m и I_p называют ***углом диэлектрических потерь***. Как видно на рис. 15.8, чем больше этот угол, тем больше активная составляющая силы тока. На практике реактивную и активную составляющие силы тока связывают через тангенс угла диэлектрических потерь:

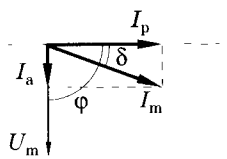


Рис. 15.8

$$\frac{I_a}{I_p} = \operatorname{tg}\delta,\ I_a = I_p \operatorname{tg}\delta. \qquad \textbf{(15.8)}$$

Из рис. 15.8 видно, что $I_a = I_m\cos\varphi$; сопоставляя это с (15.8), имеем

$$I_m\cos\varphi = I_p\operatorname{tg}\delta. \qquad \textbf{(15.9)}$$

Учитывая (15.9), преобразуем формулу для мощности (15.7):

$$P = \frac{U_m}{2} I_p \operatorname{tg}\delta. \qquad \textbf{(15.10)}$$

Амплитуда реактивной составляющей силы тока I_p — это фактически амплитуда силы тока, соответствующая идеальному конденсатору [см. (14.32)]. Поэтому

$$I_p = U_m C\omega. \qquad \textbf{(15.11)}$$

Подставляя (15.11) в (15.10) и раскрывая выражение для емкости плоского конденсатора, получаем среднюю мощность:

$$P = \frac{U_m^2}{2}\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{l}\omega\operatorname{tg}\delta. \qquad \textbf{(15.12)}$$

Вместо амплитуды напряжения U_m используем эффективное значение $U = U_m/\sqrt{2}$ или $U^2 = U_m^2/2$. Из (15.12) имеем

$$P = U^2\omega(\varepsilon\varepsilon_0 S/l)\operatorname{tg}\delta.$$

Отсюда, выражая напряжение через напряженность электрического поля, получаем

$$P = E^2l^2\omega(\varepsilon\varepsilon_0 S/l)\operatorname{tg}\delta = \omega E^2\varepsilon\varepsilon_0\operatorname{tg}\delta Sl.$$

Разделив это равенство на объем Sl диэлектрика, найдем

$$q = \frac{P}{Sl} = \omega E^2\varepsilon\varepsilon_0\operatorname{tg}\delta \qquad \textbf{(15.13)}$$

(под E следует понимать эффективное значение напряженности электрического поля).

Сопоставляя формулы (15.6) и (15.13), можно заметить, что в обоих случаях выделяемое количество теплоты пропорционально квадрату эффективной напряженности электрического поля. Она также зависит от характеристик среды, а для диэлектрика — и от частоты поля.

В России в аппаратах УВЧ используют частоту 40,58 МГц, в случае токов такой частоты диэлектрические ткани организма нагреваются интенсивнее проводящих.

[1] Эффективная напряженность электрического поля, аналогично силе тока и напряжению, связана с амплитудным значением соотношением $E = E_m/\sqrt{2}$.

§ 15.5. Воздействие электромагнитными волнами

Физиотерапевтические методы, основанные на применении электромагнитных волн СВЧ-диапазона, в зависимости от длины волны получили два названия: *микроволновая терапия* (частота 2375 МГц, длина волны 12,6 см) и *ДЦВ-терапия*, т. е. терапия дециметровых волн (частота 460 МГц, длина волны 65,2 см).

Наиболее разработана в настоящее время теория о *тепловом действии* СВЧ-полей на биологические объекты. Электромагнитная волна поляризует молекулы вещества и периодически переориентирует их как электрические диполи. Кроме того, электромагнитная волна воздействует на ионы биологических систем и вызывает переменный ток проводимости. Таким образом, в диэлектрике, находящемся в электромагнитном поле, происходит как изменение поляризации диэлектрика, так и протекание токов проводимости. Все это приводит к нагреванию вещества. Большое значение имеют диэлектрические потери, обусловленные переориентацией молекул воды (γ-дисперсия, см. § 14.4). В связи с этим максимальное поглощение энергии микроволн происходит в таких тканях, как мышцы и кровь, а в костной и жировой ткани воды меньше, они меньше и нагреваются.

На границе сред с разными коэффициентами поглощения электромагнитных волн, например на границе тканей с высоким и низким содержанием воды, могут возникнуть стоячие волны, обусловливая местный перегрев тканей. Наиболее подвержены перегреву ткани с недостаточным кровоснабжением и, следовательно, плохой терморегуляцией, например хрусталик глаза, стекловидное тело и др.

Электромагнитные волны могут влиять на биологические процессы, разрывая водородные связи и влияя на ориентацию макромолекул ДНК и РНК.

При попадании электромагнитной волны на участок тела происходит ее частичное отражение от поверхности кожи. Степень отражения зависит от различия диэлектрических проницаемостей воздуха и биологических тканей. Если облучение электромагнитными волнами осуществляется дистанционно (на расстоянии), то может отражаться до 75% энергии электромагнитных волн. В этом случае невозможно по мощности, генерируемой излучателем, судить об энергии, поглощаемой пациентом в единицу времени. При контактном облучении электромагнитными волнами (излучатель соприкасается с облучаемой поверхностью) генерируемая мощность соответствует мощности, воспринимаемой тканями организма.

Глубина проникновения электромагнитных волн в биологические ткани зависит от способности этих тканей поглощать энергию волн, которая, в свою очередь, определяется как строением тканей (главным образом содержанием воды), так и частотой электромагнитных волн. Так, сантиметровые электромагнитные волны, используемые в физиотерапии, проникают в мышцы, кожу, биологические жидкости на глубину около 2 см, а в жир, кости — около 10 см. Для дециметровых волн эти показатели приблизительно в 2 раза выше.

Учитывая сложный состав тканей, условно считают, что при микроволновой терапии глубина проникновения электромагнитных волн равна 3—5 см от поверхности тела, а при ДЦВ-терапии — до 9 см.

РАЗДЕЛ

5

Медицинская электроника

Электроника. Это понятие широко распространено в настоящее время. Являясь технической наукой, электроника основывается прежде всего на достижениях физики. Можно смело сказать, что без электронной аппаратуры сегодня невозможны ни диагностика заболеваний, ни эффективное их лечение. В разделе излагаются лишь некоторые, наиболее существенные аспекты общей и медицинской электроники и описывается наиболее характерная медицинская электронная аппаратура. Некоторые приборы и аппараты медицинской электроники представлены в других разделах.

ГЛАВА 16

Содержание электроники. Электробезопасность. Надежность медицинской электронной аппаратуры

В главе наряду с общим содержанием электроники рассматриваются важные практические вопросы: электробезопасность и надежность медицинской электронной аппаратуры.

§ 16.1. Общая и медицинская электроника. Основные группы медицинских электронных приборов и аппаратов

Физика, как и любая другая наука, развивалась и развивается в связи с потребностями общества, ее прогресс стимулируется практическими задачами. В свою очередь, развитие физики способствует решению практических, в том числе и технических, проблем. Так, например, в результате достижений в области исследований электромагнитных явлений получили бурное развитие соответствующие отрасли техники: электро- и радиотехника. Постепенно многие разделы радиотехники стали именовать ***радиоэлектроникой,*** или ***электроникой.***

Термин «электроника» в значительной степени условный, ему трудно дать четкое определение. Правильнее всего, вероятно, под *электроникой* понимать *область науки и техники, в которой рассматриваются работа и применение электровакуумных, ионных и полупроводниковых устройств* (*приборов*).

Электронику в широком смысле слова (общую электронику) можно подразделить на группы либо по области применения, либо по классу используемых устройств, либо по категории теоретических вопросов. Так выделяют *физическую электронику*, имея в виду раздел физики, рассматривающий электропроводимость тел, контактные и термоэлектронные явления; под *технической электроникой* понимают те ее разделы, в которых описываются

устройства приборов и аппаратов и схемы их включения; *полупроводниковой электроникой* называют то, что относится к применению полупроводниковых приборов, и т. п.

Иногда всю электронику подразделяют на три крупные области: *вакуумная электроника*, которая охватывает вопросы создания и применения электровакуумных приборов (электронные лампы, фотоэлектронные устройства, рентгеновские трубки)[1]; *твердотельная электроника*, которая охватывает вопросы создания и применения полупроводниковых приборов, в том числе и интегральных схем, *квантовая электроника* — специфический раздел электроники, имеющий отношение к лазерам и мазерам.

Все эти примеры, с одной стороны, дают представление о содержании электроники, с другой стороны, лишний раз отмечают неопределенность ее границ.

Электроника — прикладная отрасль знаний. Одно из распространенных применений электронных устройств связано с диагностикой и лечением заболеваний. Разделы электроники, в которых рассматриваются особенности применения электронных систем для решения медико-биологических задач, а также устройство соответствующей аппаратуры, получили название ***медицинской электроники***.

Медицинская электроника основывается на сведениях из физики, математики, техники, медицины, биологии, физиологии и других наук, она включает в себя биологическую и физиологическую электронику.

Применения электроники в медицине многообразны, ибо это постоянно расширяющаяся область. В настоящее время многие традиционно «неэлектрические» характеристики — температуру, смещение тела, биохимические показатели и др. — при измерениях преобразуют в электрический сигнал. Информацию, представленную электрическим сигналом, удобно передавать на расстояние и надежно регистрировать. Можно выделить следующие основные группы электронных приборов и аппаратов, используемых для медико-биологических целей.

Устройства для получения (съема), передачи и регистрации медико-биологической информации. Такая информация может быть не только о процессах, происходящих в организме (биологических тканях, органах, системах), но и о состоянии окружающей среды (санитарно-гигиеническое назначение), о процессах, происходящих в протезах, и т. д. Сюда относится большая часть диагностической аппаратуры: баллистокардиографы, фонокардиографы, реографы и др. Для подавляющего большинства этих приборов в радиотехническом отношении характерно наличие усилителей электрических сигналов.

[1] Сюда же часто относят газоразрядные приборы.

К этой группе можно отнести и электромедицинскую аппаратуру для лабораторных исследований, например pH-метр.

Электронные устройства, обеспечивающие дозирующее воздействие на организм различными физическими факторами (ультразвук, электрический ток, электромагнитные поля и др.) **с целью лечения:** аппараты микроволновой терапии, аппараты для электрохирургии, кардиостимуляторы и др. С физической точки зрения эти устройства являются генераторами различных электрических сигналов.

Кибернетические электронные устройства: а) электронные вычислительные машины для переработки, хранения и автоматического анализа медико-биологической информации; б) устройства для управления процессами жизнедеятельности и автоматического регулирования состоянием окружающей человека среды; в) электронные модели биологических процессов и др.

Применение электронных медицинских приборов и аппаратов повышает эффективность диагностики и лечения и увеличивает производительность труда медицинского персонала.

§ 16.2. Электробезопасность медицинской аппаратуры

Одним из важных вопросов, связанных с использованием электронной медицинской аппаратуры, является ее электробезопасность как для пациентов, так и для медицинского персонала.

Больной вследствие различных причин (ослабленность организма, действие наркоза, отсутствие сознания, наличие электродов на теле, т. е. прямое включение пациента в электрическую цепь, и др.) оказывается в особо электроопасных условиях по сравнению со здоровым человеком. Медицинский персонал, работающий с медицинской электронной аппаратурой, также находится в условиях риска поражения электрическим током.

В электрической сети и в технических устройствах обычно задают электрическое напряжение, однако действие на организм или органы оказывает электрический ток, т. е. заряд, протекающий через биологический объект в единицу времени.

Сопротивление тела человека между двумя касаниями (электродами) складывается из сопротивления внутренних тканей и органов

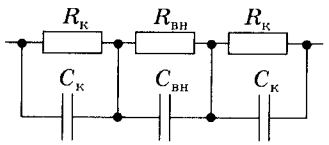


Рис. 16.1

и сопротивления кожи (рис. 16.1). Сопротивление $R_{вн}$ внутренних частей организма слабо зависит от общего состояния человека, в расчетах принимают $R_{вн}$ = 1 кОм для пути ладонь — ступня. Сопротивление $R_к$ кожи существенно зависит от внутренних и внешних причин (потливость, влажность). Кроме того, на разных участках тела кожа имеет разную толщину и, следовательно, различное сопротивление. Поэтому (учитывая неопределенность сопротивления кожи человека) ее вообще в расчет не принимают и считают $I = U/R_{вн} = U/1000$ Ом. Так, например, I = 220/1000 А = 220 мА при U = 220 В. На самом деле кожа имеет сопротивление, которое может превосходить сопротивление внутренних органов, и сила тока в реальной ситуации при напряжении 220 В может быть существенно меньше 220 мА. Понятно, что при работе с электронной медицинской аппаратурой должны быть предусмотрены все возможные меры по обеспечению безопасности.

Основное и главное требование — сделать недоступным касание частей аппаратуры, находящихся под напряжением.

Для этого прежде всего изолируют части приборов и аппаратов, находящиеся под напряжением, друг от друга и от корпуса аппаратуры. Изоляция, выполняющая такую роль, называется *основной* или *рабочей*. Отверстия в корпусе должны исключать возможность случайного проникновения и касания внутренних частей аппаратуры пальцами, металлическими цепочками украшений и т. п. Однако даже если части аппаратуры, находящиеся под напряжением, и закрыты от прикосновения, это еще не обеспечивает полной безопасности по крайней мере по двум причинам.

Во-первых, какой бы ни была изоляция между внутренними частями аппаратуры и ее корпусом, сопротивление приборов и аппаратов переменному току не бесконечно. Не бесконечно и сопротивление между проводами электросети и землей. Поэтому при касании человеком корпуса аппаратуры через тело человека пройдет некоторый ток, называемый ***током утечки***.

Во-вторых, не исключено, что благодаря порче рабочей изоляции (старение, влажность окружающего воздуха) возникает электрическое замыкание внутренних частей аппаратуры с корпусом — «пробой на корпус», и внешняя, доступная для касания часть аппаратуры (корпус) окажется под напряжением.

И в одном и в другом случае должны быть приняты меры, которые исключали бы поражение током лиц при касании корпуса прибора или аппарата. Рассмотрим эти вопросы несколько подробнее.

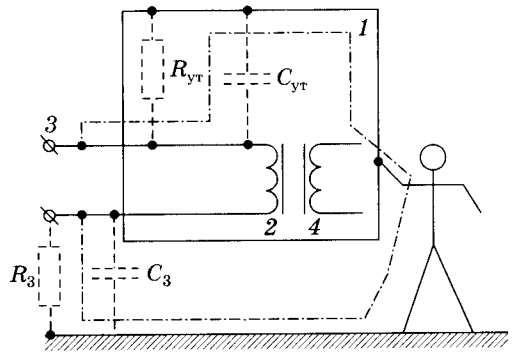


Рис. 16.2

Сила тока утечки на корпус, как и всякий ток проводимости, по закону Ома зависит от напряжения и сопротивления цепи. Цепь тока утечки схематически показана на рис. 16.2. Здесь *1* — корпус аппарата, внутри него трансформатор, первичная обмотка *2* которого подсоединена к источнику напряжения сети *3*. Вторичная обмотка *4* трансформатора соединяется с рабочей частью аппаратуры (на рисунке не показана). Электрическая сеть независимо от наличия или отсутствия заземления всегда имеет некоторую проводимость относительно земли, которая определяется активным (омическим) сопротивлением $R_з$ изоляции и заземления и емкостью $C_з$ проводников сети и земли. Электропроводимость между сетью и корпусом зависит соответственно от омического сопротивления рабочей изоляции и от емкости между внутренними частями аппаратуры, находящимися под напряжением, и корпусом, т. е. от $R_{ут}$ и $C_{ут}$. Все эти элементы изображены на рис. 16.2 штриховыми линиями, так как они являются распределенными параметрами и не представляют реальных резисторов и конденсаторов. Штрихпунктирной линией на рисунке показан путь тока утечки, проходящего через тело человека, касающегося корпуса аппарата или прибора.

Так как сила тока утечки существенно влияет на безопасность эксплуатации медицинской аппаратуры, то при конструировании и изготовлении этих изделий учитывают допустимую силу этого тока как при нормальной работе приборов и аппаратов, так и в случае единичного нарушения. Под ***единичным нарушением*** понимают отказ одного из средств защиты от поражения электрическим током. По условиям электробезопасности единичное нарушение не должно создавать непосредственной опасности для человека. Допустимые силы токов утечки различают по типам электромедицинских изделий в зависимости от их назначения и

степени защиты от поражения током. Во всяком случае, ток утечки всегда меньше порога ощутимого тока (см. § 15.2).

При пробое на корпус доступные (внешние) для касания части аппаратуры оказываются под напряжением. И в этом случае при нарушенных условиях работы изделий следует предусмотреть возможные способы защиты от поражения электрическим током. К таким основным защитным мерам относятся *заземление* и *зануление*. Для понимания физической стороны этих мер нужно знать, как электромедицинская аппаратура подключается к трехфазной системе.

При техническом решении вопроса о наиболее экономной передаче переменного тока по проводам русским инженером М. О. Доливо-Добровольским в конце прошлого века была предложена трехфазная система тока (трехфазный ток). Один из вариантов этой системы представлен на рис. 16.3: *1* — фазовые обмотки одного генератора, в которых индуцируется переменное напряжение; *2* — нагрузки (потребители); *3* — линейные провода (они соединяют генератор с потребителем). Для того чтобы потребитель в одном контуре трехфазной цепи не влиял на режим работы другого контура, целесообразно включить нейтральный (нулевой) провод *4*. Напряжения $U_л$ между линейными проводами называются *линейными*, а между линейными и нейтральным проводом — *фазовыми* ($U_ф$). Соотношение между фазовым и линейным напряжением следующее:

$$U_л = \sqrt{3}U_ф \approx 1{,}73\,U_ф.$$

Обычно электромедицинская аппаратура присоединяется как однофазная нагрузка к линейному или фазовому напряжению. На рис. 16.4 показано питание аппарата или прибора линейным напряжением, нейтраль не заземлена. Для упрощения предположим, что линейные провода имеют совершенную изоляцию, а нейтральный провод имеет относительно земли сопротивление $R_и$ (показано штриховой линией). Если бы не было защитного заземления $R_з$, то при пробое и касании человеком корпуса на человеке оказалось бы напряжение. Штрихпунктиром показана цепь, в которую оказался бы включенным человек. Из рисунка видно, что напряжение $U_ф$ перераспределяется между сопротивлениями $R_ч$ тела человека, включая и сопротивление земли (пола), и $R_и$. Если, например, $R_ч = 0{,}5\,R_и$, а $U_ф = 220$ В, то на человеке может оказаться 220/3 В ≈ 75 В. Для защиты человека в этом случае необходимо заземлить корпус. Сопротивление $R_з$ заземления подсоединено параллельно $R_ч$. Так как $R_з$ мало (должно быть не более 4 Ом), то $R_и \gg R_з$ и фактически на этом сопротивлении и, следовательно, на человеке будет весьма незначительное напряжение.

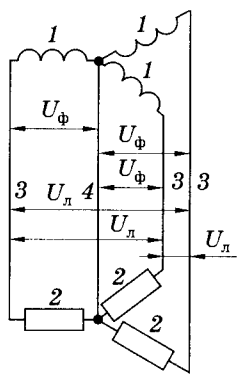


Рис. 16.3

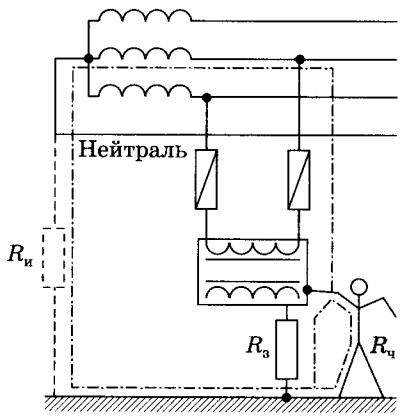


Рис. 16.4

Существенно отметить, что благодаря значительному сопротивлению $R_и$ пробой на корпус не вызовет аварийного тока, достаточного для срабатывания предохранителя, поэтому это нарушение может остаться незамеченным для персонала. Однако если рядом окажется аппарат (прибор) с пробоем на корпус от другого линейного провода (другой фазы), то между корпусами двух приборов появится линейное напряжение. Одновременное прикосновение к таким корпусам весьма опасно.

В настоящее время в большинстве случаев распространены трехфазные сети с заземленной нейтралью. В этом случае защитное заземление малоэффективно. В самом деле, при хорошем заземлении нейтрали (рис. 16.4) $R_и$ мало, например $R_и \approx R_з$, напряжение $U_ф$ перераспределится между сопротивлениями, и между корпусом и землей окажется напряжение, равное $0{,}5\,U_ф$. Это опасно для человека. Скорее всего при пробое сработает предохранитель, однако это может произойти не сразу или даже вовсе не произойти при недостаточной силе аварийного тока. Для того чтобы предохранитель сработал, используют другой вид защиты — защитное зануление, при котором корпус аппаратуры соединяют проводниками с нулевым проводом сети (рис. 16.5). В случае пробоя на корпус возникает короткое замыкание (показано штрихпунктиром), срабатывает предохранитель, и аппаратура отключается от

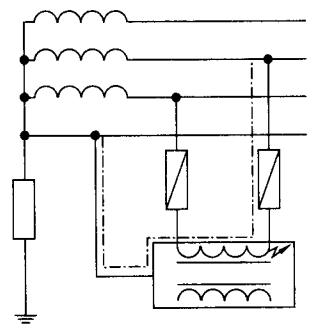


Рис. 16.5

источника напряжения. Так как всегда имеется вероятность обрыва нулевого провода, то нейтраль заземляют в нескольких местах.

Резюмируя сказанное, еще раз отметим, что защитные заземления или зануления должны обеспечивать в установках с изолированной нейтралью безопасную силу тока, проходящего через тело человека при замыкании цепи на заземленные части аппаратуры, в установках с заземленной нейтралью — автоматическое отключение аппаратуры от электрической сети.

Выше были рассмотрены лишь основные вопросы электробезопасности при работе с электромедицинской аппаратурой. Так как трудно дать электротехническое описание различных ситуаций, способных повлечь несчастный случай, то ограничимся в заключение лишь некоторыми общими указаниями:

— не касайтесь приборов одновременно двумя обнаженными руками, частями тела;

— не работайте на влажном, сыром полу, на земле;

— не касайтесь труб (газ, вода, отопление), металлических конструкций при работе с электроаппаратурой;

— не касайтесь одновременно металлических частей двух аппаратов (приборов).

При проведении процедур с использованием электродов, наложенных на пациента, трудно предусмотреть множество вариантов создания электроопасной ситуации (касание больным отопительных батарей, газовых и водопроводных труб и кранов, замыкание через корпус соседней аппаратуры и т. п.), *поэтому необходимо четко следовать инструкции по проведению данной процедуры, не делая каких-либо отступлений от нее.*

§ 16.3. Надежность медицинской аппаратуры

Медицинская аппаратура должна нормально функционировать. Это требование, однако, не всегда выполняется, говоря точнее, такое требование не может выполняться сколь угодно долго, если не принимать специальных мер.

Врач, использующий медицинскую аппаратуру, должен иметь представление о вероятности отказа эксплуатируемого изделия, т. е. о вероятности порчи прибора (аппарата) или его частей, превышения или понижения допустимых параметров. Устройство, не отвечающее техническим условиям, становится *неработоспособным*. Отремонтировав, его можно сделать вновь работоспособным. Во многих случаях достаточно заменить лампу или резистор, чтобы изделие вновь функционировало нормально, однако может быть и так, что аппаратура оказывается настолько устаревшей и изношенной, что экономически нецелесообразно ее ремонтировать (восстанавливать). В связи с этим

медицинский персонал должен иметь представление о ремонтопригодности аппаратуры и долговечности ее частей.

Способность изделия не отказывать в работе в заданных условиях эксплуатации и сохранять свою работоспособность в течение заданного интервала времени характеризуют обобщающим термином *надежность*.

Для медицинской аппаратуры проблема надежности особенно актуальна, так как выход приборов и аппаратов из строя может привести не только к экономическим потерям, но и к гибели пациентов.

Способность аппаратуры к безотказной работе зависит от многих причин, учесть действие которых практически невозможно, поэтому количественная оценка надежности имеет вероятностный характер. Так, например, важным параметром является ***вероятность безотказной работы.*** Она оценивается экспериментально отношением числа N работающих (не испортившихся) за время t изделий к общему числу N_0 испытывавшихся изделий:

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0}. \qquad \textbf{(16.1)}$$

Эта характеристика оценивает возможность сохранения изделием работоспособности в заданном интервале времени. Другим количественным показателем надежности является ***интенсивность отказов*** $\lambda(t)$. Этот показатель равен отношению числа отказов $\mathrm{d}N$ за время $\mathrm{d}t$ к произведению времени $\mathrm{d}t$ на общее число N работающих элементов:

$$\lambda = -\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}t}. \qquad \textbf{(16.2)}$$

Знак «−» поставлен в связи с тем, что $\mathrm{d}N < 0$, так как число работающих изделий убывает со временем.

Функция $\lambda(t)$ может иметь различный вид. Наиболее характерная ее форма изображена графически на рис. 16.6. Здесь заметны три области: I — период приработки, когда «выжигаются» дефектные элементы изделия, проявляются скрытые пороки, возникшие в процессе изготовления деталей. Интенсивность отказов при этом может быть достаточно велика; II — период нормальной эксплуатации, интенсивность отказов значительное время может сохранять постоянное значение. На этот период следует планировать нормальную эксплуатацию аппаратуры; III — период старения, интенсивность отказов возрастает со временем благодаря влиянию старения материалов и износа элементов.

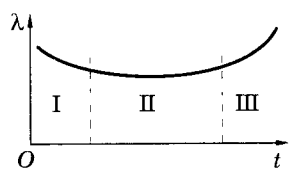


Рис. 16.6

Медикам должно быть интересно, что приблизительно аналогичный вид имеет временна́я зависимость параметра, характеризующего смертность человека. В боль-

шей мере «интенсивность смертности» присуща периоду младенцев (период I) и старикам (период III).

Между вероятностью безотказной работы P и интенсивностью отказов λ существует определенная связь. Установим ее для случаев $\lambda = \text{const}$ (период II). Запишем дифференциальное уравнение (16.2), разделив переменные по разным частям равенства:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt. \qquad \textbf{(16.3)}$$

Интегрируя и подставляя нижние пределы (начальное число N_0 испытывавшихся изделий и время $t = 0$) и верхние пределы (число N безотказно работающих изделий к моменту t), получаем:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,\ \ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t,\ \ \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}. \qquad \textbf{(16.4)}$$

Сопоставляя (16.4) с (16.1), имеем

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \qquad \textbf{(16.5)}$$

Таким образом, при постоянной интенсивности отказов получаем экспоненциальный закон изменения со временем вероятности безотказной работы[1]. Этот закон можно использовать для оценки надежности аппаратуры.

В зависимости от возможных последствий отказа в процессе эксплуатации медицинские изделия подразделяются на четыре класса:

А — изделия, отказ которых представляет непосредственную опасность для жизни пациента или персонала. Вероятность безотказной работы изделий этого класса должна быть не менее 0,99 в течение наработки между планово-предупредительными техническими обслуживаниями, а для изделий, не подлежащих техническим обслуживаниям (ремонт, поверка), — в течение установленного для них срока службы. К изделиям этого класса относятся приборы для наблюдения за жизненно важными функциями больного, аппараты искусственного дыхания и кровообращения и др.;

Б — изделия, отказ которых вызывает искажение информации о состоянии организма или окружающей среды, не приводящее к непосредственной опасности для жизни пациента или персонала, либо вызывает необходимость немедленного использования аналогичного по функциональному назначению изделия, находящегося в режиме ожидания. Вероятность безотказной работы изделий этого класса должна быть не менее 0,8. К таким изделиям относятся системы, следящие за больными, аппараты для стимуляции сердечной деятельности и др.;

В — изделия, отказ которых снижает эффективность или задерживает лечебно-диагностический процесс в некритических ситуациях, либо повышает нагрузку на медицинский или обслуживающий персонал, либо приводит только к материальному ущербу. К этому классу относится большая часть диагностической и физиотерапевтической аппаратуры, инструментарий и др.;

Г — изделия, не содержащие отказоспособных частей. Электромедицинская аппаратура к этому классу не относится.

Медикам интересно знать, что понятие надежности можно с некоторой долей условности применять и к человеческому организму, рассматривая болезнь как утрату работоспособности, лечение — как ремонт, а профилактику — как мероприятия, способствующие повышению надежности. Однако организм — сложная система, и «технический» подход возможен лишь отчасти, с учетом обратных связей и процессов регулирования.

[1] Читателю должно быть интересно и полезно сопоставить уравнение (16.5) с другим статистическим уравнением — основным законом радиоактивного распада (27.9), имеющим аналогичный вид.

ГЛАВА 17

Система получения медико-биологической информации

Любое медико-биологическое исследование связано с получением и регистрацией соответствующей информации. Несмотря на разнообразие устройств и методов, употребляемых для этой цели, можно указать их общие схемы и принципы действия.

§ 17.1. Структурная схема съема, передачи и регистрации медико-биологической информации

Для того чтобы получить и зафиксировать информацию о состоянии и параметрах медико-биологической системы, необходимо иметь целую совокупность устройств.

Первичный элемент этой совокупности — чувствительный элемент средства измерений, называемый ***устройством съема***, —

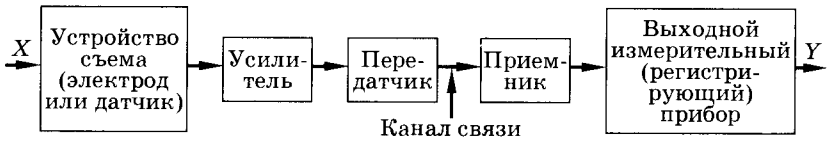


Рис. 17.1

непременно контактирует или взаимодействует с самой системой, остальные элементы находятся обычно обособленно от медико-биологической системы, в некоторых случаях части измерительной системы могут быть даже отнесены на значительные расстояния от объекта измерений.

Структурная схема измерительной цепи изображена на рис. 17.1. Эта схема является общей и отражает всевозможные реальные системы, применяемые в медицине для диагностики и исследования. В устройствах медицинской электроники чувствительный элемент либо прямо выдает электрический сигнал, либо изменяет таковой сигнал под воздействием биологической системы. Таким образом, устройство съема преобразует информацию медико-биологического и физиологического содержания в сигнал электронного устройства. В медицинской электронике используются два вида устройств съема: электроды и датчики.

Завершающим элементом измерительной цепи в медицинской электронике является ***средство измерений***, которое отображает или регистрирует информацию о биологической системе в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем.

Во многих случаях между устройством съема и средством измерений имеются элементы, усиливающие начальный сигнал (см. гл. 18) и передающие его на расстояние.

В структурной схеме (см. рис. 17.1) X означает некоторый измеряемый параметр биологической системы, например давление крови. Буквой Y обозначена выходная величина, например сила тока (мА) на измерительном приборе или смещение писчика (мм) на бумаге регистрирующего прибора. Для получения количественной информации о биологической системе должна быть известна зависимость $Y = f(X)$.

§ 17.2. Электроды для съема биоэлектрического сигнала

Электроды для съема биоэлектрического сигнала — *это проводники специальной формы, соединяющие измерительную цепь с биологической системой.*

При диагностике электроды используются не только для съема электрического сигнала, но и для подведения внешнего электромагнитного воздействия, например в реографии. В медицине электроды используются также для оказания электромагнитного воздействия с целью лечения и при электростимуляции.

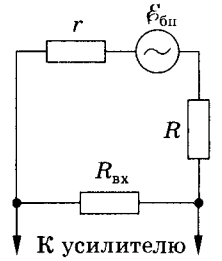


Рис. 17.2

К электродам предъявляются определенные требования: они должны быстро фиксироваться и сниматься, иметь высокую стабильность электрических параметров, быть прочными, не создавать помех, не раздражать биологическую ткань и т. п.

Важная физическая проблема, относящаяся к электродам для съема биоэлектрического сигнала, заключается в минимизации потерь полезной информации, особенно на переходном сопротивлении электрод — кожа. Эквивалентная электрическая схема контура, включающего в себя биологическую систему и электроды, изображена на рис. 17.2 ($\mathcal{E}_{бп}$ — ЭДС источника биопотенциалов; r — сопротивление внутренних тканей биологической системы; R — сопротивление кожи и электродов, контактирующих с ней; $R_{вх}$ — входное сопротивление усилителя биопотенциалов). Из закона Ома, предполагая, что сила тока на всех участках контура одинакова, имеем

$$\mathcal{E}_{бп} = Ir + IR + IR_{вх} = IR_i + IR_{вх}, \text{ где } R_i = r + R. \qquad (17.1)$$

Можно условно назвать падение напряжения на входе усилителя $IR_{вх}$ «полезным», так как усилитель увеличивает именно эту часть ЭДС источника. Падения напряжения Ir и IR внутри биологической системы и на системе электрод — кожа в этом смысле «бесполезны». Так как величина $\mathcal{E}_{бп}$ задана, а уменьшить r невозможно, то увеличить $IR_{вх}$ можно лишь уменьшением R, и прежде всего уменьшением сопротивления контакта электрод — кожа.

Для уменьшения переходного сопротивления электрод — кожа стараются увеличить проводимость среды между электродом и кожей, используют марлевые салфетки, смоченные физиологическим раствором, или электропроводящие пасты. Можно уменьшить это сопротивление, увеличив площадь контакта электрод — кожа, т. е. увеличив размер электрода, но при этом электрод будет захватывать несколько эквипотенциальных поверхностей (см., например, рис. 12.15) и истинная картина электрического поля будет искажена.

По назначению электроды для съема биоэлектрического сигнала подразделяют на следующие группы: 1) для кратковременного применения в кабинетах функциональной диагностики, напри-

мер для разового снятия электрокардиограммы; 2) для длительного использования, например при постоянном наблюдении за тяжелобольными в условиях палат интенсивной терапии; 3) для использования на подвижных обследуемых, например в спортивной или космической медицине; 4) для экстренного применения, например в условиях скорой помощи. Ясно, что во всех случаях проявится своя специфика применения электродов: физиологический раствор может высохнуть и сопротивление изменится, если наблюдение биоэлектрических сигналов длительное, при бессознательном состоянии пациента надежнее использовать игольчатые электроды и т. п.

При пользовании электродами в электрофизиологических исследованиях возникают две специфические проблемы. Одна из них— возникновение гальванической ЭДС при контакте электродов с биологической тканью. Другая — электролитическая поляризация электродов, что проявляется в выделении на электродах продуктов реакций при прохождении тока. В результате возникает встречная по отношению к основной ЭДС.

В обоих случаях возникающие ЭДС искажают снимаемый электродами полезный биоэлектрический сигнал. Существуют способы, позволяющие снизить или устранить подобные влияния, однако эти приемы относятся к электрохимии и в этом курсе не рассматриваются.

В заключение рассмотрим устройство некоторых электродов. Для снятия электрокардиограмм к конечностям специальными резиновыми лентами прикрепляют электроды — металлические пластинки с клеммами *1* (рис. 17.3), в которые вставляют и закрепляют штыри кабелей отведений. Кабели соединяют электроды с электрокардиографом. На груди пациента устанавливают грудной электрод *2*. Он удерживается резиновой присоской. Этот электрод также имеет клемму для штыря кабеля отведений.

В микроэлектродной практике используют стеклянные микроэлектроды. Профиль такого электрода изображен на рис. 17.4, кончик его имеет диаметр 0,5 мкм. Корпус электрода является изолятором, внутри находится проводник в виде электролита. Изготовление микроэлектродов и работа с ними представляют определенные

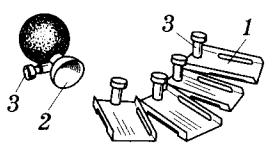


Рис. 17.3

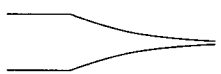


Рис. 17.4

трудности, однако такой микроэлектрод позволяет прокалывать мембрану клетки и проводить внутриклеточные исследования.

§ 17.3. Датчики медико-биологической информации

Многие медико-биологические характеристики нельзя непосредственно «снять» электродами, так как эти характеристики не отражаются биоэлектрическим сигналом: давление крови, температура, звуки сердца и многие другие. В некоторых случаях медико-биологическая информация связана с электрическим сигналом, однако к ней удобнее подойти как к неэлектрической величине (например, пульс). В этих случаях используют датчики (измерительные преобразователи).

Датчиком называют устройство, преобразующее измеряемую или контролируемую величину в сигнал, удобный для передачи, дальнейшего преобразования или регистрации. Датчик, к которому подведена измеряемая величина, т. е. первый в измерительной цепи, называется ***первичным***.

В рамках медицинской электроники рассматриваются только такие датчики, которые преобразуют измеряемую или контролируемую неэлектрическую величину в электрический сигнал.

Использование электрических сигналов предпочтительнее, чем иных, так как электронные устройства позволяют сравнительно несложно усиливать их, передавать на расстояние и регистрировать. Датчики подразделяются на *генераторные* и *параметрические*.

Генераторные датчики под воздействием измеряемого сигнала непосредственно генерируют напряжение или ток. Укажем некоторые типы этих датчиков и явления, на которых они основаны: 1) ***пьезоэлектрические***, *пьезоэлектрический эффект* (см. § 12.7); 2) ***термоэлектрические***, *термоэлектричество* — явление возникновения ЭДС в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных разнородных проводников, имеющих различную температуру спаев; 3) ***индукционные***, *электромагнитная индукция*; 4) ***фотоэлектрические***, *фотоэффект*.

Параметрические датчики под воздействием измеряемого сигнала изменяют какой-либо свой параметр. Укажем некоторые типы этих датчиков и измеряемый с их помощью параметр: 1) ***емкостные***, *емкость*; 2) ***реостатные***, *омическое сопротивление*; 3) ***индуктивные***, *индуктивность* или *взаимная индуктивность*.

В зависимости от вида энергии, являющейся носителем информации, различают *механические, акустические* (звуковые), *температурные, электрические, оптические* и другие *датчики*.

В некоторых случаях датчики называют по измеряемой величине; так, например, датчик давления, тензометрический датчик (тензодатчик) — для измерения перемещения или деформации и т. д.

Приведем возможные медико-биологические применения указанных типов датчиков (табл. 26).

Датчик характеризуется ***функцией преобразования*** — функциональной зависимостью выходной величины y от входной x, которая описывается аналитическим выражением $y = f(x)$ или графиком. Наиболее простым и удобным случаем является прямо пропорциональная зависимость $y = kx$.

Таблица 26

Датчик	Механический	Акустический	Оптический	Температурный
Пьезоэлектрический	АД	ФКГ	—	—
Термоэлектрический	—	—	—	Т
Индукционный	БКГ	ФКГ	—	—
Фотоэлектрический	—	—	ОГГ	—
Емкостной	ФКГ	—	—	—
Реостатный	АД, БКГ	—	—	Т
Индуктивиый	ДЖ	—	—	—

Обозначения: АД — артериальное давление крови, БКГ — баллистокардиограмма, ФКГ — фонокардиограмма, ОГГ — оксигемография, Т — температура, ДЖ — давление в желудочно-кишечном тракте.

Чувствительность датчика показывает, в какой мере выходная величина реагирует на изменение входной:

$$z = \Delta y/\Delta x.$$

Она в зависимости от вида датчика выражается, например, в *омах на миллиметр* (Ом/мм), в *милливольтах на кельвин* (мВ/К) и т. д.

Существенны временны́е характеристики датчиков. Дело в том, что физические процессы в датчиках не происходят мгновенно, это приводит к запаздыванию изменения выходной величины по сравнению с изменением входной. Аналитически такая особенность приводит к зависимости чувствительности датчика от скорости изменения входной величины dx/dt или от частоты при изменении x по гармоническому закону.

При работе с датчиками следует учитывать возможные, специфические для них, погрешности. Причинами погрешностей могут

быть следующие факторы: 1) температурная зависимость функции преобразования; 2) гистерезис — запаздывание y от x даже при медленном изменении входной величины, происходящее в результате необратимых процессов в датчике; 3) непостоянство функции преобразования во времени; 4) обратное воздействие датчика на биологическую систему, приводящее к изменению показаний; 5) инерционность датчика (пренебрежение его временны́ми характеристиками) и др.

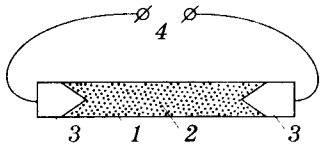


Рис. 17.5

Конструкция датчиков, используемых в медицине, весьма разнообразна: от простейших (типа термопары) до сложных доплеровских датчиков. Опишем в виде примера весьма простой датчик частоты дыхания — реостатный (резистивный).

Этот датчик (рис. 17.5) выполнен в виде резиновой трубки *1*, которая заполнена мелким угольным порошком *2*. С торцов трубки вмонтированы электроды *3*. Через уголь можно пропускать ток от внешнего источника *4*.

При растяжении трубки увеличивается длина l и уменьшается площадь S сечения столбика угля и согласно формуле увеличивается сопротивление R

$$R = \rho l/S,$$

где ρ — удельное сопротивление угольного порошка.

Таким образом, если трубкой опоясать грудную клетку или, как это обычно делается, прикрепить к концам трубки ремень и охватить им грудную клетку, то при вдохе трубка растягивается, а при выдохе — сокращается. Сила тока в цепи будет изменяться с частотой дыхания, что можно зафиксировать, используя соответствующую измерительную схему.

В заключение отметим, что датчики являются техническими аналогами рецепторов биологических систем.

§ 17.4. Передача сигнала. Радиотелеметрия

Снятый и усиленный электрический сигнал необходимо передать к регистрирующему (измерительному) прибору.

Во многих случаях электроды или датчики, усилитель и регистрирующий прибор конструктивно оформлены как единое устройство. В этом случае передача информации не является сложной проблемой. Однако измерительная часть может находиться и на рас-

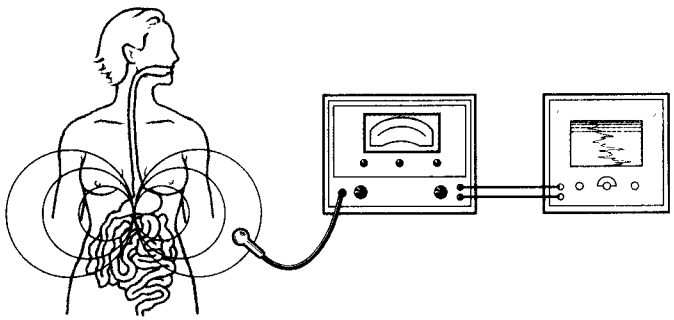


Рис. 17.6

стоянии от биологической системы, такие измерения относят к ***телеметрии*** или, возможно, к ***биотелеметрии***. Связь между устройством съема и регистрирующим прибором при этом осуществляется либо по проводам, либо по радио. Последний вариант телеметрии называют ***радиотелеметрией***. Этот вид связи широко используют в космических исследованиях для получения информации о состоянии космического корабля и его экипажа, в спортивной медицине — о физиологическом состоянии спортсмена во время упражнений. Например, с помощью антенны передатчика на шлеме спортсмена, излучающей радиоволны, на расстоянии 300—500 м (т. е. в пределах стадиона) можно фиксировать данные о его состоянии.

Радиотелеметрия применяется также для эндорадиозондирования пищеварительного тракта. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Миниатюрная капсула с радиопередатчиком (эндорадио-зонд) заглатывается больным (рис. 17.6). По изменению частоты передатчика приемником, расположенным вблизи пациента, можно измерять давление, степень кислотности или щелочности, температуру и другие параметры в месте расположения капсулы.

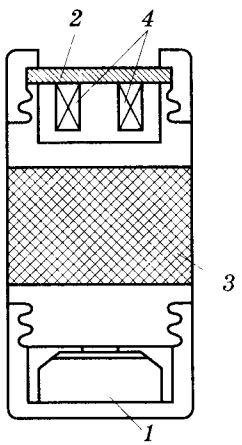


Рис. 17.7

На рис. 17.7 показана схема эндорадиозонда для определения активности пищеварительных ферментов. Он состоит из трех основных частей: *1* — источник напряжения, размещаемый в съемной торцовой насадке; *2* — диск, спрессованный из ферромагнитного порошка и частиц, растворяющихся ферментом; *3* — транзистор и другие детали радиосхемы. Диск расположен в съемной насадке и так же, как источник напряжения, после однократного употребления может быть заменен другим. Диск прижимается к катушке индуктивности *4* и образует с ней замкнутый магнитопровод. По мере растворения диска пищеварительными ферментами уменьшается индуктивность L цепи и [см. (14.9)] увеличивается частота генератора. Таким образом, по воспринимаемой частоте можно судить об активности ферментов.

§ 17.5. Аналоговые регистрирующие устройства

Конечным элементом технической схемы, изображенной на рис. 17.1, является измерительное (контролирующее) устройство, отображающее или регистрирующее медико-биологическую информацию.

Под ***устройством отображения*** понимают устройство, которое временно представляет информацию, при появлении новой информации прежняя информация бесследно исчезает. Такими являются, в частности, стрелочные приборы: амперметр, вольтметр и др. Стрелочный амперметр, например, показывает силу тока в данный момент и не фиксирует ее. При изменении силы тока в цепи информация о прежнем значении безвозвратно утрачивается. Для запоминания информации, отображаемой такими устройствами, необходимо специально ее фиксировать, что, например, и делают студенты в физической лаборатории, снимая показания приборов. Медико-биологическое применение устройств отображения достаточно мало: электротермометр сопротивления, частотомер пульса и др.

Значительно большее распространение в медицинской электронике получили ***регистрирующие приборы***, которые фиксируют информацию на каком-либо носителе. Это позволяет документировать, хранить, многократно использовать, обрабатывать и анализировать полученную медико-биологическую информацию.

Отображающие и регистрирующие приборы подразделяют на ***аналоговые*** — непрерывные, ***дискретные*** и ***комбинированные***, сочетающие возможности аналоговых и дискретных.

Рассмотрим подробнее наиболее распространенные в практике медико-биологических исследований аналоговые регистрирующие устройства. Некоторые из них называют также ***самопишущими приборами*** или ***самописцами***.

В медицине, биологии и физиологии в основном используются следующие способы регистрации информации на носителе: а) нанесение слоя вещества (красителя): чернильно-перьевая и струеписная системы; б) изменение состояния вещества носителя: фоторегистрация, электрохимическая, электрофотографическая (ксерография) и магнитная запись; в) снятие слоя вещества с носителя: закопченная поверхность, тепловая запись.

Простейшим самописцем, находящим и сегодня применение в физиологическом эксперименте, является *кимограф* (рис. 17.8), работающий от заведенной пружины, или *электрокимограф*, равномерное вращение барабана которого осуществляется электродвигателем.

Идея кимографа — равномерное вращение или перемещение поверхности носителя — сохраняется в подавляющем большинстве современных аналоговых регистрирующих приборов, фиксирующих временну́ю зависимость исследуемой величины. Смещение y писчика или светового пятна, пропорциональное регистрируемой величине, является ординатой полученного графика (рис. 17.9). Равномерное перемещение носителя (бумага, фотопленка) означает, что абсцисса прямо пропорциональна времени t. В результате полученная кривая отражает зависимость $y = f(t)$.

Самопишущие приборы, используемые в медицинской аппаратуре, преобразуют электрический сигнал в механическое перемещение. Физически они являются гальванометрами — высокочувствительными электроизмерительными приборами, реагирующими на достаточно малую силу тока. В этих приборах ток, проходящий по катушкам, проволочной рамке или по петле, взаимодействует с магнитным полем постоянного магнита. В результате этого взаимодействия подвижная часть (магнит, проволочная рамка или части петли) отклоняется пропорционально силе тока, т. е. пропорционально электрическому сигналу.

С подвижной частью соединен пишущий элемент, оставляющий след на движущемся носителе записи: специальное капиллярное перо, либо стеклянный капилляр с соплом в струйном самописце, либо зеркальце, отражающее луч света, или что-то другое.

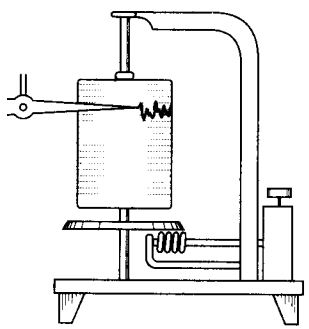


Рис. 17.8

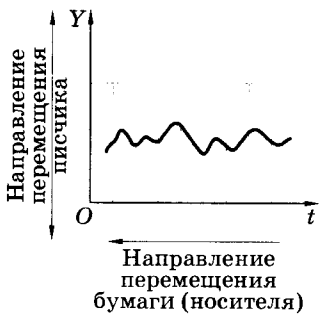


Рис. 17.9

В качестве примера на рис. 17.10 схематически изображен струйный самописец. Здесь *1* — электромагнит, через обмотки которого проходит регистрируемый электрический сигнал; *2* — постоянный магнит в форме цилиндра, он жестко связан со стеклянным капилляром *3*. Из сопла капилляра *4* под давлением вылетают чернила, оставляя след y, пропорциональный отклонению постоянного магнита и, следовательно, силе тока в электромагните.

Важной характеристикой самописца является диапазон частот колебаний, которые они успевают регистрировать. Чем больше инерция подвижной части самописца, тем больше запаздывание регистрации относительно истинного изменения регистрируемой величины и тем хуже характеристика прибора.

В самопишущих устройствах наряду с обычными погрешностями измерительных приборов возникают также погрешности, обусловленные записью.

Причинами погрешности записи могут быть неточность работы механизма перемещения бумаги или фотопленки, запаздывание, вызванное инерцией пишущей системы прибора, изменение размеров бумаги под влиянием влажности воздуха, неточность отметки времени и др.

Кроме однокоординатных самописцев, фиксирующих временну́ю зависимость, в исследовательской практике получили распространение двухкоординатные самописцы. На рис. 17.11 показан внешний вид такого самописца. При регистрации поперечная рейка перемещается поступательно, ее смещение пропорционально одному из подаваемых сигналов — параметров x. Вдоль рейки пропорционально изменению второго параметра y перемещается каретка с писчиком. В результате писчик совершает сложное движение и оставляет на бумаге график функции $y = f(x)$.

Наряду с аналоговыми регистрирующими устройствами в медицинской практике для фиксирования информации используют-

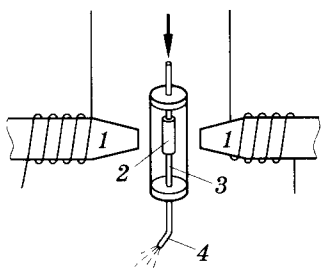


Рис. 17.10

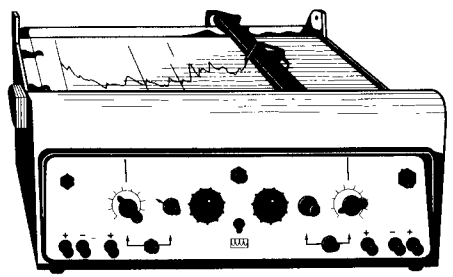


Рис. 17.11

ся и такие безынерционные комбинированные устройства, как ***электронно-лучевые трубки*** (см. § 18.8).

Так, например, в портативном ***вектор-кардиоскопе*** (см. рис. 17.14) электронно-лучевая трубка является основным элементом, который отображает, а при дополнительном фотографировании и регистрирует электро- и вектор-кардиограммы.

Электронно-лучевая трубка относится к группе комбинированных устройств, так как может отображать (при дополнительном фотографировании — регистрировать) выходную информацию не только в аналоговой, но и в дискретной форме (цифры, буквы).

§ 17.6. Принцип работы медицинских приборов, регистрирующих биопотенциалы

Биоэлектрические потенциалы являются существенным диагностическим показателем многих заболеваний. Поэтому очень важно, во-первых, правильно регистрировать эти потенциалы, а во-вторых, уметь извлекать из измерений необходимую медицинскую информацию.

Структурная схема медицинских приборов, регистрирующих биопотенциалы, изображена на рис. 17.12. Она является частным случаем общей схемы, показанной на рис. 17.1.

В клинической практике биопотенциалы отводят поверхностными накожными электродами (см. § 17.2), запись осуществляется аналоговыми регистрирующими устройствами (см. § 17.5). Переход от одних отведений к другим осуществляется специальным переключателем. Так как биопотенциалы сравнительно медленно изменяются со временем, то в приборах обычно используют усилители постоянного тока (см. § 18.4).

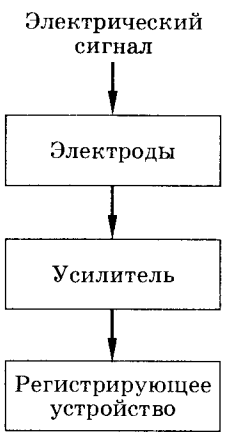


Рис. 17.12

Биопотенциалы, применяемые в электрокардиографии, имеют величины порядка нескольких милливольт, в электроэнцефалографии — микровольт, поэтому для их регистрации необходимо усиление в несколько тысяч раз, что достигается с помощью многокаскадного усилителя.

На рис. 17.13 изображен портативный электрокардиограф, предназначенный для записи электрокардиограммы, а на рис. 17.14 — вектор-кардиоскоп. Этот прибор позволяет вести исследования электрической активности сердца как методом электрокардиографии, так и методом вектор-кардиографии. Процесс наблюдается на экране электронно-лучевой трубки, а также может быть сфотографирован.

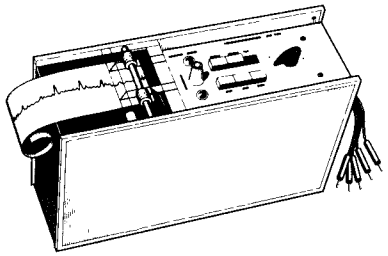


Рис. 17.13

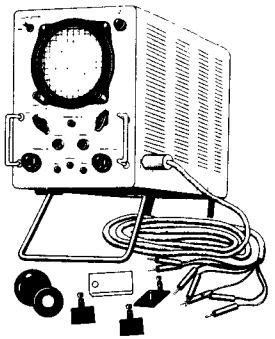


Рис. 17.14

В некоторых случаях целесообразно одним прибором определять одновременно ряд параметров, например биопотенциалы, отводимые от разных точек головного мозга. При этом используют многоканальные устройства, состоящие из нескольких независимых усилителей, регистрация по всем каналам фиксируется на общей ленте. На рис. 17.15 показан 16-канальный энцефалограф.

При снятии и регистрации биопотенциалов используют и некоторые вспомогательные устройства, не представленные структурной схемой на рис. 17.12. К ним можно отнести отметчики времени, которые определяют масштаб оси t (см. рис. 17.9). В тех случаях, если лентопротяжный механизм обеспечивает строгое постоянство скорости перемещения носителя, необходимости в отметчике времени нет.

Для определения биопотенциалов, иначе говоря, для определения масштаба оси y (см. рис. 17.9) в единицах напряжения используют калибраторы напряжения. Запись калибровочного напряжения делают до или после записи биопотенциала. При снятии электрокардиограммы используют калибровочный сигнал, равный 1 мВ.

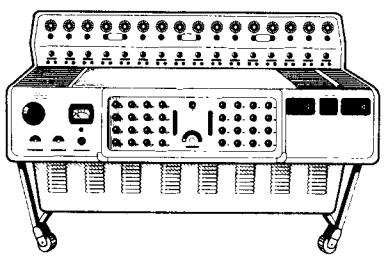


Рис. 17.15

ГЛАВА 18

Усилители и генераторы и их возможные использования в медицинской аппаратуре

Усилителями электрических сигналов (электронными усилителями) называют устройства, увеличивающие эти сигналы за счет энергии постороннего источника. Генераторами (электронными генераторами) называют устройства, которые преобразуют энергию источников постоянного напряжения в энергию электромагнитных колебаний различной формы. В главе рассматриваются некоторые общие вопросы этих устройств и специфика их применения в медицине. Как практически важный прибор, включающий в себя и усилитель и генератор, рассматривается электронный осциллограф.

§ 18.1. Коэффициент усиления усилителя

Усилители могут создаваться на основе различных элементов (транзисторы, триоды и др.), однако в общих вопросах все усилители могут быть представлены достаточно едино. Они имеют вход, на который подается усиливаемый электрический сигнал, и выход, с которого снимается усиленный сигнал (рис. 18.1).

Непременной частью всей системы является источник электрической энергии.

Наиболее распространенным принципом усиления сигнала является воздействие входной цепи на электрическое сопротивление выходной цепи. Это воздействие соответствует форме усиливаемого сигнала, и поэтому форма сигнала воспроизводится в выходной цепи.

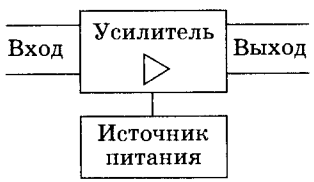


Рис. 18.1

Существенным требованием к усилителям является воспроизведение усиливаемого сигнала (усиление) без искажения его формы.

На практике это требование выглядит как стремление усилить электрический сигнал с наименьшими искажениями. Возможность усилителя увеличить поданный на его вход сигнал количественно оценивается ***коэффициентом усиления***.

Он равен отношению приращения напряжения (силы тока, мощности) на выходе усилителя к вызвавшему его приращению напряжения (силы тока, мощности) на входе:

$$k_U = \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta U_{\text{вх}}},\ k_I = \frac{\Delta I_{\text{вых}}}{\Delta I_{\text{вх}}},\ k_P = \frac{\Delta P_{\text{вых}}}{\Delta P_{\text{вх}}}. \qquad (18.1)$$

В зависимости от целей различают усилители напряжения, силы тока или мощности. В дальнейшем, ради определенности, все иллюстрации и выводы будут относиться к коэффициенту усиления по напряжению k_U, который будет обозначаться без индекса.

При усилении сигнала синусоидальной формы в выражениях (18.1) обычно используют амплитуды входного и выходного сигналов:

$$k = U_{\text{вых m}}/U_{\text{вх m}}. \qquad (18.2)$$

Если k имеет значения, недостаточные для получения на выходе сигнала нужного напряжения, то соединяют несколько усилителей. Каждый отдельный усилитель при этом называют ***усилительным каскадом***. По существу, рис. 18.1 и выражения (18.1) и (18.2) следует отнести к каскаду. Коэффициент усиления усилителя из нескольких каскадов равен произведению коэффициентов усиления всех используемых каскадов:

$$k_{\text{общ}} = k_1 k_2 k_3 \ldots . \qquad (18.3)$$

§ 18.2. Амплитудная характеристика усилителя. Нелинейные искажения

Рассмотрим усиление синусоидального (гармонического) сигнала. Для того чтобы форма сигнала при усилении не изменялась, коэффициент усиления должен быть одинаков для различных напряжений в пределах изменения входного сигнала.

В этом случае зависимость $U_{\text{вых m}} = f(U_{\text{вх m}})$, называемая ***амплитудной характеристикой усилителя***, имеет линейный вид $U_{\text{вых m}} = kU_{\text{вх m}}$ (рис. 18.2; прямая линия). На самом деле линейная зависимость выполняется в ограниченной области изменения входного напря-

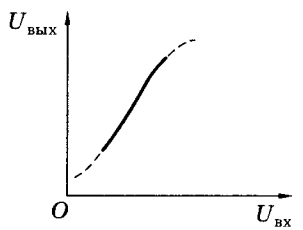


Рис. 18.2

жения, при выходе за пределы этой области линейность зависимости нарушается (штриховая линия).

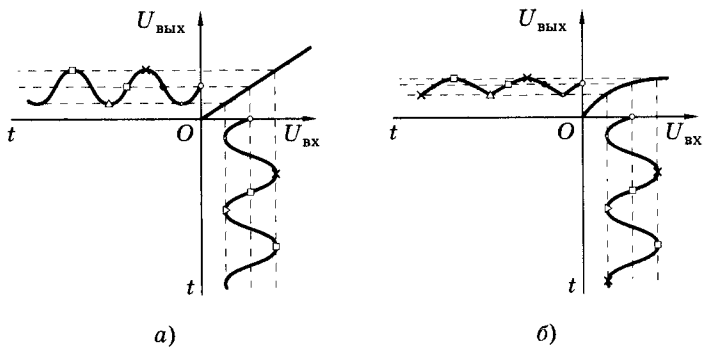
Если входной гармонический сигнал выйдет за пределы линейной части амплитудной характеристики, то выходной сигнал уже не будет гармоническим. Возникнут нелинейные (амплитудные) искажения.

Графически усиление гармонического (синусоидального) сигнала иллюстрируется рис. 18.3 без искажения (*а*) и с искажением (*б*).

Каждый из этих рисунков содержит три графика. На одном (оси $U_{вх}$ и $U_{вых}$) показана амплитудная характеристика: линейная (*а*) и нелинейная (*б*). На нижнем графике приведена зависимость входного напряжения от времени. Эта зависимость синусоидальная, но сдвинутая относительно $U_{вх} = 0$ на некоторую постоянную величину. График расположен необычно (ось времени t идет вертикально), так как используется общая ось $U_{вх}$ с предыдущей зависимостью. На левом графике дана временна́я зависимость выходного напряжения. Здесь тоже ось $U_{вых}$ принадлежит двум графикам. Этот график строится следующим образом. Из нижнего графика находят значения $U_{вх}$ для некоторых фиксированных моментов времени, затем по амплитудной характеристике устанавливают соответствующие значения $U_{вых}$ и переносят их на левый график (штриховые линии; точки с одинаковыми символами соответствуют одному и тому же времени).

На рис. 18.3 масштаб по оси ординат для $U_{вых}$ больше, чем по оси абсцисс для $U_{вх}$ (сигнал усиливается).

На графиках зависимости $U_{вых} = f(t)$ в случае линейной амплитудной характеристики (*а*) видна синусоида; следовательно, усиленный сигнал не искажен. При нелинейной характеристике (*б*) выходной сигнал периодический, но не синусоидальный; следовательно, происходит искажение сигнала при усилении. Периодический сигнал может быть представлен суммой гармоник (см. § 5.4), поэтому нелинейные искажения можно рассматривать как появление новых гармоник в сигнале при его усилении. Чем больше новых гармоник, чем выше их амплитуда, тем сильнее нелинейные искажения, что оценивается ***коэффициентом нелинейных искажений***



а) *б*)

Рис. 18.3

$$\gamma = \frac{\sqrt{U_{2m}^2 + U_{3m}^2}}{U_{1m}}, \qquad (18.4)$$

где U_{1m} — амплитуда напряжения основной гармоники, U_{2m}, U_{3m} ... — амплитуды новых гармоник. Для точного воспроизведения сигнала коэффициент γ, очевидно, должен быть минимален.

§ 18.3. Частотная характеристика усилителя. Линейные искажения

Использование линейного участка характеристики еще не является гарантией неискаженного усиления электрического сигнала.

Если усиливаемый сигнал несинусоидальный, то он может быть разложен на отдельные гармонические составляющие, каждой из которых соответствует своя частота. Так как в усилителях используются конденсаторы и катушки индуктивности, а их сопротивление зависит от частоты (см. § 14.3), то коэффициент усиления для разных гармонических составляющих может оказаться разным. Отметим, что индуктивные свойства резисторов и емкостные свойства проводников, сколь бы малы они ни были, при увеличении частоты тоже могут оказать существенное влияние на коэффициент усиления. Таким образом, существенна зависимость $k = f(\omega)$ или $k = f(\nu)$, которая получила название ***частотной характеристики усилителя***. Для того чтобы ангармонический сигнал был усилен без искажения (даже при использовании линейной части амплитудной характеристики), необходима независимость коэффициента усиления от частоты.

Частотная характеристика должна иметь вид $k = \text{const}$. На практике это не реализуется и приводит к искажениям, получившим название ***линейных*** или ***частотных***.

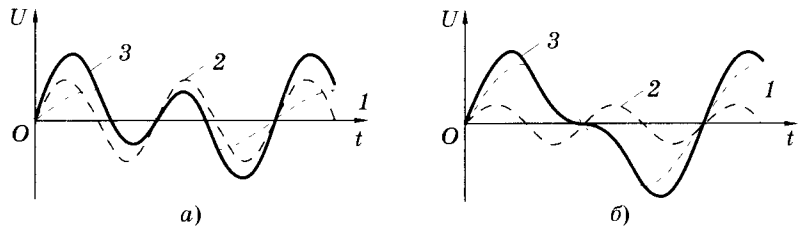


Рис. 18.4

Линейные искажения иллюстрируются рис. 18.4. На рис. 18.4, *а* изображен периодический сигнал *3*, который является суммой двух синусоид (*1* и *2*), а на рис. 18.4, *б* — те же сигналы после усиления. Если синусоидальные сигналы разной частоты усиливаются по-разному, например, один с $k_1 = 2$, а другой с $k_2 = 0{,}5$, то результирующий усиленный сигнал отличается от входного (сравните кривые *3* на рис. 18.4, *а* и *б*).

Частотную характеристику усилителя обычно изображают графически (рис. 18.5). Из этого рисунка видно, что в пределах ω_2 — ω_3 коэффициент усиления примерно постоянен. В радиотехнике принято считать, что уменьшение его до $0{,}7k_{max} \approx k_{max}/\sqrt{2}$ практически не искажает сигнала. Диапазон частот ω_1 — ω_4 называют ***полосой пропускания усилителя***.

Для расширения полосы пропускания приходится усложнять усилительные схемы. Однако диапазон частот, которые надо усиливать без искажения, определяется задачами усиления. Так, для усиления звука достаточно полосы 60 Гц — 15 кГц, а усиление видеоимпульсов требует значительно большей полосы пропускания.

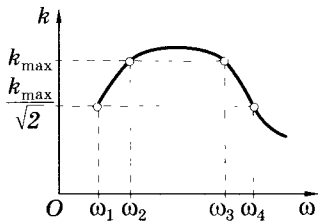


Рис. 18.5

Частотная характеристика имеет большое значение при выборе усилителя для записи биопотенциалов, имеющих характер сложного колебания с различными пределами частот в их гармоническом спектре. Поэтому не всегда усилитель, предназначенный для записи одних биопотенциалов, может быть использован для записи других.

§ 18.4. Усиление биоэлектрических сигналов

Прямое, непосредственное измерение биоэлектрического сигнала, или сигнала, созданного на выходе генераторного датчика, является трудновыполнимой задачей, так как эти сигналы обычно весьма малы. Именно поэтому в структурной схеме (см. рис. 17.1) вторым элементом показан усилитель электрических сигналов.

Ради определенности проиллюстрируем особенности усиления медико-биологических электрических сигналов на примере ***биоэлектрических сигналов***, т. е. тех сигналов, которые снимаются электродами с биологического объекта.

Специфика усилителей биопотенциалов определяется следующими основными особенностями этой разновидности электрических колебаний: 1) выходное сопротивление биологической системы совместно с сопротивлением электродов обычно достаточно высоко; 2) биопотенциалы — медленно изменяющиеся сигналы; 3) биопотенциалы — слабые сигналы.

Рассмотрим подробнее эти вопросы. В § 17.2 отмечалась роль переходного сопротивления электрод — кожа на передачу биоэлектрического сигнала последующим элементам схемы. Оказывается, этим вопросом проблема сопротивлений не ограничивается: при усилении сигнала следует учитывать соотношения сопротивлений R_i и $R_{вх}$ [см. (17.1)]. Необходимо, как принято говорить, согласование сопротивления входной цепи усилителя и выходного сопротивления биологической системы.

Вопрос согласования полных сопротивлений (импедансов) достаточно сложный. Проиллюстрируем его лишь некоторыми особенностями взаимодействующих элементов электрической схемы.

Выразив из (17.1) силу тока $I = \mathcal{E}_{бп}/(R_i + R_{вх})$ и подставив в формулу для входного напряжения $U_{вх}$ усилителя, получим

$$U_{вх} = IR_{вх} = \frac{\mathcal{E}_{бп}}{R_i + R_{вх}} R_{вх} = \frac{\mathcal{E}_{бп}}{R_i/R_{вх} + 1}. \qquad (18.5)$$

Из (18.5) следуют некоторые предельные случаи: 1) $U_{вх} \to 0$ при $R_{вх} \to 0$, т. е. на входе усилителя не будет напряжения, если его входное сопротивление равно нулю; 2) $U_{вх} \to \mathcal{E}_{бп}$ при $R_{вх} \to \infty$, т. е. максимально возможное напряжение на усилителе будет при бесконечно большом его входном сопротивлении. Во втором случае тока во входной цепи нет; следовательно, не будет передаваться и мощность от источника сигнала.

В реальной ситуации на входе усилителя окажется часть напряжения, генерируемого биологической системой и зависящего от отношения $R_i/R_{вх}$ [см. (18.5)].

Эти примеры обращают внимание на необходимость согласования сопротивлений. В электрофизиологии считают, что $R_{вх}$ должно в 10—20 раз превышать наибольшее возможное значение R_i.

Малая частота биологических электрических сигналов приводит к тому, что в цепях усилителя невозможно использовать кон-

денсаторы, так как при малых частотах значительно возрастает емкостное сопротивление [см. (14.33)]. Приходится использовать специальные усилители постоянного тока.

Малость биопотенциалов побуждает использовать усилители с достаточно большим коэффициентом усиления, поэтому даже небольшие помехи, попадающие на вход усилителя, могут исказить полезный биоэлектрический сигнал и вызвать ложную информацию. Помехами можно считать любые токи или напряжения на выходе усилителя при отсутствии на его входе полезного сигнала.

От одних помех можно избавиться или уменьшить их влияние, усложнив и удорожив конструкцию усилителя. От других избавиться в принципе невозможно, и поэтому приходится использовать каскад с небольшим коэффициентом усиления.

Так, например, переменный ток городской сети может наводить ЭДС вследствие электромагнитной индукции в рядом расположенных усилительных цепях и биологических объектах. Экранирование усилителя и проводников в его цепи, а также исследуемых систем, удаление этих элементов от проводников с переменным током позволяет устранить или уменьшить и эти помехи.

Если детали усилителя (электроды ламп, пластины конденсаторов и др.) будут колебаться, то это приведет к периодическому изменению параметров схемы и, как следствие, к возникновению случайных электромагнитных колебаний — ***микрофонный эффект***. Укрепляя детали схемы и усиливая амортизацию, можно уменьшить или ликвидировать помехи и этого вида.

Большая группа помех получила название ***шумов*** (электронных шумов). Шумы слышны, например, в приемнике в виде шипения, треска и шороха. Особенно это заметно при большом усилении.

Термин «шумы» произошел от слухового восприятия электрических хаотических сигналов (в области частот 20 Гц — 20 кГц) при подключении репродуктора. Однако сейчас это понятие используется безотносительно к их частотному интервалу и тем более безотносительно к тому, воспроизводятся ли шумы звуковыми волнами или нет.

Шумы имеют разную физическую природу, в значительной степени они обусловлены флуктуациями токов, т. е. случайными отклонениями их от средней величины, что вызвано беспорядочными движениями электронов. Избавиться от шума достаточно сложно, стараются изготовить специальные малошумящие транзисторы и лампы для использования в первых каскадах усилителей.

Искажения усиленного сигнала могут возникнуть и вследствие нестабильности источников питания, поэтому в некоторых случаях следует специально предусматривать стабилизацию напряжения.

§ 18.5. Различные виды электронных генераторов. Генератор импульсных колебаний на неоновой лампе

В медицине электронные генераторы находят три основных применения:

— ***в физиотерапевтической электронной аппаратуре;***

— ***в электронных стимуляторах;***

— ***в отдельных диагностических приборах, например в реографе.***

Основанием для классификации генераторов электрических колебаний могут быть разные признаки: разновидность технического устройства, область частот, уровень мощности и т. п. Для практического использования генераторов в медицине весьма существенна форма генерируемых электрических колебаний. В этом отношении они подразделяются на генераторы *гармонических* (*синусоидальных*) и *импульсных* (*релаксационных*) колебаний.

В качестве некоторого примера рассмотрим работу генератора импульсных (релаксационных) колебаний на неоновой лампе. Одна из возможных схем такого генератора показана на рис. 18.6. Здесь Л — неоновая лампа. Такие лампы «зажигаются» при некотором строго определенном значении напряжения $U_з$, а гаснут при меньшем напряжении $U_г$. Процесс начинается с зарядки конденсатора C. На графике зависимости выходного напряжения от времени (рис. 18.7) этот этап показан отрезком OA, отвечающим уравнению (14.17). В точке A напряжение на конденсаторе достигает значения $U_з$, достаточного для ионизации газа в неоновой лампе, лампа загорается и конденсатор разряжается через нее [см. (14.15)]. В точке B напряжение на лампе станет рав-

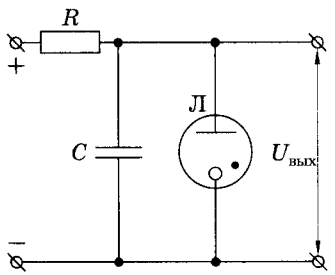


Рис. 18.6

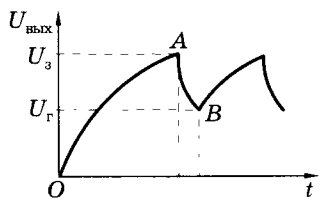


Рис. 18.7

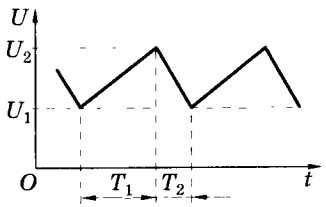


Рис. 18.8

ным $U_г$, лампа гаснет и ее сопротивление значительно возрастает. Конденсатор опять подзаряжается, и процесс повторяется.

Как видно из (14.17), скорость возрастания напряжения в такой схеме можно изменять, изменяя параметры R и C. Так, увеличение сопротивления приведет к увеличению времени τ, участок OA станет более пологим. Изменение напряжения на участке AB происходит при разряде неоновой лампы и зависит, следовательно, от ее характеристик. Подбирая параметры схемы, можно реальный график (см. рис. 18.7) приблизить к идеальному, называемому ***пилообразным напряжением*** (рис. 18.8). График зависимости этого напряжения от времени напоминает профиль пилы. В течение времени T_1 напряжение линейно возрастает от U_1 до U_2, затем за время T_2 оно линейно уменьшается до минимального значения. Если требуется более точное приближение к линейному изменению напряжения со временем, то применяют более сложные схемы. Пилообразное напряжение используется в генераторе развертки электронного осциллографа (см. § 18.8).

§ 18.6. Электронные стимуляторы. Низкочастотная физиотерапевтическая электронная аппаратура

Будем, ради краткости, называть физиотерапевтическую электронную аппаратуру низкой и звуковой частоты ***низкочастотной***. Электронную аппаратуру всех других частот — обобщающим понятием ***высокочастотная***.

Медицинские аппараты — генераторы гармонических и импульсных низкочастотных электромагнитных колебаний — объединяют две большие группы устройств, которые трудно четко разграничить: ***электронные стимуляторы*** (***электростимуляторы***) и ***аппараты физиотерапии***. При небольших частотах наиболее существенно специфическое, а не тепловое, действие тока. Поэтому лечение током имеет характер стимулирования какого-либо эффекта раздражением токами. Это обстоятельство, вероятно, и влечет смешение понятий «лечебный аппарат» и «электростимулятор».

Хотя электрическое раздражение мышцы было обнаружено еще в XVIII в., широкое использование электростимуляторов началось

лишь в последние десятилетия. В настоящее время имеется много разных электростимуляторов. Но и сейчас важной медицинской и физиологической проблемой остается точное задание выходных параметров электрического сигнала разработчикам электростимуляторов: форма импульса, его длительность, частота импульсного тока и скважность следования импульсов (см. гл. 14 и 15).

Электростимуляторы могут быть подразделены на ***стационарные***, ***носимые*** и ***имплантируемые*** (***вживляемые***). Для полностью имплантируемых электростимуляторов, например кардиостимуляторов, достаточно серьезной проблемой являются источники питания, которые должны длительно и экономно функционировать. Эта проблема решается как созданием соответствующих источников, так и разработкой экономичных генераторов. Так, например, желательно иметь генераторы, которые практически не потребляли бы энергию в паузе между импульсами.

В качестве примера стационарного стимулятора широкого назначения можно указать универсальный электроимпульсатор (рис. 18.9). Он представляет собой генератор импульсного тока прямоугольной и экспоненциальной формы. Параметры импульсов и их частота могут регулироваться в широких пределах, так, например, длительность прямоугольных импульсов способна изменяться дискретно от 0,01 до 300 мс. Аппарат позволяет измерять амплитуду импульса тока в цепи пациента. На экране электронно-лучевой трубки (левая сторона лицевой панели) можно наблюдать форму импульсов на выходе аппарата.

Примером своеобразного стимулятора являются ***дефибрилляторы*** — аппараты, представляющие собой генераторы мощных высоковольтных электрических импульсов, предназначаемые для лечения тяжелых нарушений ритма сердца. Дефибриллятор включает накопитель энергии (конденсатор), устройство заряда конденсатора и разрядную цепь. На рис. 18.10 показан внешний вид импульсного дефибриллятора.

Носимым и частично имплантируемым кардиостимулятором является имплантируемый радиочастотный электрокардиостиму-

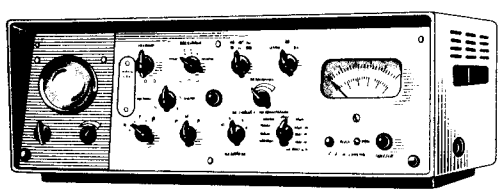


Рис. 18.9

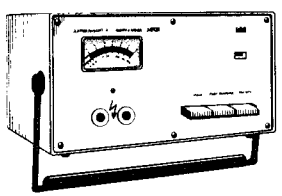


Рис. 18.10

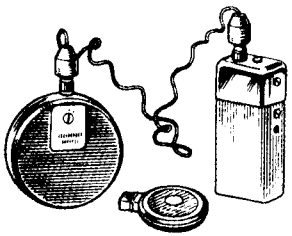


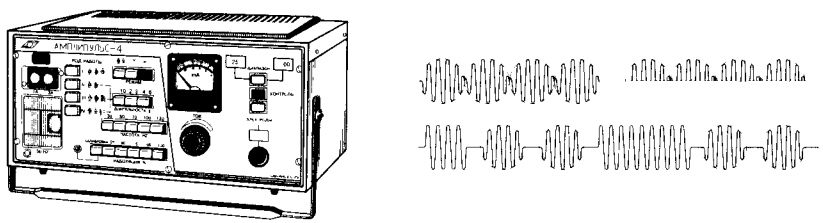
Рис. 18.11

лятор (рис. 18.11). Имплантируемая его часть (приемник) показана в центре рисунка, ее масса 22 г, толщина 8,5 мм. Приемник воспринимает радиосигналы от внешнего передатчика (на рисунке слева). Эти сигналы воспринимаются внутри тела больного имплантируемой частью и в виде импульсов через электроды подаются на сердце. В правой части рисунка показан блок питания, который, как и передатчик, носится больным снаружи.

К особой разновидности электростимуляторов можно отнести такие, которые способны в закодированной форме передавать информацию, обычно воспринимаемую органами чувств. Подобным стимулятором является кохлеарный протез, преобразующий звуковую информацию в электрический сигнал, т. е., по существу, заменяющий улитку внутреннего уха (см. § 6.5). Носимый кохлеарный протез показан на рис. 6.12.

К техническим устройствам электростимуляции относятся также электроды для подведения электрического сигнала к биологической системе. Во многих случаях электростимулирование осуществляется пластинчатыми электродами, которые накладываются на тело человека подобно электродам для электрокардиографии (см. § 17.2). Для вживляемых электродов проблемы более серьезные, в том числе и проблема выбора материала, устойчивого к коррозии при прохождении тока в условиях агрессивной биологической среды.

Примером физиотерапевтического аппарата для электротерапии синусоидальными модулированными токами является «Амплипульс-4» (рис. 18.12, *а*). В нем частота несущих синусоидальных колебаний равна 5 кГц, частота модулирующих синусоидальных колебаний может плавно регулироваться в пределах 10—150 Гц. Некоторые возможные формы токов, созданные этим генератором, показаны на рис. 18.12, *б*; соотношение между частотами несущих и модулирующих колебаний на рисунке не выдержано.



а) *б*)

Рис. 18.12

§ 18.7. Высокочастотная физиотерапевтическая электронная аппаратура. Аппараты электрохирургии

Большая группа медицинских аппаратов — генераторов электромагнитных колебаний и волн — работает в диапазоне ультразвуковых (надтональных), высоких, ультравысоких и сверхвысоких частот и называется обобщающим термином ***высокочастотная электронная аппаратура.***

Проблема электродов в данном случае решается по-разному. Для высокочастотных токов (см. рис. 15.5) используются стеклянные электроды, воздействие переменным магнитным полем (индуктотермия) оказывается через спирали или плоские свернутые кабели, по которым проходит переменный ток, создавая переменное магнитное поле. При УВЧ-терапии прогреваемую часть тела помещают между дискообразными металлическими электродами (рис. 18.13), покрытыми слоем изолятора. При воздействии электромагнитными волнами приближают к телу излучатель этих волн.

Для безопасности больного электроды подключаются не к колебательному контуру генератора (КГ), а к контуру пациента (терапевтическому контуру, ТК), который индуктивно связан с основным колебательным контуром генератора (рис. 18.14). Индуктивная связь исключает возможность случайного попадания больного под высокое постоянное напряжение, которое практически имеется в большинстве медицинских высокочастотных генераторов. На рис. 18.14 изображен генератор на триоде, так как ламповые генераторы еще применяются в медицинской аппаратуре в связи с необходимостью получить достаточно большую мощность.

Физиотерапевтические аппараты, являющиеся генераторами электромагнитных колебаний, конструируются так, чтобы не мешать радиоприему и телевидению. Это обеспечивается, с одной стороны, специальными помехозащитными устройствами, а с другой стороны, определенным строгим заданием диапазона рабочих частот.

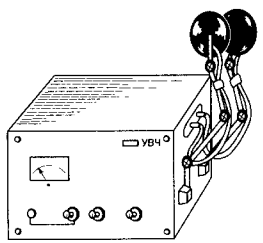


Рис. 18.13

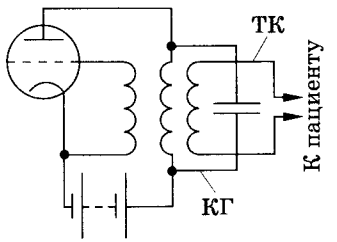


Рис. 18.14

Внешний вид некоторых аппаратов показан на рисунках: аппарат «Искра-1» — высокочастотный генератор, работающий в импульсном режиме и используемый для местной дарсонвализации (рис. 18.15), аппарат ИКВ-4 для индуктотермии, работающий на частоте 13,56 МГц (рис. 18.16), переносной аппарат для УВЧ-терапии — УВЧ-66 (см. рис. 18.13).

К высокочастотной электронной медицинской аппаратуре относят и аппараты электрохирургии (высокочастотной хирургии). Основой этих устройств является генератор электромагнитных колебаний, гармонических или модулированных. Мощность используемых в электрохирургии электромагнитных колебаний может быть от 1 Вт до нескольких сотен ватт.

Особенность генераторов в том, что они должны отдавать мощность в нагрузку (биологическая ткань), которая изменяется в значительных пределах. Длительное время генераторы вообще могут работать без нагрузки, поэтому в аппаратах электрохирургии еще в значительной степени используются вакуумные лампы, которые по сравнению с полупроводниковыми устройствами обладают большей устойчивостью к возможным перегрузкам.

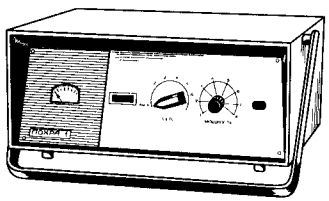


Рис. 18.15

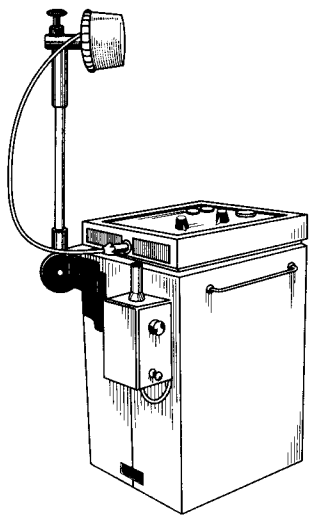


Рис. 18.16

При электрохирургии электромагнитные колебания подаются на электроды, которые рассекают или коагулируют ткань. Различают электроды для монополярной и биполярной электрохирургии.

В первом случае один выход генератора соединен с активным электродом, которым и осуществляют электрохирургическое воздействие, а другой электрод — пассивный — контактирует с телом пациента.

Во втором случае оба выхода генератора соединены с двумя активными электродами, между которыми протекает высокочастотный ток, оказывая хирургическое воздействие. В этом случае оба электрода являются активными, а пассивный электрод не используется.

§ 18.8. Электронный осциллограф

Осциллограф — это измерительное устройство для визуального наблюдения или записи функциональной зависимости двух величин, преобразованных в электрический сигнал. Осциллографы широко используют для наблюдения временно́й зависимости переменной величины.

Главной частью электронного осциллографа является электронно-лучевая трубка (ЭЛТ), показанная на рис. 18.17. Ее элементы расположены в вакуумированном баллоне Б. Они включают в себя люминесцирующий экран Э, отклоняющую систему О из двух пар отклоняющих пластин и электронную пушку П (выделена штриховой линией), состоящую из подогревного катода, подобного катоду диода, и специальных электродов, которые ускоряют и фокусируют электроны. На пластины вертикального и горизонтального отклонения подается разность потенциалов. В зависимости от ее знака и значения пучок электронов отклоняется в вертикальном или горизонтальном направлении. Сформированный и определенным образом направленный электронный пучок попадает на люминесцирующий экран — переднюю стенку электронно-лучевой трубки, покрытую люминофорами, которые способны светиться под воздействием ударов электронов (***катодолюминесценция***).

Пучок электронов на экране изобразится светящейся точкой. Плавно изменяя напряжение на отклоняющих пластинах, светящуюся точку можно перемещать по экрану. Люминофоры обладают свойством послесвечения, они светятся в данном месте некоторое время после того, как электронный пучок сместился с данного места. Поэтому перемещение пучка наблюдается на экране в виде линии.

Структурная схема осциллографа дана на рис. 18.18: $У_X$ и $У_Y$ — усилители, БП — блок питания, ГР — генератор развертки, ЭЛТ — электронно-лучевая трубка. Имеется также блок син-

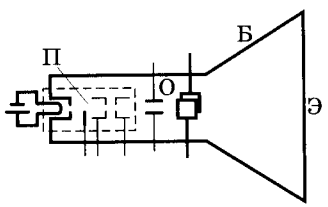


Рис. 18.17

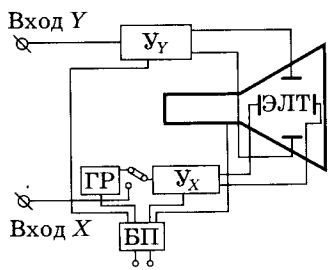


Рис. 18.18

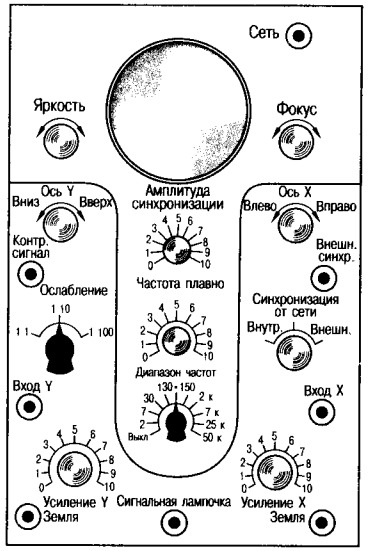


Рис. 18.19

хронизации. На рис. 18.19 изображена передняя панель осциллографа.

Поданный на клеммы «Вход Y» и «Земля» сигнал усиливается и подается на вертикально отклоняющие пластины. На экране осциллографа такой сигнал изобразится отрезком вертикальной прямой.

Для наблюдения зависимости сигнала от времени следует светящейся точке сообщить одновременно равномерное движение в горизонтальном направлении. Чтобы записать периодический процесс, точка должна за некоторый конечный промежуток времени переместиться слева направо по экрану и в возможно короткий промежуток времени вернуться обратно. Поэтому напряжение, подаваемое на горизонтально отклоняющие пластины, должно иметь пилообразный вид (см., например, рис. 18.8, причем $T_1 \gg T_2$). Принцип устройства, служащего для этой цели, — генератора развертки — был рассмотрен в § 18.5.

Для того чтобы периодический процесс отображался на экране неподвижным изображением, необходимо подобрать достаточно точно частоту развертки: на один период времени развертки должно приходиться целое число периодов исследуемого сигнала. Это условие выполняется блоком синхронизации развертки. Ручки «Диапазон частот» и «Частота плавно» позволяют задавать нужную частоту развертки.

Если исследуемый процесс однократный или непериодический, то может быть использован ждущий режим развертки, предусмотренный в некоторых осциллографах. Этот режим развертки действует каждый раз и только тогда, когда возникает регистрируемый процесс.

Вращая ручки «Яркость» и «Фокус», изменяют разность потенциалов между ускоряющими электродами, благодаря чему достигаются различная интенсивность и площадь сечения электронного пучка. При этом происходит изменение яркости и фокусировки светящейся точки. Ручки «Ось Y» и «Ось X» служат для смещения всей изображаемой картины в вертикальном или горизонтальном направлении.

Для наблюдения зависимости каких-либо двух величин подают электрические сигналы, отвечающие этим величинам, на клеммы «Вход Y» и «Вход X». Генератор развертки при этом не включается. Так, в частности, можно получить фигуры Лиссажу (см. § 5.3), вектор-кардиограмму (см. § 12.5).

С помощью ручки «Усиление» изменяют усиление поданного сигнала. При этом на экране осциллографа изображение растягивается или сжимается по соответствующему направлению.

Для калибровки масштаба времени в некоторых осциллографах предусмотрен генератор меток времени для периодического изменения яркости пятна на экране. Благодаря этому можно определять длительность изображаемого процесса или его отдельных частей.

Изображение, полученное на экране электронного осциллографа, может быть сфотографировано.

РАЗДЕЛ

6

Оптика

Оптика — раздел физики, в котором рассматриваются закономерности излучения, поглощения и распространения света. В физике термин «свет» применяют не только к излучению, воспринимаемому глазом человека, но и к невидимому излучению. Природа света двойственна, дуалистична. Это означает, что свет проявляет себя и как электромагнитная волна, и как поток частиц — фотонов. Дуализм света, в частности, отражается формулой $\varepsilon = h\nu$, так как энергия ε фотона является квантовой характеристикой, а частота колебаний ν — характеристикой волнового процесса.

В одних оптических явлениях в большей степени проявляются волновые свойства света, а в других — корпускулярные. Двойственная природа присуща также и частицам — электрону, протону и т. д.

Так как свет обладает электромагнитной природой, то оптику целесообразно изучать после электродинамики. Вопросы излучения света граничат с атомной физикой и существенно с ней связаны. Поэтому раздел «Оптика» предшествует атомной физике.

В развитии физики оптические наблюдения, эксперименты и теории сыграли особую роль: прямолинейное распространение света и его отражение от зеркальных поверхностей было известно еще задолго до нашей эры; интерференционный опыт Майкельсона явился экспериментальным основанием теории относительности; гипотеза Планка о дискретности излучения положила начало квантовой физике.

Исследования видимого света и связанные с этим измерения относятся не только к области физики, но и к физиологии. В этом отношении оптика подобна акустике.

Для медиков и биологов эти знания прежде всего важны при исследовании биологических объектов: микроскопия, спектрометрия, рефрактометрия, поляриметрия, колориметрия. Кроме того, врачам следует знать физические основы использования теплового излучения для диагностики заболевания (термография), устройство аппаратуры светолечения и другие вопросы.

ГЛАВА 19

Интерференция и дифракция света. Голография

Под интерференцией света понимают такое сложение световых волн, в результате которого образуется устойчивая картина их усиления и ослабления. Для получения интерференции света необходимо выполнение определенных условий.
Дифракцией света называют явление отклонения света от прямолинейного распространения в среде с резкими неоднородностями. Возможность наблюдения дифракции зависит, в частности, от соотношения длины волны и размеров неоднородностей. Различают с некоторой степенью условности дифракцию сферических волн (дифракция Френеля) и дифракцию плоскопараллельных волн (дифракция Фраунгофера). Описание дифракционной картины возможно с учетом интерференции вторичных волн.
В главе рассматривается голография как метод, основанный на интерференции и дифракции.

§ 19.1. Когерентные источники света. Условия для наибольшего усиления и ослабления волн

Сложение волн, распространяющихся в среде, определяется сложением в разных точках пространства соответствующих колебаний. Наиболее простой случай сложения электромагнитных волн наблюдается тогда, когда их частоты одинаковы и направления электрических векторов совпадают. В этом случае амплитуду результирующей волны можно найти по формуле (5.30), которую для амплитуды напряженности электрического поля запишем в виде

$$E_m^2 = E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m}\cos\Delta\varphi, \qquad (19.1)$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз слагаемых волн (колебаний).

В зависимости от типа источников света результат сложения волн может быть принципиально различным.

Сначала рассмотрим сложение волн, идущих от обычных источников света (лампа, пламя, Солнце и т. п.). Каждый такой источник представляет совокупность огромного количества излучающих атомов. Отдельный атом излучает электромагнитную волну приблизительно в течение 10^{-8} с, причем излучение есть событие случайное, поэтому и разность фаз $\Delta\varphi$ в формуле (19.1) принимает случайные значения. При этом среднее по излучениям всех атомов значение $\cos\Delta\varphi$ равно нулю. Вместо (19.1) получаем усредненное равенство для тех точек пространства, где складываются две волны, идущие от двух обычных источников света:

$$\langle E_m^2\rangle = \langle E_{1m}^2\rangle + \langle E_{2m}^2\rangle. \qquad (19.2)$$

Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды [см. (14.60)], то из (19.2) имеем условие сложения интенсивностей I_1 и I_2 волн:

$$I = I_1 + I_2. \qquad (19.3)$$

Это означает, что для интенсивностей излучений, исходящих от двух (или более) обычных световых источников, выполняется достаточно простое правило сложения: интенсивность суммарного излучения равна сумме интенсивностей слагаемых волн. Это наблюдается в повседневной практике: освещенность от двух ламп равна сумме освещенностей, создаваемых каждой лампой в отдельности.

Если $\Delta\varphi$ остается неизменной во времени, наблюдается интерференция света. Интенсивность результирующей волны принимает в разных точках пространства значения от *минимального* до некоторого *максимального*.

Интерференция света возникает от согласованных, когерентных источников, которые обеспечивают постоянную во времени разность фаз $\Delta\varphi$ у слагаемых волн в различных точках. Волны, отвечающие этому условию, называют ***когерентными***.

Интерференция могла бы быть осуществлена от двух синусоидальных волн одинаковой частоты, однако на практике создать такие световые волны невозможно, поэтому когерентные волны получают, «расщепляя» световую волну, идущую от источника.

Такой способ применяется в *методе Юнга*. На пути сферической волны, идущей от источника S, устанавливается непрозрачная преграда с двумя щелями (рис. 19.1). Точки волновой поверхности, дошедшей до преграды, становятся центрами когерентных вторичных волн,

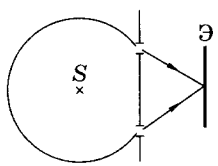


Рис. 19.1

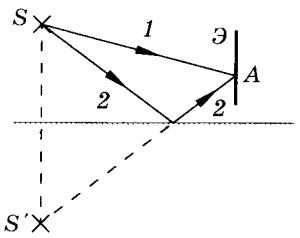


Рис. 19.2

поэтому щели можно рассматривать как когерентные источники. На экране Э наблюдается интерференция.

Другой метод заключается в получении мнимого изображения S' источника S (рис. 19.2) с помощью зеркала (*зеркало Ллойда*). Источники S и S' являются когерентными. Они создают условия для интерференции волн. На рисунке показаны два интерферирующих луча, попадающие в некоторую точку A экрана Э.

Так как время τ излучения отдельного атома ограничено, то разность хода δ лучей *1* и *2* при интерференции не должна быть слишком большой, в противном случае в точке A встретятся некогерентные волны. Наибольшее значение δ для интерференции определяется через скорость света и время излучения атома:

$$\delta = c\tau = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}\ \text{м} = 3\ \text{м}. \qquad \textbf{(19.4)}$$

Реальные источники состоят из множества беспорядочно излучающих атомов, поэтому время τ' их согласованного излучения на много порядков меньше времени излучения τ отдельного атома. Вследствие этого реальная разность хода δ' интерферирующих лучей должна быть на много порядков меньше, чем величина δ, определяемая формулой (19.4).

Расчет интерференционной картины можно сделать, используя формулу (19.1), если известны разность фаз интерферирующих волн и их амплитуды. Практический интерес представляют частные случаи: наибольшее усиление волн — *максимум интенсивности* (max), наибольшее ослабление — *минимум интенсивности* (min).

Отметим, что условия максимумов и минимумов интенсивностей удобнее выражать не через разность фаз, а через разность хода волн, так как пути, проходимые когерентными волнами при интерференции, обычно известны. Покажем это на примере интерференции плоских волн *I* и *II*, векторы $\vec{E}$ которых перпендикулярны плоскости чертежа (рис. 19.3).

Колебания векторов $\vec{E}$ этих волн в некоторой точке B, удаленной на расстояния x_1 и x_2 соответственно от каждого источника, происходят по гармоническому закону

$$E_1 = E_{1\text{m}}\cos\omega(t - x_1/v_1),\ E_2 = E_{2\text{m}}\cos\omega(t - x_2/v_2). \qquad \textbf{(19.5)}$$

Для общности вывода предположим, что волны распространяются в разных средах[1] с показателями преломления n_1 и n_2. Скорости распространения волн соответственно равны $v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$, где c — скорость света в вакууме. Тогда из (19.5) следует выражение для разности фаз[2]:

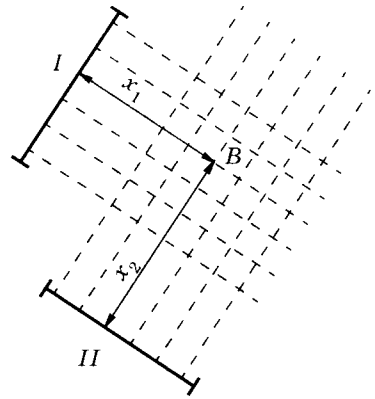


Рис. 19.3

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 =$$
$$= \omega(t - x_2/v_2) - \omega(t - x_1/v_1) =$$
$$= \omega\,(x_1/v_1 - x_2/v_2) =$$
$$= \frac{2\pi}{Tc}(x_1n_1 - x_2n_2). \qquad \textbf{(19.6)}$$

Так как длина волны в вакууме $\lambda = Tc$, то вместо (19.6) имеем

$$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)(x_1n_1 - x_2n_2). \qquad \textbf{(19.7)}$$

Произведение геометрического пути волны на показатель преломления среды, т. е. xn, называют ***оптической длиной пути***, а разность этих путей

$$\delta = x_1n_1 - x_2n_2 \qquad \textbf{(19.8)}$$

— ***оптической разностью хода волн***.

На основании (19.7) и (19.8) получим связь между разностью фаз и оптической разностью хода интерферирующих волн:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \text{ или } \delta = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi. \qquad \textbf{(19.9)}$$

Используя законы сложения колебаний (см. § 5.3.) и соотношение (19.9), получаем ***условия максимума*** и ***минимума*** интенсивности света при интерференции — соответственно

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi}2k\pi = k\lambda \qquad \textbf{(19.10)}$$

$$\text{и}\quad \delta = \frac{\lambda}{2\pi}(2k + 1)\pi = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \qquad \textbf{(19.11)}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

---

[1] Схематичность рис. 19.3 не позволяет показать разные среды распространения для различных волн.

[2] Полезно заметить, что так как $\Delta\varphi$ не зависит от времени, то слагаемые волны являются когерентными.

Следовательно, **максимум при интерференции наблюдается в тех точках, для которых оптическая разность хода равна целому числу длин волн (четному числу полуволн), минимум — в тех точках, для которых оптическая разность хода равна нечетному числу полуволн.**

§ 19.2. Интерференция света в тонких пластинках (пленках). Просветление оптики

Образование когерентных волн и интерференция происходят также при попадании света на тонкую прозрачную пластинку или пленку.

Пучок света падает на плоскопараллельную пластинку (рис. 19.4). Луч *1* из этого пучка попадает в точку *A*, частично отражается (луч *2*), частично преломляется (луч *AM*). Преломленный луч испытывает отражение на нижней границе пластинки в точке *M*. Отраженный луч, преломившись в точке *B*, выходит в первую среду (луч *3*). Лучи *2* и *3* образованы от одного луча, поэтому они когерентны и будут интерферировать.

Найдем оптическую разность хода лучей *2* и *3*. Для этого из точки *B* проведем нормаль *BC* к лучам. От прямой *BC* до встречи лучей их оптическая разность хода не изменится, линза или глаз не внесут дополнительной разности фаз. До расхождения в точке *A* эти лучи в совокупности с другими, параллельными им, не показанными на рис. 19.4, формировали луч *1* и поэтому, естественно, имели одинаковую фазу. Луч *3* прошел расстояние $|AM| + |MB|$ в пластинке с показателем преломления n, луч *2* — расстояние $|AC|$ в воздухе, поэтому их оптическая разность хода

$$\delta = (|AM| + |MB|)n - |AC| = 2|AM|n - |AC|, \qquad \textbf{(19.12)}$$

так как $|AM| = |MB|$. Согласно закону преломления,

$$n = \sin i/\sin r \text{ или } \sin i = n\sin r, \qquad \textbf{(19.13)}$$

где i — угол падения, r — угол преломления.

Из ΔAMO находим: $|AM| = |OM|/\cos r = l/\cos r$, $|AO| = |OM|\operatorname{tg} r = l\operatorname{tg} r$ (l — толщина пластинки). Из ΔACB находим $|AC| = |AB|\sin i = 2|AO| \times \sin i$. Учитывая эти равенства, а также (19.13), получаем $|AC| = 2l n \operatorname{tg} r \sin r = 2ln \sin^2 r/\cos r$.

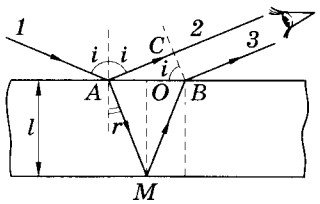


Рис. 19.4

Тогда оптическая разность хода интерферирующих волн равна

$$\delta = 2ln/\cos r - 2ln \sin^2 r/\cos r = 2ln \cos r. \qquad \textbf{(19.14)}$$

В формуле (19.14) не учтено одно важное обстоятельство. Опыт показывает, что при отражении света от среды оптически более плотной, т. е. с бóльшим показателем преломления, фаза волны изменяется на π, что соответствует [см. (19.9)] изменению оптической разности хода на $\lambda/2$, т. е. при ***отражении света от среды оптически более плотной происходит «потеря полволны»***[1].

Если бы оба луча *2* и *3* теряли полволны, то это не изменило бы выражения для δ (19.14). Однако луч *2* отражается от среды оптически более плотной (точка *A*) и теряет полволны, а луч *3* отражается от среды оптически менее плотной (точка *M*), его фаза при этом не изменяется. С *учетом потери полволны* оптическая разность хода

$$\delta = 2ln \cos r - \lambda/2, \text{ или } \delta = 2ln \cos r + \lambda/2. \qquad \textbf{(19.15)}$$

Так как $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \sin^2 i/n^2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i}/n$, то δ можно выразить и через угол падения:

$$\delta = 2ln\sqrt{n^2 - \sin^2 i}/n - \lambda/2 = 2l\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \lambda/2. \qquad \textbf{(19.16)}$$

Для ***максимума интерференции*** [см. (19.10), (19.16)] имеем

$$2l\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2k + 1)(\lambda/2);\ k = 0, 1, 2 \ldots . \qquad \textbf{(19.17)}$$

Для ***минимума интерференции*** [см. (19.11), (19.16)] имеем[2]

$$2l\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = k\lambda;\ k = 0, 1, 2 \ldots . \qquad \textbf{(19.18)}$$

Формулы (19.17) и (19.18) соответствуют интерференции в отраженном свете. Интерференция в проходящем через пластинку свете показана на рис. 19.5; изображены только те лучи, которые необходимы для понимания явления.

Читатель может самостоятельно вывести соответствующие формулы и убедиться, что для этого случая (19.17) соответствует минимуму интерференции, а (19.18) — максимуму. С учетом закона сохранения энергии это понятно, так как интерференция есть перерас-

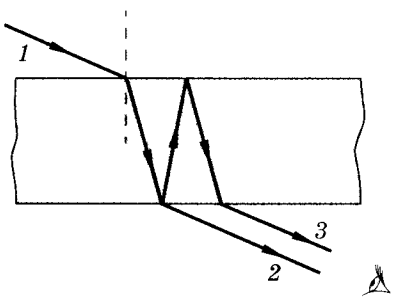


Рис. 19.5

[1] Для циклических процессов не имеет значения, уменьшается или увеличивается фаза на π, поэтому равноценно было бы говорить не о потере, а о приобретении полволны, однако такая терминология не употребляется.

[2] Для того чтобы при максимумах и минимумах сохранить для k те же значения (0, 1, 2 и т. д.), формулу (19.16) для δ записываем с $+ \lambda/2$.

пределение световой энергии: падающий поток перераспределяется пластинкой на отраженный и проходящий (поглощением здесь пренебрегаем), причем если отраженный максимален, то проходящий минимален, и наоборот.

Интерференция при отражении наблюдается более отчетливо, чем в проходящем свете, что обусловлено существенным различием интенсивностей отраженного и проходящего лучей. Если принять, что на границе раздела прозрачных сред отражается около 5% падающей энергии, то

$$I_2 = 0{,}05 I_1, \qquad \textbf{(19.19)}$$

где I_1 и I_2 — интенсивности лучей *1* и *2* соответственно (см. рис. 19.4). Интенсивность луча *3* с учетом двукратного преломления и однократного отражения равна

$$I_3 = 0{,}95 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 I_1. \qquad \textbf{(19.20)}$$

Из (19.19) и (19.20) имеем

$$I_2 : I_3 \approx 1{,}1, \qquad \textbf{(19.21)}$$

что означает приближенное равенство амплитуд интерферирующих лучей при отражении: условие минимума соответствует почти полной темноте. Делая аналогичный расчет для проходящего света (рис. 19.5), получаем

$$I_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}95 I_1; \quad I_3 = 0{,}95 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 I_1;$$

$$I_2 : I_3 \approx 400,$$

или для амплитуд

$$A_2 : A_3 \approx 20. \qquad \textbf{(19.22)}$$

Из (19.22) видно, что в проходящем свете интерферируют волны с существенно различными амплитудами, поэтому максимумы и минимумы мало отличаются друг от друга и интерференция слабо заметна.

Проанализируем зависимости (19.17) и (19.18).

Если на тонкую плоскопараллельную пластинку под некоторым углом падает параллельный пучок монохроматического излучения, то, согласно этим формулам, пластинка в отраженном свете выглядит яркой или темной.

При освещении пластинки белым светом условия максимума и минимума выполняются для отдельных длин волн, пластинка станет окрашенной, причем цвета в отраженном и проходящем свете будут дополнять друг друга до белого.

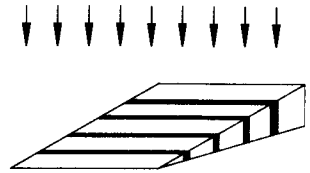


Рис. 19.6

При падении монохроматического света на пластинку переменной толщины каждому значению l соответствует свое условие интерференции, поэтому пластинка пересечена светлыми и темными линиями (полосами) — ***линиями равной толщины***. Так, в клине это система параллельных линий (рис. 19.6), в воздушном промежутке между линзой и пластинкой — кольца (***кольца Ньютона***).

При освещении пластинки переменной толщины белым светом получаются разноцветные пятна и линии: окрашенные мыльные пленки, пленки нефти и масла на поверхности воды, переливчатые цвета крыльев некоторых насекомых и птиц. В этих случаях не обязательна полная прозрачность пленок.

Особый практический интерес имеет интерференция в тонких пленках в связи с созданием устройств, уменьшающих долю световой энергии, отраженной оптическими системами, и увеличивающих, следовательно, энергию, поступающую к регистрирующим системам — фотопластинке, глазу и т. п. С этой целью поверхности оптических систем покрывают тонким слоем оксидов металлов так, чтобы для некоторой средней для данной области спектра длины волны был минимум интерференции в отраженном свете. В результате возрастает доля прошедшего света. Покрытие оптических поверхностей специальными пленками называют просветлением оптики, а сами оптические изделия с такими покрытиями — ***просветленной оптикой***.

Если на стеклянную поверхность нанести ряд специально подобранных слоев, то можно создать отражательный светофильтр, который вследствие интерференции будет пропускать или отражать излучение в определенном интервале длин волн.

§ 19.3. Интерферометры и их применение. Понятие об интерференционном микроскопе

Интерференцию света используют в специальных приборах — ***интерферометрах*** — для измерения с высокой степенью точности длин волн, небольших расстояний, показателей преломления веществ и определения качества оптических поверхностей.

На рис. 19.7 изображена принципиальная схема *интерферометра Майкельсона*, который относится к группе двухлучевых, так как световая волна в нем раздваивается[1] и обе ее части, пройдя разный путь, интерферируют.

Луч *1* монохроматического света от источника S падает под углом 45° на плоскопараллельную стеклянную пластинку A, задняя поверхность которой полупрозрачна, так как покрыта очень тонким слоем серебра. В точке O этот луч расщепляется на два луча *2* и *3*, интенсивность которых приблизительно одинакова.

Луч *2* доходит до зеркала *I*, отражается, преломляется в пластине A и частично выходит из пластины — луч *2′*. Луч *3* из точки O идет к зеркалу *II*, отражается, возвращается к пластине A, где частично отражается, — луч *3′*. Лучи *2′* и *3′*, попадающие в глаз наблюдателя, когерентны, их интерференция может быть зарегистрирована.

Обычно зеркала *I* и *II* располагают так, что лучи *2* и *3* от расхождения до встречи проходят пути одинаковой длины. Чтобы и оптическую длину путей сделать одинаковой, на пути луча *3* устанавливают прозрачную пластину B, аналогичную A, для компенсации двух путей, пройденных лучом *2* через пластину A. В этом случае наблюдается максимум интерференции.

Если одно из зеркал сдвинуть на расстояние $\lambda/4$, то разность хода лучей станет $\lambda/2$, что соответствует минимуму, произойдет смещение интерференционной картины на 0,5 полосы[2].

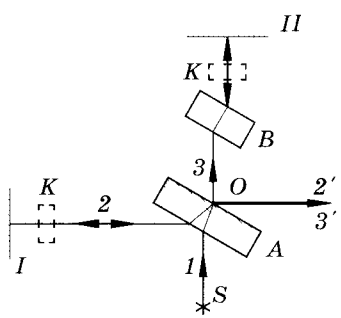


Рис. 19.7

Если зеркало от первоначального положения переместить на расстояние $\lambda/2$, то оптическая разность хода интерферирующих лучей изменится на λ, что соответствует максимуму, произойдет смещение интерференционной картины на целую полосу. Такая связь между перемещением зеркала и изменением интерференционной картины позволяет измерять длину волны по перемещению зеркала и, наоборот, перемещение по длине волны.

[1] Строго говоря, вследствие многократных отражений может образоваться более чем два луча, однако их интенсивности незначительны.

[2] Вследствие разных углов падения лучей из S на пластину A или нестрогой перпендикулярности зеркал *I* и *II* интерференционная картина практически всегда представлена полосами (полосы равного наклона или равной толщины соответственно). Этот вопрос подробно не рассматривается.

Интерферометр Майкельсона применяют для измерения показателя преломления. На пути лучей *2* и *3* устанавливают одинаковые кюветы K (показаны штриховыми линиями на рис. 19.7), одна из которых наполнена веществом с показателем преломления n_1, а другая — с n_2. Оптическая разность хода лучей

$$\delta = 2ln_1 - 2ln_2 = 2l(n_1 - n_2), \qquad \textbf{(19.23)}$$

где l — длина однократного пути луча в среде, заполняющей кюветы; так как лучи проходят кювету дважды, то расстояние равно $2l$. Предположим, что вследствие этой разности хода интерференционная картина смещается на k полос, тогда

$$\delta = k\lambda. \qquad \textbf{(19.24)}$$

Приравнивая (19.23) и (19.24), получаем

$$\Delta n = n_1 - n_2 = k\lambda/(2l). \qquad \textbf{(19.25)}$$

Если считать, что смещение на 0,1 полосы ($k = 0{,}1$) может быть зафиксировано, то, например, при $l = 2{,}5$ см, $\lambda = 500$ нм имеем

$$\Delta n = 0{,}1\frac{500 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0{,}025} = \frac{5 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^{-2}} = 10^{-6}.$$

Как видно, ***интерференционный рефрактометр*** (интерферометр, приспособленный для измерения показателя преломления) способен фиксировать изменения показателя преломления в шестом знаке после запятой.

Интерференционный рефрактометр применяют, в частности, с санитарно-гигиеническими целями для определения содержания вредных газов.

С использованием интерферометра Майкельсон доказал независимость скорости света от движения Земли, что явилось одним из опытных фактов, способствовавших созданию специальной теории относительности.

Сочетание двухлучевого интерферометра и микроскопа, получившее название ***интерференционного микроскопа***, используют в биологии для измерения показателя преломления, концентрации сухого вещества и толщины прозрачных микрообъектов.

Принципиальная схема интерференционного микроскопа показана на рис. 19.8. Луч света, как и в интерферометре, в точке A раздваивается, один луч проходит через прозрачный микрообъект M, а другой — вне его. В точке $Д$ лучи соединяются и интерферируют, по результату интерференции судят об измеряемом параметре.

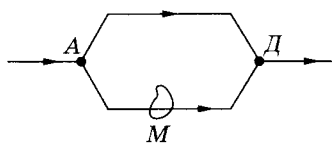


Рис. 19.8

§ 19.4. Принцип Гюйгенса—Френеля

Объяснение и приближенный расчет дифракции света можно осуществить, используя ***принцип Гюйгенса—Френеля***.

Согласно Гюйгенсу, ***каждая точка волновой поверхности***, которой достигла в данный момент волна, ***является центром элементарных вторичных волн***, их внешняя огибающая будет волновой поверхностью в последующий момент времени (рис. 19.9; S_1 и S_2 — волновые поверхности соответственно в моменты t_1 и t_2; $t_2 > t_1$).

Френель дополнил это положение Гюйгенса, введя представление о ***когерентности вторичных волн и их интерференции***. В таком обобщенном виде эти идеи получили название ***принципа Гюйгенса—Френеля***.

Для того чтобы определить результат дифракции в некоторой точке пространства, следует рассчитать, согласно принципу Гюйгенса—Френеля, интерференцию вторичных волн, попавших в эту точку от различных элементов волновой поверхности. Для волновой поверхности произвольной формы такой расчет достаточно сложен, но в отдельных случаях (сферическая или плоская волновая поверхность, симметричное расположение точки относительно волновой поверхности и непрозрачной преграды) вычисления сравнительно просты. Волновую поверхность при этом разбивают на отдельные участки (***зоны Френеля***), расположенные определенным образом, что упрощает математические операции.

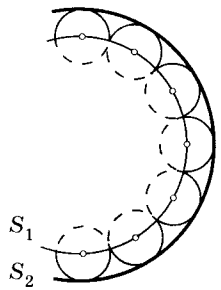


Рис. 19.9

§ 19.5. Дифракция на щели в параллельных лучах

На узкую длинную щель, расположенную в плоской непрозрачной преграде MN, нормально падает плоскопараллельный пучок монохроматического света (рис. 19.10; $AB = a$ — ширина щели; L — собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран $Э$ для наблюдения дифракционной картины).

Если бы не было дифракции, то световые лучи, пройдя через щель, сфокусировались бы в точке O, лежащей на главной оптической оси линзы. Дифракция света на щели существенно изменяет явление.

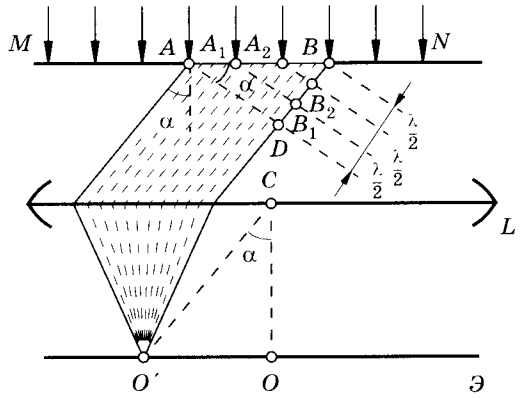


Рис. 19.10

Будем считать, что все лучи пучка света исходят от одного удаленного источника[1] и, следовательно, когерентны. AB есть часть волновой поверхности, каждая точка которой является центром вторичных волн, распространяющихся за щелью по всевозможным направлениям. Изобразить все эти вторичные волны невозможно, поэтому на рис. 19.10 показаны только вторичные волны, распространяющиеся под углом α к направлению падающего пучка и нормали к решетке. Линза соберет эти волны в точке O' экрана, где и будет наблюдаться их интерференция. (Положение точки O' получают как пересечение с фокальной плоскостью побочной оси CO' линзы, проведенной под углом α.)

Чтобы узнать результат интерференции вторичных волн, проделаем следующие построения. Проведем перпендикуляр AD к направлению пучка вторичных волн. Оптические пути всех вторичных волн от AD до O' будут одинаковыми, поскольку линза не вносит добавочной разности фаз между ними, поэтому та разность хода, которая образовалась у вторичных волн к AD, будет сохранена и в точке O'.

Разобьем BD на отрезки, равные $\lambda/2$. В случае, показанном на рис. 19.10, получено три таких отрезка: $|BB_2| = |B_2B_1| = |B_1D| = \lambda/2$. Проведя из точек B_2 и B_1 прямые, параллельные AD, разделим AB на равные зоны Френеля: $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2B|$. Любой вторичной волне, идущей от какой-либо точки одной зоны Френе-

[1] Практически точечный источник можно расположить в фокусе линзы, не показанной на рис. 19.10, так, что от линзы будет распространяться параллельный пучок когерентных волн.

ля, можно найти в соседних зонах соответствующие вторичные волны такие, что разность хода между ними будет $\lambda/2$. Например, вторичная волна, идущая от точки A_2 в выбранном направлении, проходит до точки O' расстояние на $\lambda/2$ больше, чем волна, идущая от точки A_1, и т. д. Следовательно, *вторичные волны, идущие от двух соседних зон Френеля, погасят друг друга*, так как различаются по фазе на π.

Число зон, укладывающихся в щели, зависит от длины волны λ и угла α. Если щель AB можно разбить при построении на нечетное число зон Френеля, а BD — на нечетное число отрезков, равных $\lambda/2$, то в точке O' наблюдается ***максимум интенсивности*** света:

$$|BD| = a \sin\alpha = \pm (2k + 1)(\lambda/2);\ k = 1, 2, \ldots . \qquad \textbf{(19.26)}$$

Направление, соответствующее углу $\alpha = 0$, также отвечает максимуму, так как все вторичные волны придут в O в одинаковой фазе.

Если щель AB можно разбить на четное число зон Френеля, то наблюдается ***минимум интенсивности*** света:

$$a \sin\alpha = \pm 2k(\lambda/2) = \pm k\lambda;\ k = 1, 2, \ldots . \qquad \textbf{(19.27)}$$

Таким образом, на экране $Э$ получится система светлых (максимум) и темных (минимум) полос, центрам которых соответствуют условия (19.26) и (19.27), симметрично расположенных влево и вправо от центральной ($\alpha = 0$), наиболее яркой, полосы. Интенсивность I остальных максимумов быстро убывает по мере удаления от центрального максимума (рис. 19.11).

Если щель освещать белым светом, то на экране $Э$ [см. (19.26), (19.27)] образуется система цветных полос, лишь центральный максимум будет сохранять цвет падающего света, так как при $\alpha = 0$ усиливается свет всех длин волн.

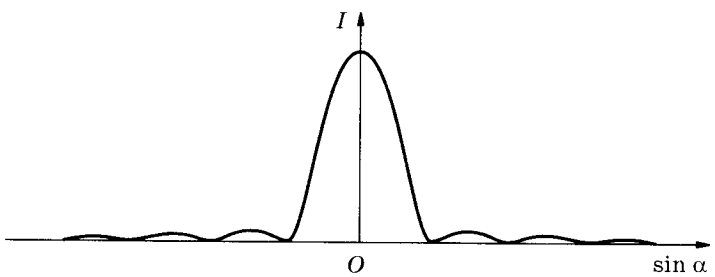


Рис. 19.11

Дифракция света, как и интерференция, связана с перераспределением энергии электромагнитных волн в пространстве. В этом смысле щель в непрозрачном экране является не просто системой, ограничивающей поступление светового потока, но перераспределителем этого потока в пространстве.

Чтобы понять влияние соотношения между шириной щели и длиной волны на возможность наблюдения дифракционной картины, рассмотрим некоторые частные случаи:

1) $\lambda \ll a$. Представив формулу для максимумов в виде

$$\sin\alpha = \pm (2k + 1)\lambda/(2a),$$

имеем $\sin\alpha \approx 0$ практически для всех максимумов, и дифракция при этом не наблюдается. Этот случай соответствует достаточно широкой, по сравнению с длиной волны, щели. Так, например, не удается осуществить дифракцию в комнате при прохождении света через окно;

2) $a < \lambda$. На основании (19.27) для первых минимумов, которые ограничивают центральную светлую полосу, можно записать

$$\sin\alpha = \pm \lambda/a.$$

Отсюда следует, что при заданном условии $\sin\alpha$ формально превышает единицу, чего не может быть. Практически в этом случае вместо системы максимумов и минимумов весь экран будет слабо освещен.

§ 19.6. Дифракционная решетка. Дифракционный спектр

Дифракционная решетка — оптическое устройство, представляющее собой совокупность большого числа параллельных, обычно равноотстоящих друг от друга, щелей.

Дифракционную решетку можно получить нанесением непрозрачных царапин (штрихов) на стеклянную пластину. Непроцарапанные места — щели — будут пропускать свет; штрихи, соответствующие промежутку между щелями, рассеивают и не пропускают света. Сечение такой дифракционной решетки (*а*) и ее условное обозначение (*б*) показаны на рис. 19.12. Суммарную ширину щели a и промежутка b между ще-

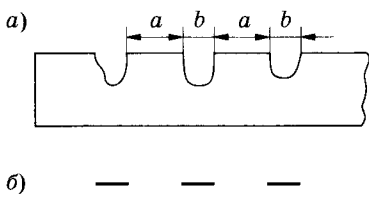


Рис. 19.12

лями называют ***постоянной*** или ***периодом дифракционной решетки***:

$$c = a + b. \qquad (19.28)$$

Если на решетку падает пучок когерентных волн, то вторичные волны, идущие по всевозможным направлениям, будут интерферировать, формируя дифракционную картину.

Пусть на решетку нормально падает плоскопараллельный пучок когерентных волн (рис. 19.13). Выберем некоторое направление вторичных волн под углом α относительно нормали к решетке. Лучи, идущие от крайних точек двух соседних щелей, имеют разность хода $\delta = A'B'$. Такая же разность хода будет для вторичных волн, идущих от соответственно расположенных пар точек соседних щелей. Если эта разность хода кратна целому числу длин волн, то при интерференции возникнут *главные максимумы*, для которых выполняется условие $|A'B'| = \pm k\lambda$, или

$$c \sin \alpha = \pm k\lambda, \qquad (19.29)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ — ***порядок главных максимумов***. Они расположены симметрично относительно центрального ($k = 0$, $\alpha = 0$). Равенство (19.29) является ***основной формулой дифракционной решетки***[1].

Между главными максимумами образуются минимумы (добавочные), число которых зависит от числа всех щелей решетки. Выведем условие для добавочных минимумов. Пусть разность хода вторичных волн, идущих под углом α от соответственных точек соседних щелей, равна λ/N, т. е.

$$\delta = c \sin \alpha = \lambda/N, \qquad (19.30)$$

где N — число щелей дифракционной решетки. Этой разности хода δ [см. (19.9)] отвечает разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi/N$.

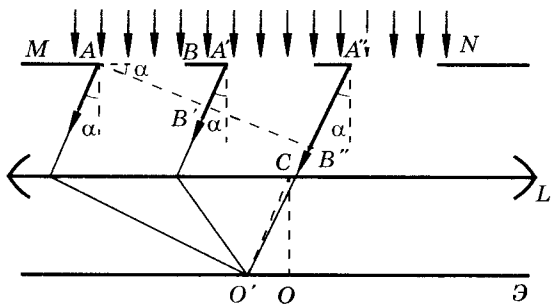


Рис. 19.13

[1] Из формулы (19.29) видно, что максимальное значение k не может превышать величины $\frac{c}{\lambda}$.

Если считать, что вторичная волна от первой щели имеет в момент сложения с другими волнами нулевую фазу, то фаза волны от второй щели равна $2\pi/N$, от третьей — $4\pi/N$, от четвертой — $6\pi/N$ и т. д. Результат сложения этих волн с учетом фазового различия удобно получить с помощью векторной диаграммы: сумма N одинаковых векторов напряженности электрического поля, угол (разность фаз) между любыми соседними из которых есть $2\pi/N$, равна нулю. Это означает, что условие (19.30) соответствует минимуму. При разности хода вторичных волн от соседних щелей $\delta = 2(\lambda/N)$ или разности фаз $\Delta\varphi = 2(2\pi/N)$ будет также получен минимум интерференции вторичных волн, идущих от всех щелей, и т. д.

В качестве иллюстрации на рис. 19.14 изображена векторная диаграмма, соответствующая дифракционной решетке, состоящей из шести щелей: $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и т. д. — векторы напряженности электрической составляющей электромагнитных волн от первой, второй и т. д. щелей. Возникающие при интерференции пять добавочных минимумов (сумма векторов равна нулю) наблюдаются при разности фаз волн, приходящих от соседних щелей, в 60° (*а*), 120° (*б*), 180° (*в*), 240° (*г*) и 300° (*д*).

Так, можно убедиться, что между центральным и каждым первым главным максимумами имеется $N - 1$ добавочных минимумов, удовлетворяющих условию

$$c \sin \alpha = \pm \lambda/N;\ \pm 2\lambda/N, \ldots, \pm(N-1)\lambda/N. \qquad (19.31)$$

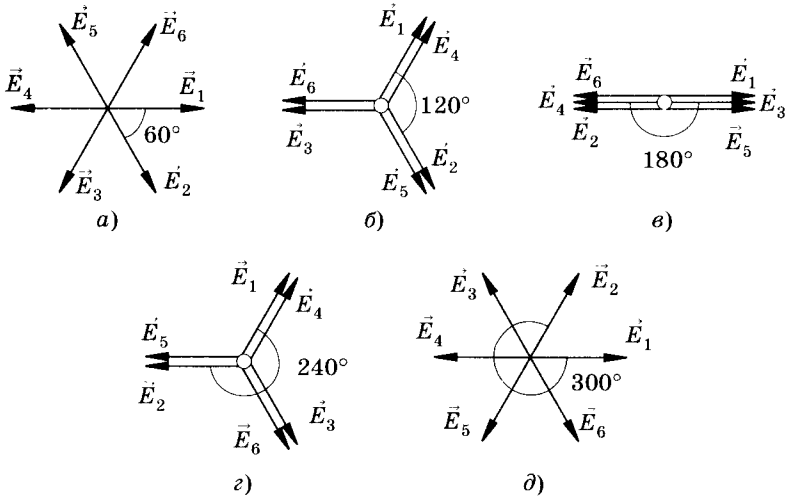


Рис. 19.14

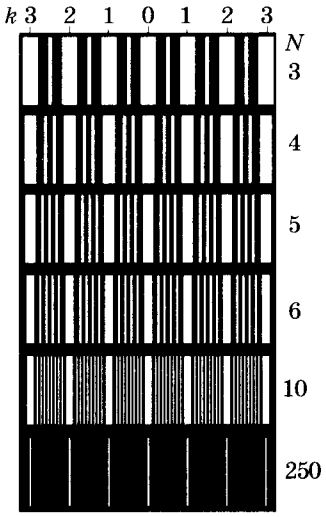


Рис. 19.15

Между первым и вторым главными максимумами также расположены $N - 1$ добавочных минимумов, удовлетворяющих условию

$$c \sin \alpha = \pm (N + 1)\lambda/N,$$

$$\pm(N + 2)\lambda/N, \ldots, (2N - 1)\lambda/N, \quad \textbf{(19.32)}$$

и т. д. Итак, между любыми двумя соседними главными максимумами наблюдается $N - 1$ добавочных минимумов.

При большом количестве щелей отдельные добавочные минимумы практически не различаются, а все пространство между главными максимумами выглядит темным. Чем больше число щелей дифракционной решетки, тем более резки главные максимумы. На рис. 19.15 представлены фотографии дифракционной картины, полученной от решеток с разным числом N щелей (постоянная дифракционной решетки одинакова), а на рис. 19.16 — график распределения интенсивности.

Особо отметим роль минимумов от одной щели. В направлении, отвечающем условию (19.27), каждая щель дает минимум, поэтому минимум от одной щели сохранится и для всей решетки. Если для некоторого направления одновременно выполняются условия минимума для щели (19.27) и главного максимума решетки (19.29), то соответствующий главный максимум не возникнет. Обычно стараются использовать главные максимумы, которые размещаются между первыми минимумами от одной щели, т. е. в интервале

$$\arcsin(\lambda/a) > \alpha > -\arcsin(\lambda/a). \quad \textbf{(19.33)}$$

При падении на дифракционную решетку белого или иного немонохроматического света каждый главный максимум, кроме центрального, окажется разложенным в спектр [см. (19.29)]. В этом случае k указывает ***порядок спектра***.

Таким образом, решетка является спектральным прибором, поэтому для нее существенны характеристики, которые позволяют оценивать возможность различения (разрешения) спектральных линий.

Одна из таких характеристик — ***угловая дисперсия*** — определяет угловую ширину спектра. Она численно равна угловому расстоянию $d\alpha$ между двумя линиями спектра, длины волн которых различаются на единицу ($d\lambda = 1$):

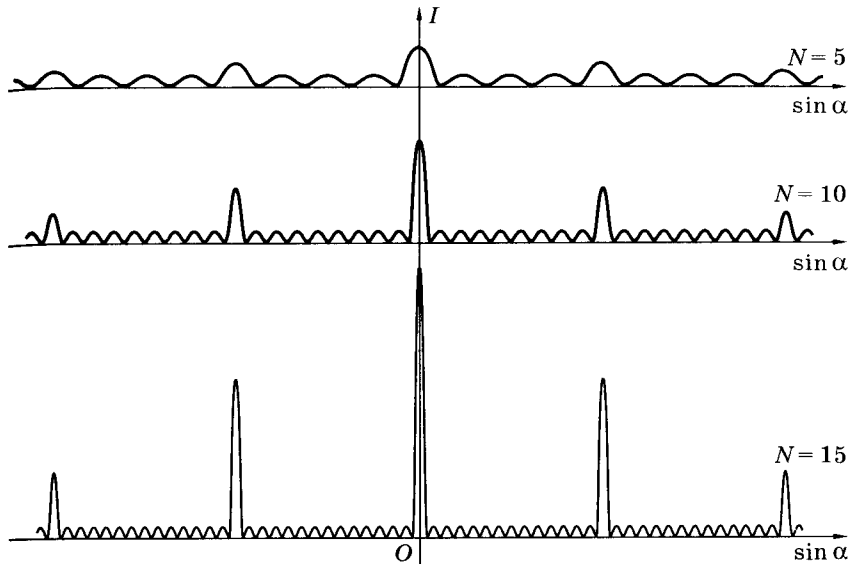


Рис. 19.16

$$D = d\alpha/d\lambda.$$

Дифференцируя (19.29) и используя только положительные значения величин, получаем

$$c \cos \alpha \, d\alpha = k d\lambda.$$

Из последних двух равенств имеем

$$D = k/(c \cos \alpha). \quad \textbf{(19.34)}$$

Так как обычно используют небольшие углы дифракции, то $\cos \alpha \approx 1$. Угловая дисперсия D тем выше, чем больше порядок k спектра и чем меньше постоянная c дифракционной решетки.

Возможность различать близкие спектральные линии зависит не только от ширины спектра, или угловой дисперсии, но и от ширины спектральных линий, которые могут накладываться друг на друга.

Принято считать, что если между двумя дифракционными максимумами одинаковой интенсивности находится область, где суммарная интенсивность составляет 80% от максимальной, то спектральные линии, которым соответствуют эти максимумы, уже разрешаются. При этом, согласно Дж. У. Рэлею, максимум одной линии совпадает с ближайшим минимумом другой, что и считает-

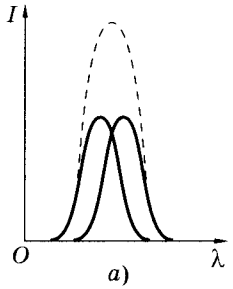


Рис. 19.17

ся критерием разрешения. На рис. 19.17 изображены зависимости интенсивности I отдельных линий от длины волны (сплошная кривая) и их суммарная интенсивность (штриховая кривая). Из рисунков легко увидеть неразрешенность двух линий (*а*) и предельную разрешенность (*б*), когда максимум одной линии совпадает с ближайшим минимумом другой.

Разрешение спектральных линий количественно оценивается ***разрешающей способностью***, равной отношению длины волны к наименьшему интервалу длин волн, которые еще могут быть разрешены:

$$R = \lambda/\Delta\lambda. \qquad \textbf{(19.35)}$$

Так, если имеются две близкие линии с длинами волн $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, то (19.35) можно приближенно записать в виде

$$R = \lambda_1/(\lambda_1 - \lambda_2), \text{ или } R = \lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2). \qquad \textbf{(19.36)}$$

Условие главного максимума для первой волны

$$c \sin\alpha = k\lambda_1.$$

С ним совпадает ближайший минимум для второй волны, условие которого

$$c \sin\alpha = k\lambda_2 + \lambda_2/N.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, имеем

$$k\lambda_1 = k\lambda_2 + \lambda_2/N, \quad k(\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_2/N,$$

откуда [с учетом (19.36)]

$$R = kN. \qquad \textbf{(19.37)}$$

Итак, разрешающая способность дифракционной решетки тем больше, чем больше порядок k спектра и число N штрихов.

Рассмотрим пример. В спектре, полученном от дифракционной решетки с числом щелей $N = 10\,000$, имеются две линии вблизи длины волны $\lambda = 600$ нм. При какой наименьшей разности длин волн $\Delta\lambda$ эти линии различаются в спектре третьего порядка ($k = 3$)?

Для ответа на этот вопрос приравняем (19.35) и (19.37), $\lambda/\Delta\lambda = kN$, откуда $\Delta\lambda = \lambda/(kN)$. Подставляя числовые значения в эту формулу, находим $\Delta\lambda = 600$ нм$/(3 \cdot 10\,000) = 0{,}02$ нм.

Так, например, различимы в спектре линии с длинами волн 600,00 и 600,02 нм и не различимы линии с длинами волн 600,00 и 600,01 нм.

Выведем формулу дифракционной решетки для наклонного падения когерентных лучей (рис. 19.18, β — угол падения). Условия формирования дифракционной картины (линза, экран в фокальной плоскости) те же, что и при нормальном падении.

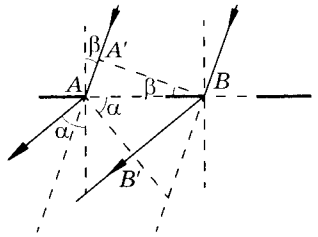


Рис. 19.18

Проведем перпендикуляры $A'B$ к падающим лучам и AB' ко вторичным волнам, идущим под углом α к перпендикуляру, восставленному к плоскости решетки. Из рис. 19.18 видно, что к положению $A'B$ лучи имеют одинаковую фазу, от AB' и далее разность фаз лучей сохраняется. Следовательно, разность хода есть

$$\delta = BB' - AA'. \qquad \textbf{(19.38)}$$

Из $\Delta AA'B$ имеем $AA' = AB \sin\beta = c \sin\beta$. Из $\Delta BB'A$ находим $BB' = AB \sin\alpha = c \sin\alpha$. Подставляя выражения для AA' и BB' в (19.38) и учитывая условие для главных максимумов, имеем

$$c(\sin\alpha - \sin\beta) = \pm k\lambda. \qquad \textbf{(19.39)}$$

Центральный главный максимум соответствует направлению падающих лучей ($\alpha = \beta$).

Наряду с прозрачными дифракционными решетками используют отражательные, у которых штрихи нанесены на металлическую поверхность. Наблюдение при этом ведется в отраженном свете. Отражательные дифракционные решетки, изготовленные на вогнутой поверхности, способны образовывать дифракционную картину без линзы.

В современных дифракционных решетках максимальное число штрихов составляет более 2000 на 1 мм, а длина решетки более 300 мм, что дает значение N около миллиона.

§ 19.7. Основы рентгеноструктурного анализа

Основная формула дифракционной решетки (19.29) может быть использована не только для определения длины волны, но и для решения обратной задачи — нахождения постоянной дифракционной решетки по известной длине волны. Такая скромная применительно к обычной дифракционной решетке задача подводит к практически важному вопросу — измерению параметров кристаллической решетки посредством *дифракции рентгеновских лучей*, что является содержанием *рентгеноструктурного анализа*.

Пусть совмещены две дифракционные решетки, штрихи которых перпендикулярны. Для решеток выполняются условия главных максимумов:

$$c_1 \sin \alpha_1 = \pm k_1 \lambda, \; c_2 \sin \alpha_2 = \pm k_2 \lambda. \qquad \textbf{(19.40)}$$

Углы α_1 и α_2 отсчитываются во взаимно перпендикулярных направлениях. В этом случае на экране появится система пятен, каждому из которых соответствует пара значений k_1 и k_2 или α_1 и α_2. Таким образом, и здесь можно найти c_1 и c_2 по положению дифракционных пятен.

Усложняя задачу, логично считать, что дифракционная картина позволит измерить параметры и для трехмерной периодической структуры.

Естественной объемной периодической структурой являются кристаллы, крупные молекулы и т. п. Вторичные волны в кристалле возникают в результате взаимодействия первичных лучей с электронами атомов.

Для отчетливого наблюдения дифракционной картины должно выполняться определенное соотношение между длиной волны и параметром периодической структуры (см. § 19.5). Оптимальным условиям соответствует примерно одинаковый порядок этих величин. Учитывая, что расстояние между рассеивающими центрами (атомами) в кристалле (~10^{-10} м) приблизительно равно длине волны рентгеновского излучения, можно считать, что кристалл для этих лучей является трехмерной дифракционной решеткой.

На рис. 19.19 штриховыми линиями показаны две соседние кристаллографические плоскости. Взаимодействие рентгеновского излучения с атомами и возникновение вторичных волн можно рассматривать упрощенным методом как отражение от плоскостей. Пусть на кристалл под *углом скольжения* θ падают рентгеновские лучи *1* и *2*; *1′* и *2′*— отраженные (вторичные) лучи, *CE* и

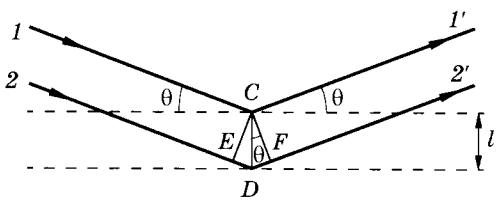


Рис. 19.19

CF — перпендикуляры к падающим и отраженным лучам соответственно. Разность хода отраженных лучей *1′* и *2′*

$$\delta = |DE| + |DF| = 2l \sin \theta, \qquad \textbf{(19.41)}$$

где l — межплоскостное расстояние.

Максимумы интерференции при отражении возникают в случае, когда разность хода равна целому числу длин волн:

$$2l \sin \theta = k\lambda; \; k = 1, 2, 3, \ldots . \qquad \textbf{(19.42)}$$

Это ***условие Брэгга—Вульфа***.

При падении монохроматического рентгеновского излучения на кристалл под разными углами наибольшее отражение (максимум) будет для углов, отвечающих условию (19.42). При регистрации под определенным углом скольжения пучка рентгеновского излучения со сплошным спектром максимум дифракции будет выполняться для длин волн, удовлетворяющих условию Брэгга—Вульфа.

П. Дебаем и П. Шеррером был предложен метод рентгеноструктурного анализа, основанный на дифракции монохроматических рентгеновских лучей в поликристаллических телах (обычно спрессованные порошки). Среди множества кристаллитов всегда найдутся такие, для которых одинаковы l, θ и k, причем эти величины соответствуют формуле Брэгга—Вульфа. Отраженный луч *2* (максимум) составит угол 2θ с падающим рентгеновским лучом *1* (рис. 19.20, *а*). Так как условие (19.42) одинаково для многих кристаллов, по-разному ориентированных, то дифрагированные рентгеновские лучи образуют в пространстве конус, вершина которого лежит в исследуемом образце, а угол раствора равен 4θ (рис. 19.20, *б*). Другой совокупности величии l, θ и k, удовлетворяющих условию (19.42), будет соответствовать другой конус. На

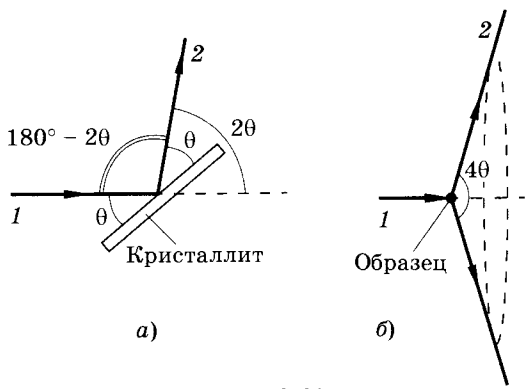


Рис. 19.20

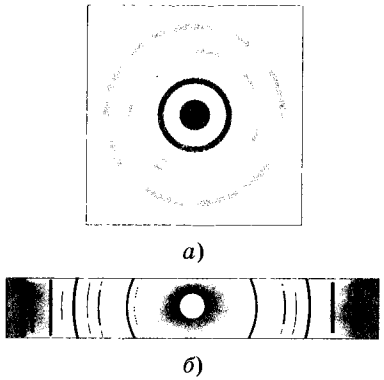


Рис. 19.21

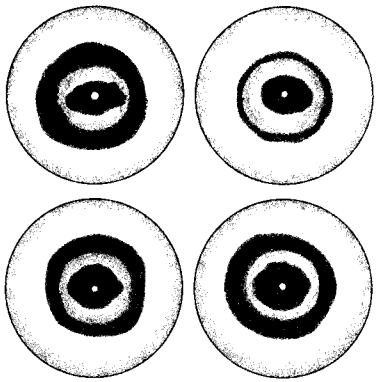


Рис. 19.22

фотопленке рентгеновские лучи образуют рентгенограмму (дебаеграмму) в виде окружностей или дуг (рис. 19.21 *а*, *б*).

Дифракцию рентгеновских лучей наблюдают также при рассеянии их аморфными твердыми телами, жидкостями и газами. В этом случае на рентгенограмме получаются широкие и размытые кольца.

В настоящее время широко применяют рентгеноструктурный анализ биологических молекул и систем: на рис. 19.22 показаны рентгенограммы белков. Этим методом Дж. Уотсон и Ф. Крик установили структуру ДНК и были удостоены Нобелевской премии (1962). Использование дифракции рентгеновских лучей от кристаллов для исследования их спектрального состава относится к области рентгеновской спектроскопии.

§ 19.8. Понятие о голографии и ее возможном применении в медицине

Голография*[1] *— метод записи и восстановления волнового поля, основанный на интерференции и дифракции волн.

Идея голографии была впервые высказана Д. Габором в 1948 г., однако ее практическое использование оказалось возможным после появления лазеров.

Изложение основ голографии уместно начать сравнением с фотографией. При фотографировании на фотопленке фиксируется интенсивность световых волн, отраженных предметом. Изображение в этом случае является совокупностью темных и светлых точек. Фазы рассеиваемых волн не регистрируются, и таким образом пропадает значительная часть информации о предмете.

[1] Голография (греч.) — полная запись.

Голография позволяет регистрировать и воспроизводить более полную информацию об объекте с учетом амплитуд и фаз волн, рассеянных предметом. Регистрация фазы возможна вследствие интерференции волн. С этой целью на светофиксирующую поверхность посылают две когерентные волны: *опорную*, идущую непосредственно от источника света или зеркал, которые используют как вспомогательные устройства, и *сигнальную*, которая появляется при рассеянии (отражении) части опорной волны предметом и содержит соответствующую информацию о нем.

Интерференционную картину, образованную сложением сигнальной и опорной волн и зафиксированную на светочувствительной пластинке, называют голограммой. Для восстановления изображения голограмму освещают той же опорной волной.

Покажем на некоторых примерах, как получается голограмма и восстанавливается изображение.

Голограмма плоской волны. В этом случае на голограмме фиксируется плоская сигнальная волна *I*, попадающая под углом α_1 на фотопластинку Ф (рис. 19.23, *а*).

Опорная волна *II* падает нормально, поэтому во всех точках фотопластинки одновременно ее фаза одинакова. Фазы сигнальной волны вследствие ее наклонного падения различны в разных точках светочувствительного слоя. Из этого следует, что разность фаз между лучами опорной и сигнальной волн зависит от места встречи этих лучей на фотопластинке и, согласно условиям максимумов и минимумов интерференции, полученная голограмма будет состоять из темных и светлых полос.

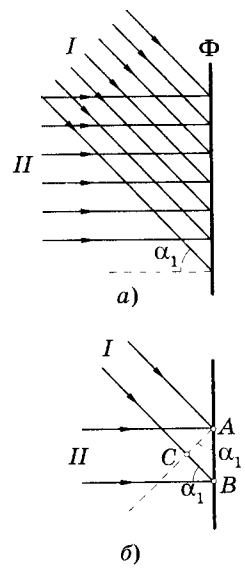


Рис. 19.23

Пусть *AB* (рис. 19.23, *б*) соответствует расстоянию между центрами ближайших темных или светлых интерференционных полос. Это означает, что фазы точек *A* и *B* в сигнальной волне отличаются на 2π. Построим нормаль *AC* к ее лучам (фронт волны). Очевидно, что фазы точек *A* и *C* одинаковы. Различие фаз точек *B* и *C* на 2π означает, что $|BC| = \lambda$. Из прямоугольного ΔABC имеем

$$|AB| = |BC|/\sin\alpha_1 = \lambda/\sin\alpha_1. \qquad \textbf{(19.43)}$$

Итак, в этом примере голограмма подобна дифракционной решетке, так как на светочувствительной поверхности зарегистрированы

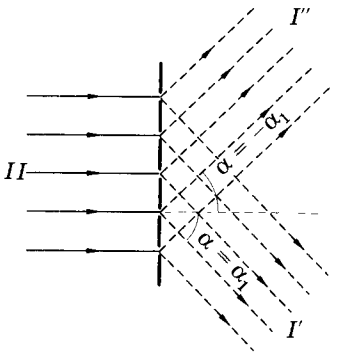


Рис. 19.24

области усиленных (максимум) и ослабленных (минимум) колебаний, расстояние AB между которыми определяется по формуле (19.43).

Так как сигнальная волна образуется при отражении части опорной от предмета, то понятно, что в данном случае предметом является плоское зеркало или призма, т. е. такие устройства, которые преобразуют плоскую опорную волну в плоскую сигнальную (технические подробности на рис. 19.23, *а* не показаны).

Направив на голограмму опорную волну II (рис. 19.24), осуществим дифракцию (см. § 19.6). Согласно (19.29), первые главные максимумы ($k = 1$) соответствуют направлениям

$$\sin\alpha = \pm\lambda/c. \qquad \textbf{(19.44)}$$

Подставив в это выражение AB из (19.43) вместо c, имеем

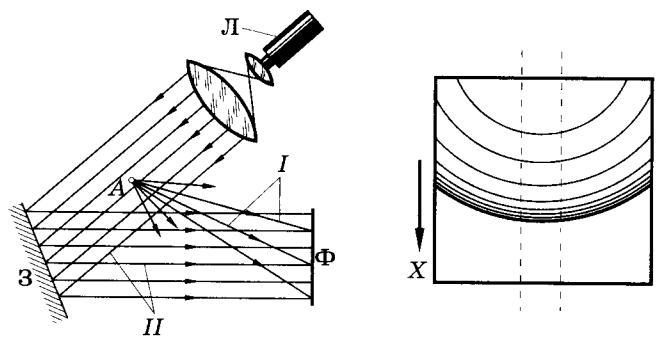
$$\sin\alpha = \pm\lambda\sin\alpha_1/\lambda = \pm\sin\alpha_1, \qquad \textbf{(19.45)}$$

откуда

$$\alpha = \pm\alpha_1. \qquad \textbf{(19.46)}$$

Из (19.46) видно, что направление волны I' (рис. 19.24), дифрагированной под углом α_1, соответствует сигнальной: так восстанавливают волну, отраженную (рассеянную) предметом. Волна I'' и волны остальных главных максимумов (на рисунке не показаны) также воспроизводят информацию, зафиксированную в голограмме.

Голограмма точки. Одна часть опорной волны II попадает на точечный объект A (рис. 19.25, *а*) и рассеивается от него



а) *б*)

Рис. 19.25

в виде сферической сигнальной волны I, другая часть плоским зеркалом З направляется на фотопластинку Ф, где эти волны и интерферируют. Источником излучения является лазер Л. На рис. 19.25, *б* схематически изображена полученная голограмма.

Хотя в данном примере сигнальная волна является сферической, можно с некоторым приближением применить формулу (19.43) и заметить, что по мере увеличения угла α_1 (см. рис. 19.23, *а*) уменьшается расстояние AB между соседними полосами. Нижние дуги на голограмме (рис. 19.25, *б*) расположены более тесно.

Если вырезать из голограммы узкую полоску, показанную штриховыми линиями на рис. 19.25, *б*, то она будет подобна узкой дифракционной решетке, постоянная которой уменьшается в направлении оси X. На такой решетке отклонение вторичных волн, соответствующих первому главному максимуму, возрастает по мере увеличения координаты X щели [см. (19.29)]: c становится меньше, $|\sin\alpha|$ — больше.

Таким образом, при восстановлении изображения плоской опорной волной дифрагированные волны уже не будут плоскими. На рис. 19.26 показаны волна I', формирующая мнимое изображение A' точки A, и волна I'', создающая действительное изображение A''.

Так как рассеянные предметом волны попадают совместно с опорной волной во все точки голограммы, то все ее участки содержат информацию о предмете, и для восстановления изображения не обязательно использовать полностью всю голограмму. Следует, однако, заметить, что качество восстановленного изображения тем хуже, чем меньшую часть голограммы для этого применяют. Из рис. 19.26 видно, что мнимое и действительное изображения образуются и в том случае, если восстановление осуществляют, например, нижней половиной голограммы, однако изображение при этом формируется меньшим количеством лучей.

Любой предмет является совокупностью точек, поэтому рассуждения, приведенные для одной точки, могут быть обобщены и на голографирование любого предмета. Голографические изображения объемны, и их зрительное восприятие ничем не отличается от восприятия

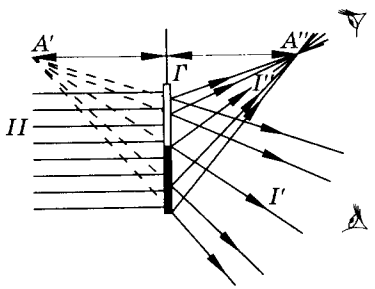


Рис. 19.26

соответствующих предметов[1]: ясное видение разных точек изображения осуществляется посредством аккомодации глаза (см. § 21.4); при изменении точки зрения изменяется перспектива, одни детали изображения могут заслонять другие.

При восстановлении изображения можно изменить длину опорной волны. Так, например, голограмму, образованную невидимыми электромагнитными волнами (ультрафиолетовыми, инфракрасными и рентгеновскими), можно восстановить видимым светом. Так как условия отражения и поглощения электромагнитных волн телами зависят, в частности, от длины волны, то эта особенность голографии позволяет использовать ее как метод ***внутривидения***, или ***интроскопии***[2].

Особо интересные и важные перспективы открываются в связи с ультразвуковой голографией. Получив голограмму в ультразвуковых механических волнах, можно восстановить ее видимым светом. Ультразвуковая голография в перспективе может быть использована в медицине для рассматривания внутренних органов человека с диагностической целью. Учитывая большую информативность этого метода и существенно меньший вред ультразвука по сравнению с рентгеновским излучением, можно ожидать, что в будущем ультразвуковая голографическая интроскопия заменит традиционную рентгенодиагностику.

Еще одно медико-биологическое приложение голографии связано с голографическим микроскопом. Один из первых способов построения голографического микроскопа основан на том, что изображение предмета получается увеличенным, если голограмму, записанную с плоской опорной волной, осветить расходящейся сферической волной.

В развитие голографии внес вклад советский физик Ю. Н. Денисюк, разработавший метод цветной голографии.

Сейчас трудно оценить все возможности применения голографии: кино, телевидение, запоминающие устройства и т. д. Несомненно лишь, что голография является одним из величайших изобретений XX в.

[1] Некоторое отличие обусловлено одноцветностью изображения, которое неизбежно при записи и восстановлении монохроматической волной.

[2] Intro (лат.) — внутри и skopeo (лат.) — смотрю. Визуальное наблюдение объектов, явлений и процессов в оптически непрозрачных телах и средах, а также в условиях плохой видимости.

ГЛАВА 20

Поляризация света

В главе рассматриваются методы получения упорядоченной ориентации электрического и магнитного векторов в световых волнах и некоторые свойства таких волн.

§ 20.1. Свет естественный и поляризованный. Закон Малюса

Электромагнитную волну, в которой векторы $\vec{E}$ и, следовательно, векторы $\vec{B}$ лежат во вполне определенных плоскостях, называют плоскополяризованной.

Плоскость, проходящая через электрический вектор $\vec{E}$ и направление распространения электромагнитной волны, является ***плоскостью поляризации.***

Плоскополяризованную волну излучает отдельный атом. В естественном свете, идущем от Солнца, накаленной нити лампы, газоразрядной трубки, пламени и т. п., складываются неупорядоченные излучения множества атомов, поэтому направление $\vec{E}$ не выдерживается в одной плоскости. Такой свет можно рассматривать как наложение плоскополяризованных волн с хаотической ориентацией плоскостей колебаний, электрические векторы ориентированы по всевозможным перпендикулярным лучу направлениям. На рис. 20.1 показаны в некоторый момент времени сечение луча O и хаотическая ориентация векторов $\vec{E}$ в плоскости, перпендикулярной лучу.

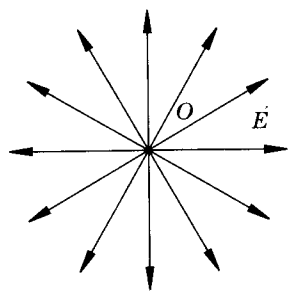


Рис. 20.1

Если выбрать две любые взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через луч естественного света, и спроецировать векторы $\vec{E}$ на эти плоскости, то в среднем эти проекции будут одинаковыми. Поэтому луч естественного света удобно изображать как прямую, на которой расположено одинаковое число тех и других проекций в виде стрелок и то-

чек (рис. 20.2, *а*). Таким образом, прямая с черточками (рис. 20.2, *б*) или точками (рис. 20.2, *в*) обозначает луч плоскополяризованного света.

Луч света, состоящего из неполяризованной и поляризованной составляющих и называемого ***частично поляризованным***, условно показан на рис. 20.2, *г*, *д*, причем соотношение числа стрелок и точек условно иллюстрирует ***степень поляризации***, т. е. долю интенсивности поляризованной составляющей относительно полной интенсивности света.

Устройство, позволяющее получать поляризованный свет из естественного, называют ***поляризатором***. Он пропускает только составляющую вектора $\vec{E}$ на некоторую плоскость — ***главную плоскость поляризатора***, которая содержит световой вектор $\vec{E}$ и направление распространения света. При этом из поляризатора выходит поляризованный свет[1], интенсивность которого равна половине интенсивности падающего естественного (неполяризованного) света. При вращении поляризатора относительно луча естественного света поворачивается плоскость колебаний вышедшего плоскополяризованного света, но интенсивность его не изменяется. Поляризатор можно использовать для анализа поляризованного света, тогда его называют ***анализатором***.

Если плоскополяризованный свет с амплитудой электрического вектора $\vec{E}_0$ падает на анализатор, то он пропустит только составляющую, равную

$$E = E_0 \cos\varphi, \qquad \textbf{(20.1)}$$

где φ — угол между главными плоскостями поляризатора P и анализатора A (рис. 20.3).

Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды колебаний [см. (14.60)], то из (20.1) получаем

$$I = I_0 \cos^2\varphi, \qquad \textbf{(20.2)}$$

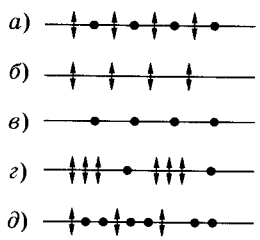


Рис. 20.2

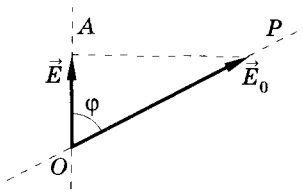


Рис. 20.3

[1] Возможное поглощение света поляризатором здесь и далее не учитывается.

где I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор, I — интенсивность света, вышедшего из анализатора. Уравнение (20.2) выражает ***закон Малюса***.

Как видно из закона Малюса, при повороте анализатора относительно луча падающего плоскополяризованного света интенсивность вышедшего света изменяется от нуля до I_0. Если при повороте анализатора вокруг падающего луча как оси вращения интенсивность прошедшего света не изменяется, то свет может быть естественным[1]; если при этом интенсивность изменяется по закону (20.2), то падающий свет — плоскополяризованный.

Термин «поляризация света» имеет два смысла. Во-первых, под этим понимают свойство света, характеризующееся пространственно-временной упорядоченностью ориентации электрического и магнитного векторов. Во-вторых, поляризацией света называют процесс получения поляризованного света.

§ 20.2. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков

При отражении от границы двух диэлектриков естественный свет частично поляризуется (рис. 20.4).

В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения, а в преломленном — параллельные ей.

Если угол падения удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} i_Б = n_{21}, \qquad \textbf{(20.3)}$$

то отраженный монохроматический луч ***полностью поляризован*** (рис. 20.5). Соотношение (20.3) выражает **закон Брюстера**. Здесь

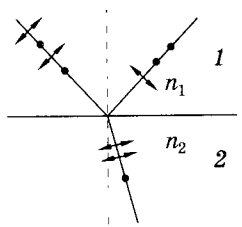


Рис. 20.4

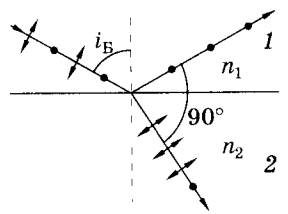


Рис. 20.5

[1] При этом возможна и круговая поляризация, которая здесь не рассмотрена.

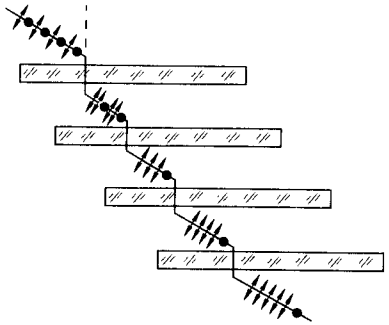


Рис. 20.6

угол падения $i_Б$ — угол Брюстера, или ***угол полной поляризации***, $n_{21} = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Преломленный луч всегда частично поляризован, причем при падении под углом Брюстера степень его поляризации наибольшая. Используя (20.3) и закон преломления, нетрудно показать, что при полной поляризации отраженного света угол между преломленным и отраженным лучами равен 90°.

Таким образом, граница раздела двух диэлектриков или диэлектрика и вакуума служит ***поляризатором***.

В качестве поляризатора используют также стопу стеклянных пластин. Независимо от угла падения степень поляризации преломленного луча возрастает по мере прохождения пластин, как это схематически показано на рис. 20.6.

§ 20.3. Поляризация света при двойном лучепреломлении

Некоторые прозрачные кристаллы обладают свойством двойного лучепреломления: при попадании света на кристалл луч раздваивается. Для одного из лучей выполняются обычные законы преломления, и поэтому этот луч называют ***обыкновенным***, для другого — эти законы не выполняются и луч называют ***необыкновенным***.

Двойное лучепреломление при нормальном падении света на поверхность кристалла показано на рис. 20.7: обыкновенный (o) луч, как это следует из закона преломления, проходит не преломляясь, необыкновенный (e) — преломляется.

Направления, вдоль которых двойного лучепреломления нет и оба луча, обыкновенный и необыкновенный, распространяются с одной скоростью, называют ***оптическими осями кристалла*** (штриховая линия на рис. 20.7). Если такое направление одно, то кристаллы называют одноосными (они и рассматриваются в этом параграфе). К ним принадлежит исландский шпат (разновидность углекислого кальция $CaCO_3$ — кристалл гексагональной системы), кварц, турмалин (сложный алюмосиликат, кристаллы тригональной системы) и др. Плоскость, проходящая через оптическую ось и падающий луч, называется ***главной плоскостью кристалла***. Колебания обыкновенного луча перпендикулярны главной плоскости, а необыкновенного — лежат в главной плоскости кристалла, т. е. эти лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях.

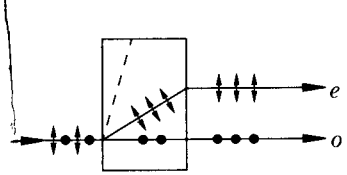
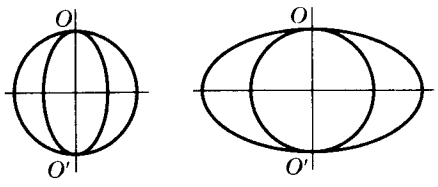


Рис. 20.7



а) *б*)

Рис. 20.8

Двойное лучепреломление обусловлено особенностями распространения электромагнитных волн в анизотропных средах: амплитуды вынужденных колебаний электронов зависят от направлений этих колебаний.

Ход обыкновенных и необыкновенных лучей в кристаллах можно наглядно представить с помощью волновых поверхностей. Предположим, что внутри кристалла произошла световая вспышка и во все стороны распространяются две волны: обыкновенная и необыкновенная. В некоторый момент времени их волновые поверхности займут положения, изображенные на рис. 20.8 (*а* — для положительных кристаллов, *б* — для отрицательных). Сферы соответствуют обыкновенным волнам, имеющим по всем направлениям одинаковую скорость v_o; эллипсоиды — необыкновенным волнам, скорость v_e которых зависит от направления. Вдоль оптических осей OO' скорость обыкновенной и необыкновенной волн одинакова и равна

$$v_o = c/n_o, \qquad (20.4)$$

где n_o — показатель преломления обыкновенного луча, зависящий от рода кристалла.

Для положительных кристаллов $v_e \leqslant v_o$, для отрицательных $v_e \geqslant v_o$. Наибольшее различие скоростей обыкновенная и необыкновенная волны имеют в направлениях, перпендикулярных оптической оси; для этих направлений вводят показатель преломления n_e необыкновенного луча. У исландского шпата (отрицательный кристалл) $n_o = 1{,}6584$, $n_e = 1{,}4864$; у кварца (положительный кристалл) $n_o = 1{,}5442$, $n_e = 1{,}5533$ (данные приведены для желтой линии натрия $\lambda = 589{,}3$ нм).

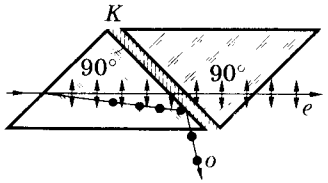


Рис. 20.9

Двоякопреломляющие кристаллы непосредственно не используются как поляризаторы, так как пучки обыкновенных и необыкновенных лучей слишком мало расходятся или даже перекрываются. Однако из этих кристаллов изготовляют специальные поляризационные призмы.

Рассмотрим наиболее распространенную призму, предложенную У. Николем (***призма Николя***, или просто ***николь***).

Николь представляет собой призму из кристалла исландского шпата, разрезанного по диагонали и склеенного канадским бальзамом[1] K (рис. 20.9). Для него $n = 1{,}550$; это значение лежит между показателями преломления обыкновенного и необыкновенного лучей исландского шпата. Это позволяет, подобрав соответствующим образом углы призмы, обеспечить полное отражение обыкновенного (o) луча на границе с канадским бальзамом. Отраженный луч в этом случае поглощается зачерненной нижней гранью или выводится из кристалла. Необыкновенный (e) луч выходит из николя параллельно нижней грани.

На ином принципе основаны поляризаторы, изготовляемые из турмалина, герапатита (сернокислый иод-хинин) и некоторых других кристаллов, которые наряду с двойным лучепреломлением могут поглощать один из лучей значительно сильнее, чем другой (*дихроизм*). Так, в пластинке турмалина толщиной около 1 мм обыкновенный луч практически полностью поглощается и вышедший свет плоскополяризован.

Из мелких кристалликов герапатита выкладывают значительные площади на целлулоидной пленке. Для их ориентации используют электрическое поле. Такие устройства (поляроиды) могут работать как поляризаторы (анализаторы).

Основным недостатком турмалина и поляроидов по сравнению с николем являются их плохие спектральные характеристики. Белый свет после прохождения этих поляризационных устройств становится окрашенным, в то время как николь прозрачен в видимой части спектра.

Достоинство поляроидов — большая поверхность, что позволяет использовать широкие световые пучки.

[1] Это смолообразное вещество — живица, получаемая из канадской пихты.

§ 20.4. Вращение плоскости поляризации. Поляриметрия

Вращение плоскости поляризации, обнаруженное впервые на кристаллах кварца, заключается в *повороте плоскости поляризации плоскополяризованного света* при прохождении через вещество. Вещества, обладающие таким свойством, называют ***оптически активными***.

Пусть монохроматический свет падает от источника S на систему поляризатор P — анализатор A (рис. 20.10), которые поставлены скрещенно, т. е. их главные плоскости взаимно перпендикулярны. В этом случае свет до наблюдателя не дойдет, так как анализатор не пропустит плоскополяризованный свет в соответствии с законом Малюса ($\varphi = 90°$).

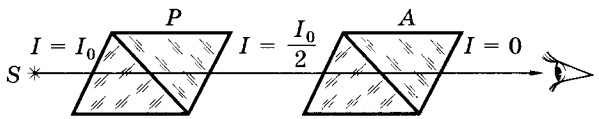


Рис. 20.10

Если между поляризатором и анализатором поместить кварцевую пластинку так, чтобы свет проходил вдоль ее оптической оси, то в общем случае свет дойдет до наблюдателя. Если же анализатор повернуть на определенный угол, то можно вновь добиться затемнения. Это свидетельствует о том, что кварцевая пластинка вызвала поворот плоскости поляризации на угол, соответствующий повороту анализатора для получения затемнения.

Используя в опыте свет различных длин волн, можно обнаружить дисперсию вращения плоскости поляризации (вращательную дисперсию), т. е. зависимость угла поворота от длины волны. Кварцевая пластинка толщиной 1 мм поворачивает плоскость поляризации приблизительно на следующие углы (табл. 27).

Таблица 27

Для света:	α, град
красного	15
желтого	21
фиолетового	51

Для определенной длины волны угол α поворота плоскости поляризации пропорционален расстоянию l, пройденному светом в оптически активном веществе:

$$\alpha = \alpha_0 l, \qquad (20.5)$$

где α_0 — коэффициент пропорциональности, или ***постоянная вращения*** (вращательная способность), град/мм.

Существует две модификации кварца, каждая из которых поворачивает плоскость поляризации в определенном направлении: по часовой стрелке — правовращающий (положительный) кварц, против часовой стрелки[1] — левовращающий (отрицательный). Постоянная вращения в обоих случаях одинакова.

Оптически активными являются также многие некристаллические тела: чистые жидкости (например, скипидар), растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (раствор сахара в воде), некоторые газы и пары (пары камфоры).

Для растворов был установлен следующий количественный закон:

$$\alpha = [\alpha_0] C l, \qquad (20.6)$$

где C — концентрация оптически активного вещества, l — толщина слоя раствора, $[\alpha_0]$ — ***удельное вращение,*** которое приблизительно обратно пропорционально квадрату длины волны и зависит от температуры и свойств растворителя.

Соотношение (20.6) лежит в основе весьма чувствительного метода измерения концентрации растворенных веществ, в частности сахара.

Этот метод (***поляриметрия,*** или ***сахариметрия***) используют в медицине для определения концентрации сахара в моче, в биофизических исследованиях, а также в пищевой промышленности. Соответствующие измерительные приборы называют ***поляриметрами*** или ***сахариметрами.***

Поляриметр позволяет измерять не только концентрацию, но и удельное вращение. Используя различные светофильтры, можно найти зависимость удельного вращения от длины волны (дисперсию оптической активности), в настоящее время для этих целей применяют специальные приборы — *спектрополяриметры.*

Вращение плоскости поляризации растворами обусловлено взаимодействием электромагнитной волны с асимметричными

[1] Направление вращения устанавливается относительно наблюдателя, смотрящего навстречу световому лучу.

молекулами растворенного оптически активного вещества. Такие молекулы не обладают зеркальной симметрией, т. е. при их «отражении» в зеркале получается иная форма. «Левая» молекула является зеркальным отображением «правой». Молекулы с одинаковой химической формулой, но разной структурой поворачивают плоскость поляризации в разных направлениях.

Характерно, что все важнейшие биологические молекулы (белки, нуклеиновые кислоты, полисахариды и т. п.) асимметричны и могут быть представлены попарно антиподами, каждый из которых есть зеркальное отображение другого. Однако при этом в веществах биологического, а не синтетического происхождения обычно представлен только один оптический антипод. Так, например, сахар, изготовленный обычным путем, является правовращающим, но при синтезе химическими методами получают смесь, содержащую равное количество «правых» и «левых» молекул. Такая смесь, называемая ***рацемической,*** не вращает плоскости поляризации, так как происходит взаимная компенсация действия различных молекул. Если в раствор синтетически полученного сахара поместить бактерии, которые питаются сахаром, то они будут усваивать только молекулы правовращающего сахара.

Рацемическая смесь является менее упорядоченной системой и имеет большую энтропию, чем такая же совокупность молекул одного типа. Это термодинамическое различие синтетического и естественного может быть иллюстрацией физического смысла энтропии биологических систем.

Поляриметрию применяют не только для определения концентрации растворов, но и как метод исследования структурных превращений, в частности в молекулярной биофизике. В качестве примера на рис. 20.11 приведен график изменения удельного вращения $[\alpha_0]$ в одном из полипептидов в зависимости от состава растворителя, являющегося бинарной смесью хлороформа $CHCl_3$ и дихлоруксусной кислоты $CHCl_2COOH$. При 80% дихлоруксусной кислоты происходит резкое падение оптической активности, что свидетельствует об изменении конформации молекул полипептида.

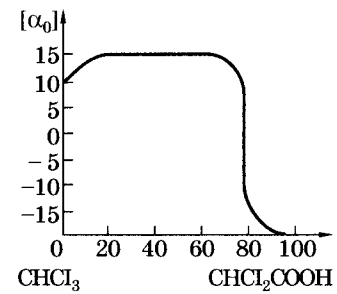


Рис. 20.11

§ 20.5. Исследование биологических тканей в поляризованном свете

Рассматривая прозрачные биологические объекты в микроскопе, трудно выявить различные структуры, поэтому приходится применять некоторые специальные методики; в их числе ***поляризационная микроскопия***.

Поляризационный микроскоп аналогичен обычному биологическому микроскопу, но имеет поляризатор перед конденсором и анализатор в тубусе между объективом и окуляром. Предметный столик может вращаться вокруг оптической оси микроскопа. Таким образом, объект освещают поляризованными лучами и рассматривают через анализатор.

Если скрестить поляризатор и анализатор, то поле зрения будет темным, таким же оно останется при помещении на предметный столик изотропных прозрачных тел. Анизотропные предметы изменяют поле зрения в соответствии с тем влиянием, которое они окажут на направление плоскости колебаний поляризованного света.

Так как некоторые ткани (мышечная, костная, нервная) обладают оптической анизотропией, то возможна поляризационная микроскопия биологических объектов. При скрещенных поляризаторе и анализаторе будут видны только те волокна, анизотропия которых изменяет поляризованный свет.

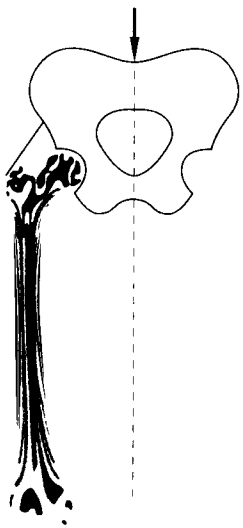


Рис. 20.12

Поляризованный свет можно использовать в модельных условиях для оценки механических напряжений, возникающих в костных тканях. Этот метод основан на явлении *фотоупругости*, которое заключается в возникновении оптической анизотропии в первоначально изотропных твердых телах под действием механических нагрузок.

Из прозрачного изотропного материала, например плексигласа, создают плоскую модель кости. В скрещенных поляроидах эта модель незаметна, так как выглядит темной. Прикладывая нагрузку, вызывают анизотропию плексигласа, что становится заметным по характерной картине полос и пятен (рис. 20.12). По этой картине, а также по ее изменению при увеличении или уменьшении нагрузки можно делать выводы о механических напряжениях, возникающих в модели, а следовательно, и в натуре.

ГЛАВА 21

Геометрическая оптика

Геометрическая (лучевая) оптика — раздел, в котором изучают законы распространения света на основании представления о световом луче как линии, вдоль которой распространяется энергия световой волны.
В главе законы геометрической оптики применяются к рассмотрению конкретных оптических систем. Наряду с этим излагаются также вопросы физики глаза.

§ 21.1. Геометрическая оптика как предельный случай волновой оптики

В предыдущих главах были рассмотрены явления, для описания которых необходимо учитывать волновую природу света. Однако во многих практических вопросах, таких, как формирование светового пучка, образование изображения и др., волновые свойства света могут оказаться несущественными. Более того, учет интерференции, дифракции и поляризации в этих случаях лишь усложнит получение конечного результата. Для решения такого рода задач применяют законы геометрической оптики.

Геометрическая оптика есть предельный случай волновой оптики при стремлении длины волны к нулю. Это можно пояснить на примере дифракционной решетки. Из (19.26) при $\lambda \to 0$ следует $\alpha \to 0$, т. е. получаем обычное для линзы фокусирование параллельного пучка света в точке O фокальной плоскости (см. рис. 19.10).

Для выяснения предельных возможностей оптических систем вновь приходится учитывать волновой характер света. Поэтому в этой главе частично рассматриваются вопросы интерференции и дифракции.

Геометрическая оптика является примером теории, позволившей при небольшом числе основных понятий и законов получить много практически важных результатов. В теории оптических устройств она и сейчас имеет большое значение.

§ 21.2. Аберрации линз

Приведем формулу тонкой линзы, известную из школьного курса:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (21.1)$$

где a_1 — расстояние от предмета до линзы, a_2 — расстояние от изображения до линзы, R_1 и R_2 — радиусы кривизны передней и задней сферических поверхностей линзы соответственно, n — показатель преломления вещества, из которого изготовлена линза; окружающая среда — воздух. Фокусное расстояние для такой линзы

$$f=\frac{1}{(n-1)(1/R_1+1/R_2)}. \qquad (21.2)$$

Учитывая (21.2), формулу тонкой линзы представим в виде

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}. \qquad (21.3)$$

Соотношение (21.1) получено для тонкой линзы при следующих предположениях: 1) изображение формируется узкими приосевыми (***параксиальными***) пучками, составляющими небольшие углы с главной осью системы; 2) показатель преломления для всех длин волн одинаков. При выполнении таких условий создается *точечное изображение*, т. е. каждая точка предмета дает одну точку изображения.

Эти условия не реализуются на практике. Показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия). Точки предмета лежат в стороне от оптической оси, что не отвечает первому условию. Применение только параксиальных лучей существенно ограничило бы световые потоки.

Все это приводит к ***аберрациям***[1], или погрешностям, реальных оптических систем, существенно снижающим качество оптических изображений. Однако, зная причины аберраций, можно добиться их устранения, если соответствующим образом подобрать систему линз.

Рассмотрим некоторые основные аберрации линзы.

Сферическая аберрация. Она заключается в том, что периферические части линзы сильнее отклоняют лучи, идущие от точки S на оси, чем центральные (рис. 21.1). Вследствие этого изображение светящейся точки на экране $Э$ имеет вид светлого пятна. Для устранения сферической аберрации создают систему из вогнутой и выпуклой линз.

[1] Aberratio (лат.) — уклонение.

Астигматизм[1]. Это недостаток оптической системы, при котором сферическая световая волна, проходя оптическую систему, деформируется и перестает быть сферической.

Различают два вида астигматизма. Один из них обусловлен падением на оптическую систему лучей, составляющих значительный угол с оптической осью (***астигматизм косых пучков***).

Пусть точка A предмета расположена вне главной оптической оси (рис. 21.2, *а*); из всех лучей, идущих от этой точки, выделим небольшой элементарный пучок таким образом, чтобы его центральный луч AS лежал в одной плоскости с главной оптической осью OO'. Любую плоскость, проходящую через главную оптическую ось, называют ***меридиональной***; в данном примере возьмем плоскость, в которой лежат центральный луч элементарного пучка и главная оптическая ось (на рис. 21.2, *а* — плоскость чертежа).

При наклонном падении элементарного пучка линза создаст два изображения точки A в виде отрезков прямой. Один из них лежит в меридиональной плоскости и отчетливо виден на экране II (см. рис. 21.2, *а*), другой — в перпендикулярной плоскости, которую называют ***сагиттальной***, он отчетливо виден на экране I. В промежутке между плоскостями I и II наблюдается пятно рассеяния, имеющее форму эллипса или окружности (рис. 21.2, *б*). Если предметом является отрезок линии, то качество изображения зависит от ориентации отрезка. Отрезки, расположенные в меридиональных плоскостях[2], дают четкое изображение в плоскости II, а расположенные в сагиттальных плоскостях — в плоскости I.

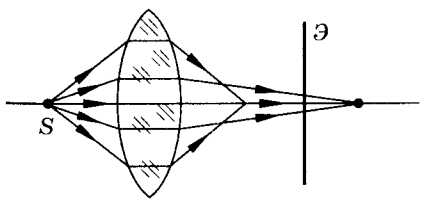


Рис. 21.1

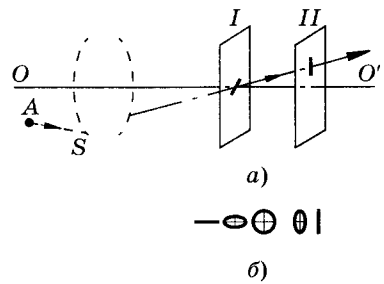
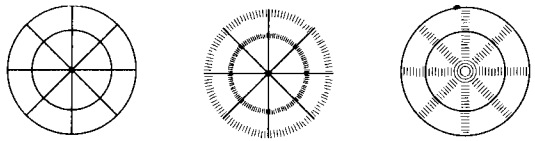


Рис. 21.2

[1] Астигматизм — не точечный. Точке предмета соответствует не одна точка изображения.

[2] Предполагается, что предмет лежит в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси.



а) *б*) *в*)

Рис. 21.3

Для демонстрации астигматизма косых пучков удобна сетка, представленная на рис. 21.3, *а*. Помещая ее как предмет перпендикулярно оптической оси, зададим систему отрезков, лежащих в меридиональных плоскостях (радиусы) и сагиттальных (окружности). На рис. 21.3, *б*, *в* показаны изображения этих отрезков, полученные в соответствующих плоскостях.

Для исправления астигматизма создают сложные оптические системы, состоящие из нескольких линз, благодаря чему удается образовать хорошие изображения при углах падения лучей 50—70°.

Другой вид астигматизма обусловлен ***асимметрией оптической системы***. Линзы с такой аберрацией называют ***астигматическими***. Эти линзы, как и в случае астигматизма косых пучков, создают изображение, в котором контуры и линии, ориентированные в разных направлениях, имеют разную резкость.

Наиболее наглядно астигматизм такого типа можно продемонстрировать на ***цилиндрической линзе*** (рис. 21.4). Пучок лучей, параллельных главной оптической оси, преломляется линзой L только в плоскостях, перпендикулярных образующей цилиндра, поэтому на экране $Э$, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается прямая линия, а не точка, как при сферических линзах. Если с помощью цилиндрической линзы отобразить на экране сетку из тонкой проволоки с квадратными ячейками (рис. 21.5, *а*), то наиболее четкое изображение получается в виде системы параллельных линий, направленных вдоль образующей цилиндра (рис. 21.5, *б*, *в*; изображения соответствуют двум взаимно перпендикулярным положениям цилиндрической линзы).

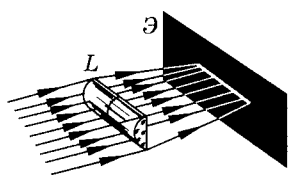
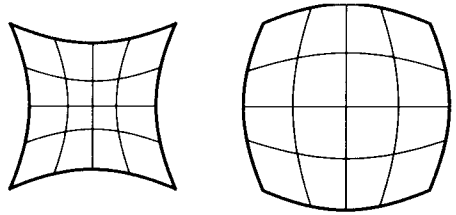


Рис. 21.4



а) *б*) *в*)

Рис. 21.5



а) *б*)

Рис. 21.6

Дисторсия. Этот вид аберрации возникает вследствие того, что лучи, посылаемые предметом в систему, составляют большие углы с оптической осью, при этом зависимость линейного увеличения от угла пучка приводит к нарушению подобия изображения и предмета. Типичные проявления дисторсии показаны на рис. 21.6: *а* — подушкообразная; *б* — бочкообразная; предметом является сетка с квадратными ячейками.

Подбирая систему из нескольких линз с противоположным характером дисторсии, можно исправить эту аберрацию.

Хроматическая аберрация. Как видно из (21.2), фокусное расстояние линзы определяется показателем преломления, который зависит от длины волны. Поэтому пучок белого света, идущий параллельно главной оптической оси, будет фокусироваться в разных ее точках, разлагаясь в спектр (рис. 21.7; ф — фиолетовые лучи, к — красные), кружок на экране окажется окрашенным. В этом заключается хроматическая аберрация, которая очень часто сопутствует изображениям в линзах.

Для исправления этого вида аберрации создают ахроматические оптические системы из линз, которые изготовляют из стекол с разной дисперсией: ахроматы и апохроматы.

В оптических устройствах используют системы из линз, называемые ***анастигматами***, в которых исправлены не только хроматическая аберрация, но и сферическая, а также и астигматизм.

Существуют и другие виды аберраций, которые здесь не рассматриваются.

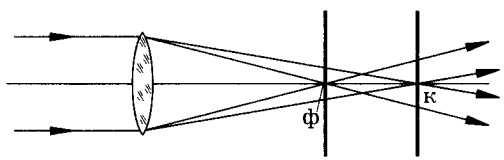


Рис. 21.7

Одновременное устранение всех аберраций может оказаться слишком сложной или даже неразрешимой задачей, поэтому обычно избавляются только от тех погрешностей, которые существенно мешают основному назначению оптической системы. Так, для объективов микроскопов важно устранение сферической аберрации, возникающей при рассматривании объектов, лежащих вблизи фокуса и отображаемых широкими пучками.

§ 21.3. Понятие об идеальной центрированной оптической системе

Реальные оптические системы состоят из различных деталей и часто включают в себя несколько линз (см. § 21.2). При произвольном расположении линз расчет и построение изображений могут быть достаточно сложными.

На практике часто используют системы сферических поверхностей (линз), центры которых лежат на одной прямой — главной оптической оси. Такие оптические системы называют ***центрированными.***

Рассмотрим некоторые выводы ***теории идеальных центрированных оптических систем***, предложенной Гауссом. В таких системах каждой точке или линии пространства предметов соответствует только одна точка или линия пространства изображений. Соответственные пары точек или линий обоих пространств называют ***сопряженными.*** К идеальной центрированной оптической системе приближаются такие, в которых используются параксиальные лучи. Такая система есть физическая абстракция, позволяющая рассчитывать реальные системы с учетом степени их отклонения от идеальной.

Укажем характерные точки и плоскости центрированной оптической системы (рис. 21,8; Q_1 и Q_2 — крайние сферические поверхности), принятые в теории Гаусса, с помощью которых можно построить изображения предметов.

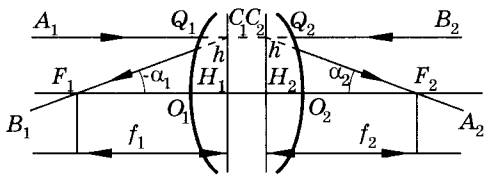


Рис. 21.8

Проведем в пространстве предметов луч A_1, параллельный главной оптической оси O_1O_2. В пространстве изображений ему сопряжен луч A_2, проходящий через точку F_2. Точка F_2 пространства изображений, сопряженная бесконечно удаленной точке пространства предметов, является *вторым*, или *задним*, *фокусом* системы.

Аналогично, лучу B_2 пространства изображений соответствует луч B_1 пространства предметов, проходящий через точку F_1. Точка F_1 пространства предметов, сопряженная бесконечно удаленной точке пространства изображений, является *первым*, или *передним*, ***фокусом***[1].

Плоскости, проходящие через фокусы перпендикулярно главной оптической оси, называют ***фокальными.***

Так как лучи A_1 и B_1 попарно сопряжены лучам A_2 и B_2, то сопряжены и точки C_1 и C_2 пересечения этих лучей или их продолжений. Проведя через C_1 и C_2 плоскости, перпендикулярные O_1O_2, получим точки H_1 и H_2. Имеем попарное сопряжение этих плоскостей, точек H_1 и H_2 и отрезков C_1H_1 и C_2H_2.

Отрезки C_1H_1 и C_2H_2 не только сопряжены, но и равны ($|C_1H_1| = |C_2H_2| = h$) и имеют одинаковое направление относительно оптической оси (одинаковые знаки); следовательно, для них линейное увеличение $\beta = +1$. Оптическая система имеет две сопряженные плоскости, перпендикулярные оптической оси, для которых линейное увеличение сопряженных отрезков $\beta = +1$; такие ***плоскости*** и соответствующие ***точки*** H_1 *и* H_2 главной оптической оси называют ***главными.***

Расстояния между фокусами и соответствующими главными точками называют ***фокусными расстояниями***:

$$F_1H_1 = -f_1,\ F_2H_2 = f_2. \qquad \textbf{(21.4)}$$

Главные плоскости и точки H_1 и H_2 могут лежать не только внутри центрированной оптической системы (см. рис. 21.8), но и вне ее, совершенно не симметрично относительно граничных поверхностей (рис. 21.9).

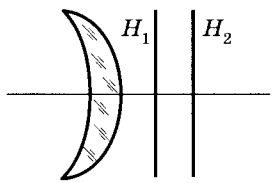


Рис. 21.9

Главные точки и фокусы называют ***кардинальными точками,*** а соответствующие

[1] Так как пространства предметов и изображений взаимно сопряжены, то понятия «передний» и «задний», «первый» и «второй» условны.

плоскости — ***кардинальными плоскостями***. Эти точки и плоскости используют для построения изображения *безотносительно к истинному ходу лучей в системе*. Общие принципы аналогичны правилам построения изображения в тонкой линзе.

На рис. 21.10 показан пример построения изображения в центрированной оптической системе. Луч *1*, идущий от светящейся точки S_1 параллельно главной оптической оси, продолжают до пересечения с главной плоскостью пространства изображений, а затем проводят через фокус F_2. Луч *2* проходит через фокус F_1 до пересечения с главной плоскостью пространства предметов, а затем параллельно оптической оси. Пересечение двух лучей (точка S_2) и дает изображение точки S_1.

Точки N_1 и N_2 (см. рис. 21.10) называют ***узловыми***. Их особенность заключается в том, что сопряженные лучи *3*, проходящие через них, одинаково наклонены к оптической оси, т. е. параллельны.

Если по обе стороны от оптической системы находятся среды с одинаковыми показателями преломления, то узловые точки совпадают с соответствующими главными точками.

Таким образом, *оптическая система характеризуется шестью кардинальными точками и шестью кардинальными плоскостями*.

Приведем без вывода наиболее важные формулы для центрированной оптической системы:

$$f_1/a_1 + f_2/a_2 = 1, \qquad \textbf{(21.5)}$$

$$f_1/f_2 = n_1/n_2, \qquad \textbf{(21.6)}$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления сред соответственно слева и справа от крайних сферических поверхностей оптической системы; обозначения a_1, a_2, f_1, f_2 разъяснены на рис. 21.10. Отрезки a_1 и f_1 отсчитываются от главной точки H_1, а отрезки a_2 и f_2 — от H_2.

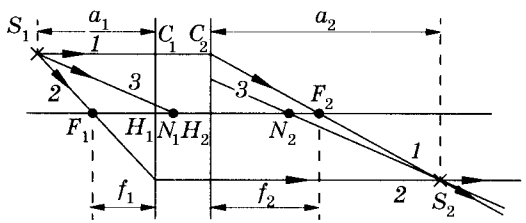


Рис. 21.10

Они считаются положительными, если их направления совпадают с направлением распространения света, и отрицательными, если они противоположны. Обычно в геометрической оптике на рисунках принято распространение света слева направо.

Так как тонкая линза является частным случаем центрированной оптической системы, то естественно, что все сказанное выше справедливо и для нее. В этом случае четыре кардинальные точки — главные и узловые — совпадают с центром линзы, а формула (21.5) превращается в (21.3). Правила построения изображения в таких линзах, известные читателю из средней школы, также являются частным случаем более общего метода, описанного выше.

§ 21.4. Оптическая система глаза и некоторые ее особенности

Глаз человека является своеобразным оптическим прибором, занимающим в оптике особое место. Это объясняется, во-первых, тем, что многие оптические инструменты рассчитаны на зрительное восприятие, во-вторых, глаз человека (и животного) как усовершенствованная в процессе эволюции биологическая система приносит в рамках бионики некоторые идеи по конструированию и улучшению оптических систем.

Для медиков глаз не только орган, способный к функциональным нарушениям и заболеваниям, но и источник информации о некоторых неглазных болезнях.

Остановимся кратко на строении глаза человека.

Собственно глазом (рис. 21.11) является глазное яблоко, имеющее не совсем правильную шаровидную форму: передне-задний размер у взрослого в среднем 24,3 мм, вертикальный — 23,4 мм и горизонтальный — 23,6 мм. Стенки глаза состоят из трех концентрически расположенных оболочек: наружной, средней и внутренней. Наружная белковая оболочка — склера *1* — в передней части глаза превращается в прозрачную выпуклую роговую оболочку *2* — роговицу. Толщина роговицы в центре около 0,6 мм, на периферии — до 1 мм. По оптическим свойствам роговица — наиболее сильно преломляющая часть глаза. Она является как бы окном, через которое в глаз проходят лучи света. Радиус кривизны роговицы

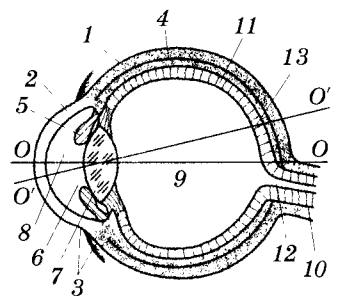


Рис. 21.11

примерно 7—8 мм, показатель преломления ее вещества 1,38. Наружный покров роговицы переходит в конъюнктиву *3*, прикрепленную к векам.

К склере прилегает сосудистая оболочка *4*, внутренняя поверхность которой выстлана слоем темных пигментных клеток, препятствующих внутреннему диффузному рассеянию света в глазу. В передней части глаза сосудистая оболочка переходит в радужную *5*, в которой имеется круглое отверстие — зрачок *6*. Непосредственно к зрачку с внутренней стороны глаза примыкает хрусталик *7* — прозрачное и упругое тело, подобное двояковыпуклой линзе. Диаметр хрусталика 8—10 мм, радиус кривизны передней поверхности в среднем 10 мм, задней — 6 мм. Показатель преломления вещества хрусталика несколько превышает значение $n = 1{,}4$[1].

Между роговицей и хрусталиком расположена передняя камера *8* глаза, она заполнена водянистой влагой — жидкостью, близкой по оптическим свойствам к воде. Вся внутренняя часть глаза от хрусталика до задней стенки занята прозрачной студенистой массой, называемой стекловидным телом *9*. Показатель преломления стекловидного тела такой же, как и у водянистой влаги.

Рассмотренные выше элементы глаза в основном относятся к его *светопроводящему аппарату*.

Зрительный нерв *10* входит в глазное яблоко через заднюю стенку; разветвляясь, он переходит в самый внутренний слой глаза — сетчатку, или ретину *11*, являющуюся световоспринимающим (рецепторным) аппаратом глаза. Сетчатка состоит из нескольких слоев и неодинакова по своей толщине и чувствительности к свету, в ней находятся светочувствительные зрительные клетки, периферические концы которых имеют различную форму. Продолговатые окончания называют палочками, конусообразные — колбочками. Длина палочек 63—81 мкм, диаметр около 1,8 мкм, для колбочек, соответственно, 35 и 5—6 мкм. На сетчатке глаза человека расположено около 130 млн палочек и 7 млн колбочек.

В месте вхождения зрительного нерва находится не чувствительное к свету слепое пятно *12*. В середине сетчатки, чуть ближе к височной области, лежит самое чувствительное к свету желтое пятно *13*, центральная часть которого имеет диаметр около 0,4 мм.

[1] Строение хрусталика напоминает слоистую структуру лука, причем показатель преломления слоев неодинаков. Вследствие этой специфики хрусталик преломляет так, как однородное вещество с показателем преломления, большим показателя преломления любого слоя.

Колбочки и палочки распределены по сетчатке неравномерно. Колбочки расположены главным образом в центральной части сетчатки, в желтом пятне, в центре желтого пятна находятся исключительно колбочки, на краях сетчатки — только палочки.

Рассмотрим сначала особенности светопроводящего аппарата глаза.

Глаз может быть представлен как центрированная оптическая система, образованная роговицей, жидкостью передней камеры и хрусталиком (четыре преломляющие поверхности) и ограниченная спереди воздушной средой, сзади — стекловидным телом. Главная оптическая ось OO (см. рис. 21.11) проходит через геометрические центры роговицы, зрачка и хрусталика. Кроме того, различают еще зрительную ось $O'O'$ глаза, которая определяет направление наибольшей светочувствительности и проходит через центры хрусталика и желтого пятна. Угол между главной оптической и зрительной осями составляет около 5°.

На рис. 21.12 показаны фокусы, главные точки и плоскости, а также узловые точки для некоторого усредненного нормального глаза (расстояния указаны в миллиметрах). Для упрощения часто заменяют эту систему ***приведенным*** редуцированным глазом, т. е. линзой, окруженной воздухом со стороны пространства предметов и жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}336$ со стороны пространства изображений. В одной из моделей приведенного глаза единая главная плоскость находится на расстоянии 1,6 мм от передней поверхности роговицы, узловые точки совпадают и расположены на расстоянии 7,2 мм от поверхности роговицы.

Основное преломление света происходит на внешней границе роговицы, оптическая сила всей роговицы равна приблизительно 40 дптр, хрусталика — около 20 дптр, а всего глаза — около 60 дптр.

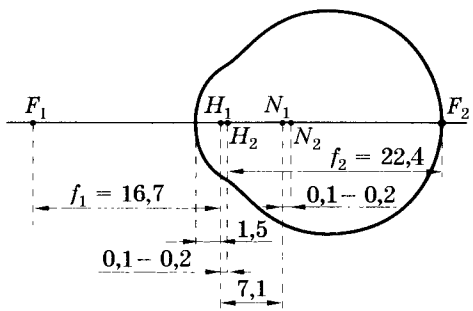


Рис. 21.12

Различно удаленные предметы должны давать на сетчатке одинаково резкие изображения. Из формулы (21.5) видно, что это можно осуществить либо изменяя расстояние a_2 между главной плоскостью и сетчаткой аналогично тому, как это делают в фотоаппаратах, либо изменяя кривизну хрусталика и, следовательно, фокусные расстояния f_1 и f_2. В глазу человека реализуется второй случай.

Приспособление глаза к четкому видению различно удаленных предметов — «наводку на резкость» — называют ***аккомодацией***[1].

Когда предмет расположен в бесконечности, то его изображение в нормальном глазу находится на сетчатке. Хрусталик при этом аккомодирован на бесконечность и его оптическая сила наименьшая. Если предмет приближается к глазу, то у хрусталика увеличивается кривизна; чем ближе предмет, тем больше оптическая сила глаза, ее изменения происходят приблизительно в пределах 60—70 дптр.

У взрослого здорового человека при приближении предмета к глазу до расстояния 25 см аккомодация совершается без напряжения и благодаря привычке рассматривать предметы, находящиеся в руках, глаз чаще всего аккомодирован именно на это расстояние, называемое ***расстоянием наилучшего зрения.***

Для рассматривания еще более близких предметов приходится уже напрягать аккомодационный аппарат. Наиболее близкое расположение предмета от глаза, при котором еще возможно четкое изображение на сетчатке, называют ***ближней точкой глаза*** (ближняя точка ясного видения). Расстояние до ближней точки глаза с возрастом увеличивается; следовательно, аккомодация уменьшается.

Размер изображения на сетчатке зависит не только от размера предмета, но и от его удаления от глаза, т. е. от угла, под которым виден предмет. В связи с этим вводят понятие *угла зрения.* Это угол между лучами, идущими от крайних точек предмета через совпадающие узловые точки (рис. 21.13). Из рисунка видно,

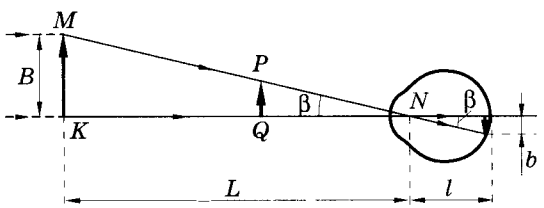


Рис. 21.13

[1] У некоторых рыб аккомодация происходит за счет перемещения хрусталика в целом относительно оптической оси, т. е. реализуется первый случай.

во-первых, что один и тот же угол зрения β может соответствовать разным предметам KM и QP и, во-вторых, что угол зрения вполне определяет размер изображения на сетчатке:

$$b = l\beta, \qquad (21.7)$$

где l — расстояние между единой узловой точкой N и сетчаткой ($l \approx 17$ мм). Формула (21.7) записана в предположении, что угол зрения мал.

Из рис. 21.13 легко установить связь между размером B предмета, расстоянием L его от глаза, точнее, от узловых точек, и углом зрения β:

$$B = L\beta, \qquad (21.8)$$

отсюда с учетом (21.7) имеем

$$b = lB/L. \qquad (21.9)$$

Для характеристики разрешающей способности глаза используют ***наименьший угол зрения***, при котором человеческий глаз еще различает две точки предмета. Этот угол приблизительно равен 1′, что соответствует [см. (21.8)] расстоянию между точками, равному 70 мкм, если они находятся на расстоянии наилучшего зрения. Размер изображения на сетчатке в этом случае [см. (21.7)] равен 5 мкм, что соответствует среднему расстоянию между двумя колбочками на сетчатке. Поэтому если изображение двух точек на сетчатке займет линию короче 5 мкм, то эти точки не разрешатся, т. е. глаз их не различает.

Такое же значение наименьшего угла зрения будет получено, если учесть ограничения, которые накладывает дифракция света (см. § 21.8). Поражает целесообразность природы — «ничего лишнего»: число колбочек, приходящихся на единицу площади сетчатки, отвечает предельным возможностям геометрической оптики.

В медицине разрешающую способность глаза оценивают ***остротой зрения***. За норму остроты зрения принимается единица, в этом случае наименьший угол зрения равен *1′*.

При отклонениях острота зрения во столько раз меньше нормы, во сколько раз наименьший угол зрения больше минуты. Если наименьший угол зрения равен 4′, то острота зрения равна $1 : 4 = 0{,}25$.

В отдельных случаях глаз человека различает и более мелкие величины, чем те, которые соответствуют углу 1′. Так, например, смещение движущихся предметов заметно, когда оно достигает 20″ по дуге, несовпадение двух тонких линий обнаруживается уже при угле 12″ между ними и т. д. В физических измерениях часто применяют приборы, в которых стрелка не должна сме-

щаться с нулевого деления (штриха) шкалы (потенциометры, мосты). Благодаря способности глаза обнаруживать малые смещения линий такие приборы могут давать более точные показания, чем те, в которых определяется расстояние между штрихом и стрелкой[1].

Чувствительность глаза к свету и цвету, а также биофизические вопросы зрения рассматриваются в седьмом разделе.

§ 21.5. Недостатки оптической системы глаза и их компенсация

Аберрации, свойственные линзам, у глаз почти не ощущаются.

Сферическая аберрация незаметна ввиду малости зрачка и проявляется лишь в сумерках, когда зрачок расширен: изображения нерезки. Хотя глаз и не является ахроматической системой, однако хроматическая аберрация не ощущается, в частности из-за малого размера зрачка. Астигматизм косых пучков не имеет места, так как глаз всегда устанавливается в направлении наблюдаемого предмета. Исключение составляет лишь астигматизм, обусловленный асимметрией оптической системы (несферическая форма роговицы или хрусталика).

Это проявляется, в частности, в неспособности глаза одинаково резко видеть взаимно перпендикулярные линии на испытательной таблице. Такой недостаток глаза компенсируют специальными очками с цилиндрическими линзами.

Оптической системе глаза свойственны некоторые специфические недостатки.

В нормальном глазу при отсутствии аккомодации задний фокус совпадает с сетчаткой — такой глаз называют ***эмметропическим***; глаз называют ***аметропическим***, если это условие не выполняется.

Наиболее распространенными видами аметропии являются ***близорукость*** (миопия) и ***дальнозоркость*** (гиперметропия). Близорукость — недостаток глаза, состоящий в том, что задний фокус при отсутствии аккомодации лежит впереди сетчатки; в случае дальнозоркости задний фокус при отсутствии аккомодации лежит за сетчаткой. Для коррекции близорукого глаза применяют рассеивающую линзу, дальнозоркого — собирающую.

[1] Это вопрос не только физический, но и физиологический.

§ 21.6. Лупа

Возможность разрешения деталей предмета зависит от размеров его изображения на сетчатке глаза или от угла зрения. Угол зрения можно увеличить, приблизив предмет к глазу, однако это связано с некоторыми ограничениями: 1) в ряде случаев технически невозможно существенно изменить расстояние между предметом и глазом (например, при рассмотрении звезд или Солнца); 2) невозможно приблизить предмет на расстояние меньшее, чем до ближней точки глаза, из-за предельных возможностей аккомодации.

В связи с этим для увеличения угла зрения используют оптические приборы: телескопы, лупы, микроскопы и т. п.

Рассмотрим устройство одного из наиболее простых оптических приборов — лупы.

Лупой называют оптическую систему, в передней фокальной плоскости которой или в непосредственной близости от нее расположен наблюдаемый предмет.

Изображение, создаваемое лупой, находится в бесконечности или на удобном для глаза расстоянии. Если изображение в бесконечности, то оно наблюдается глазом без аккомодации.

На рис. 21.14, *а* показано двумя лучами, как с помощью лупы формируется изображение на сетчатке; N — объединенная узловая точка оптической системы глаза, предмет помещен в передней фокальной плоскости. Луч *1* проходит через центр лупы без преломления, а затем преломляется глазом. Другие лучи, идущие от этой же

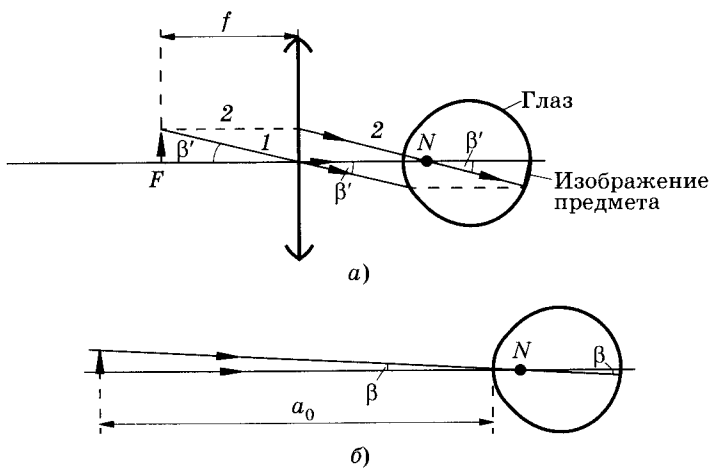


Рис. 21.14

точки предмета, после преломления в лупе будут параллельны лучу *1*. Чтобы определить положение изображения на сетчатке, выберем из этих лучей тот, который проходит через объединенную узловую точку (луч *2*). Он не преломляется глазом. Его пересечение с сетчаткой и укажет положение изображения предмета. Остается лишь для полноты картины достроить начальную часть луча *2* и конечную часть луча *1* (показаны штриховыми линиями).

Увеличением лупы называют отношение угла зрения β', под которым видно изображение предмета (см. рис. 21.14, *а*), к углу зрения β, под которым виден предмет, находящийся на расстоянии наилучшего зрения $a_0 = 25$ см (рис. 21.14, *б*).

Из рисунков видно:

$$\beta' = B/f, \quad \beta = B/a_0, \qquad \textbf{(21.10)}$$

где B — линейный размер предмета. Учитывая (21.10), получаем увеличение лупы

$$\Gamma = \beta'/\beta = a_0/f. \qquad \textbf{(21.11)}$$

Отсюда видно, что формула для увеличения связывает постоянную величину фокусного расстояния f лупы с расстоянием наилучшего зрения — довольно условной величиной. У близорукого глаза $a_0 < 25$ см, у дальнозоркого $a_0 > 25$ см, поэтому для близорукого глаза увеличение от одной и той же лупы будет меньше, чем для дальнозоркого.

Учитывая, что напряжение аккомодации сильно утомляет глаз и допустимо лишь как кратковременное явление, следует при пользовании лупой помещать предмет в фокальную плоскость, а глаз — у самой лупы.

Лупы изготовляют из одной или нескольких линз. Увеличение лупы зависит от ее конструкции и изменяется в пределах от 2 до 40—50. Наиболее распространены лупы с 10-кратным увеличением.

Разрешаемое с помощью лупы расстояние между двумя точками можно вычислить по формуле (21.8). Например, если для 10-кратного увеличения взять $\beta = 0{,}1' \approx 3 \cdot 10^{-5}$ рад; $L = a_0 = 0{,}25$ м, то получим $B = 0{,}25 \times \times 3 \cdot 10^{-5} = 7{,}5$ мкм.

§ 21.7. Оптическая система и устройство микроскопа

Для получения больших увеличений в качестве лупы следует использовать [см. (21.11)] короткофокусные линзы. Однако такие линзы имеют небольшие размеры, им свойственны значительные

аберрации, что накладывает ограничения на увеличение лупы. Большее увеличение можно осуществить, рассматривая действительное изображение предмета, созданное дополнительной линзой или системой линз. Таким оптическим устройством является ***микроскоп***; лупу в этом случае называют ***окуляром***, а дополнительную линзу или систему линз — ***объективом***.

Для того чтобы глаз не был напряжен, стремятся совместить изображение, созданное объективом, с фокальной плоскостью окуляра. На рис. 21.15 показан ход лучей в микроскопе, объективом и окуляром которого являются собирающие линзы, и в глазу.

Изображение A_1B_1 предмета AB, созданное линзой объектива *Об*, находим согласно правилу построения изображения в тонкой линзе; луч *1*, параллельный главной оптической оси, проходит после преломления в линзе через фокус, луч *2* через центр линзы идет без преломления; изображение A_1B_1 расположено в передней фокальной плоскости окуляра.

Лучи *1* и *2* доходят до линзы окуляра *Ок* и в ней преломляются. Чтобы показать ход этих лучей после преломления в окуляре, проведем следующее рассуждение.

Все лучи, идущие из некоторой точки фокальной плоскости (например, A_1), после преломления в линзе должны распространяться параллельно друг другу. Проведем из A_1 луч A_1D через центр линзы; лучи *1* и *2* после преломления в окуляре пройдут параллельно A_1D до встречи с глазом. Пусть луч *1* проходит через объединенную узловую точку N глаза и потому без преломления дойдет до точки A_2 сетчатки. В эту же точку сфокусируется луч *2*. На сетчатке глаза получаем изображение A_2B_2 предмета AB.

В современных оптических микроскопах объектив и окуляр состоят из нескольких линз, представляющих собой *единую*

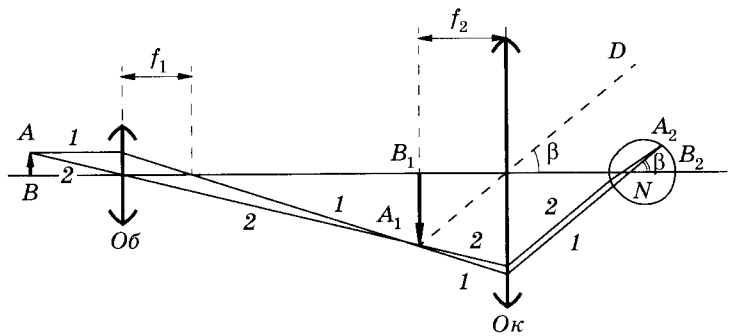


Рис. 21.15

центрированную оптическую систему (рис. 21.16). Главные плоскости объектива и окуляра такой системы показаны на рисунке раздельно, окружающая среда имеет одинаковый показатель преломления. Лучи *1* и *2*, идущие от точки B предмета AB, пересекаются в точке B', где формируется изображение, создаваемое объективом. Луч *2* попадает на окуляр параллельно главной оптической оси, поэтому он проходит через фокус F_2'. Так как лучи *1* и *2* выходят из одной точки B' фокальной плоскости, то после преломления в окуляре они будут параллельны друг другу.

Можно указать главные точки и фокусы микроскопа как единой центрированной оптической системы. Так как луч *1* в пространстве предметов параллелен главной оптической оси, то он в пространстве изображений пересечет оптическую ось в заднем фокусе F'. Главные точки и плоскости найдем из условия, что точка и ее изображение, расположенные в соответствующих главных плоскостях, равноудалены от главной оптической оси.

Чтобы не загромождать чертеж, выберем точку K передней главной плоскости так, чтобы луч, распространяющийся от этой точки параллельно оптической оси, в пространстве предметов совпадал с лучом *1*. Сопряженную ей точку K', расположенную в задней фокальной плоскости, найдем из условия, что она лежит на луче *1* и удалена на такое же расстояние от главной оптической оси, как и точка K. Проецируя K' на главную оптическую ось, получаем заднюю главную точку H'.

Для нахождения передней главной точки из K' направим луч *3* параллельно главной оптической оси. Он пройдет через F_2 до пересечения с задней главной плоскостью объектива. Чтобы определить направление этого луча после выхода из передней главной плоскости объектива, сделаем дополнительное построение: из

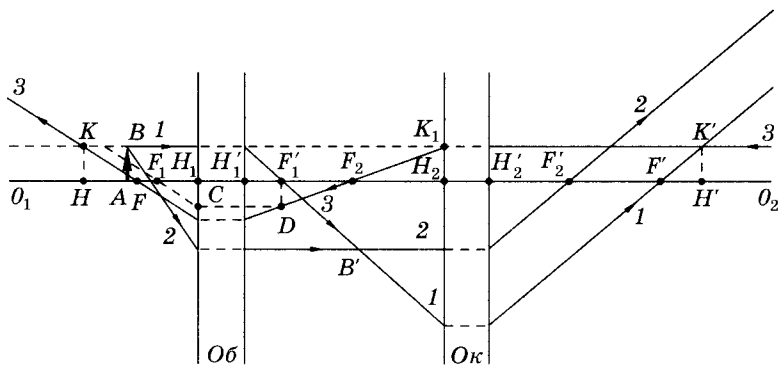


Рис. 21.16

точки D, лежащей в фокальной плоскости, проводим луч DC параллельно главной оптической оси, он должен пройти через фокус F_1, а луч *3* пройдет параллельно CF_1. Пересечение луча *3* с главной оптической осью дает передний фокус F микроскопа, а с лучом *1* — положение точки K, которая лежит в передней главной плоскости; H — передняя главная точка микроскопа.

Отметим, что в этом случае фокусы расположены между главными точками.

Так как показатели преломления среды пространств предмета и изображения одинаковы, то на основании (21.6) фокусные расстояния равны между собой: $f = -f'$.

Определим фокусное расстояние микроскопа.

Из подобия ΔKHF и ΔCH_1F_1, а также $\Delta DF_1'F_2$ и $\Delta K_1H_2F_2$ соответственно имеем

$$|KH|/|HF| = |CH_1|/|H_1F_1| \text{ или } |KH|/f = |CH_1|/f_1, \qquad \textbf{(21.12)}$$

$$|K_1H_2|/|H_2F_2| = |DF_1'|/|F_1'F_2| \text{ или } |K_1H_2|/f_2 = |CH_1|/\Delta, \qquad \textbf{(21.13)}$$

где f_1 — фокусное расстояние объектива, f_2 — фокусное расстояние окуляра, Δ — расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра, называемое *оптической длиной тубуса*. Разделив (21.12) на (21.13) и учитывая, что $|KH| = |K_1H_2|$, имеем $f_2 : f = \Delta : f_1$, откуда фокусное расстояние микроскопа

$$f = f_1f_2/\Delta. \qquad \textbf{(21.14)}$$

Так как и для микроскопа в принципе справедлива общая формула (21.11), то [см. (21.14)]

$$\Gamma = \beta'/\beta = a_0\Delta/(f_1f_2). \qquad \textbf{(21.15)}$$

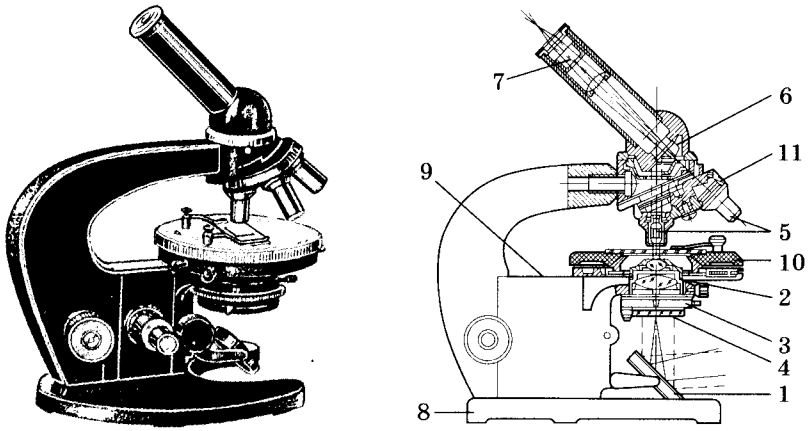
Итак, увеличение микроскопа равно отношению произведения оптической длины тубуса Δ на расстояние наилучшего зрения a_0 к произведению f_1f_2 фокусных расстояний объектива и окуляра.

Формулу (21.15) можно представить как произведение двух сомножителей:

$$\Gamma_{ок} = a_0/f_2 \text{ и } \Gamma_{об} = \Delta/f_1, \qquad \textbf{(21.16)}$$

где $\Gamma_{ок}$ — увеличение окуляра, $\Gamma_{об}$ — увеличение объектива[1].

[1] Читателю из курса физики средней школы известна формула для увеличения линзы. Следует учесть, что предмет располагается вблизи фокуса объектива, поэтому расстояние предмета от линзы объектива приблизительно равно ее фокусному расстоянию. Так как оно невелико, то оптическую длину тубуса можно считать расстоянием от объектива до изображения.



а) *б*)

Рис. 21.17

На рис. 21.17 изображены общий вид (*а*) и схема (*б*) биологического микроскопа. Его главные части: основание *8*, коробка с микрометрическим механизмом *9*, предметный столик *10*, револьвер *11* с объективами *5*, конденсор *2* и окуляр *7*. Оптическая система состоит из двух частей: осветительной и наблюдательной. В осветительную часть входят зеркало *1*, конденсор с ирисовой апертурной диафрагмой *3* и съемный светофильтр *4*, а в наблюдательную — объектив, призма *6* и окуляр, соединенные в тубусе микроскопа.

Пучок лучей от источника света падает на зеркало, которое отражает его к диафрагме, проходит через конденсор и исследуемый препарат и затем попадает в объектив.

§ 21.8. Разрешающая способность и полезное увеличение микроскопа. Понятие о теории Аббе

Из формулы (21.15) можно сделать вывод, что при надлежащем выборе f_1 и f_2 увеличение микроскопа будет сколь угодно большим. Однако на практике биологи, врачи и другие специалисты, работающие с микроскопами, редко используют увеличения, превышающие 1500—2000. Чтобы уяснить причины такого положения, ознакомимся с понятиями «предел разрешения», «разрешающая способность» и «полезное увеличение микроскопа».

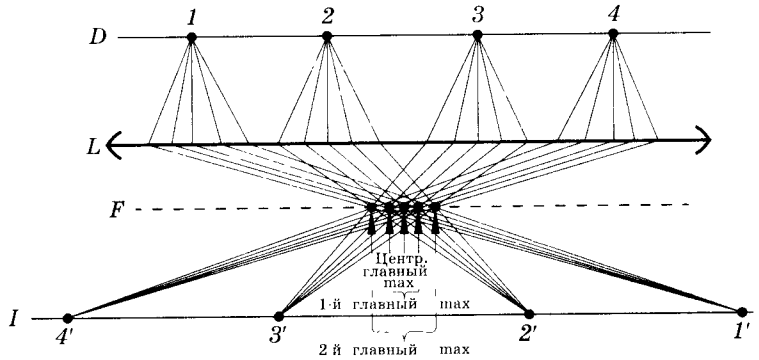


Рис. 21.18

Предел разрешения — это такое наименьшее расстояние между двумя точками предмета, когда эти точки различимы, т. е. воспринимаются в микроскопе как две точки.

Разрешающей способностью обычно называют способность микроскопа давать раздельные изображения мелких деталей рассматриваемого предмета. Это величина обратна пределу разрешения. Разрешающая способность микроскопа обусловлена волновыми свойствами света, поэтому выражение для предела разрешения можно получить, учитывая дифракционные явления.

Рассмотрим дифракционную теорию разрешающей способности микроскопа, предложенную Э. Аббе.

При освещении прозрачного предмета в микроскоп попадает свет, рассеянный (дифрагированный) объектом. В качестве наиболее простого предмета была взята дифракционная решетка — объект с достаточно определенной структурой.

Пусть решетка *D* (рис. 21.18) состоит из четырех щелей *1*—*4*. От каждой щели распространяются вторичные волны, на рисунке показан ход пяти лучей от каждой такой волны. Вторичные волны, падающие под одинаковым углом к оптической оси линзы *L*, соберутся в фокальной плоскости *F*. Если разность хода вторичных волн, идущих от соседних щелей и отклоненных на одинаковый угол, равна целому числу длин волн, то в местах, обозначенных точками на плоскости *F*, появятся главные максимумы (центральный, 1-й, 2-й). Картину, образуемую в фокальной плоскости линзы, называют *первичным изображением*. Оно содержит определенную информацию о предмете, однако не является изображением в общепринятом понимании.

Собственно изображение, или *вторичное изображение* (*1'*—*4'*, образуется в плоскости *I* при пересечении вторичных волн, идущих от каждой из щелей. Вторичное изображение создается после

первичного, поэтому оно не может содержать большей информации о предмете, чем первичное.

В оптических устройствах, в том числе и в микроскопе, пучки света всегда ограничены, поэтому важно знать, к какому искажению изображения предмета это может привести и какое минимальное количество лучей способно передавать правильную информацию о предмете.

Главные максимумы попарно симметрично располагаются относительно центрального и в некоторой степени дублируют друг друга. Совокупность максимумов, расположенных с одной стороны от центра, вместе с центральным достаточна, чтобы передать информацию о предмете. Следовательно, экранирование лучей, идущих от максимумов, расположенных по другую сторону от центра, лишь уменьшит яркость изображения предмета.

При экранировании в плоскости F лучей от нечетных главных максимумов объективно создаются условия, при которых второй главный максимум играет роль первого, четвертый — второго, и т. д., и, как видно из (19.29), изображение будет такое же, как и у дифракционной решетки с вдвое меньшим периодом.

Центральный максимум имеет общую структуру для решеток с разным периодом и, следовательно, не содержит информации об особенностях предмета. Поэтому если пропустить лучи только центрального максимума, экранировав все остальные, то вторичное изображение предмета (решетки) не сформируется.

Такого рода опыты с различным ограничением пучков света в плоскости F проделал Аббе. Он установил, что для соответствия вторичного изображения предмету необходимо по крайней мере, чтобы из первичного изображения проходили дальше лучи *центрального и одного из первых главных максимумов.*

Реально свет от предмета распространяется к объективу микроскопа в некотором конусе (рис. 21.19, *а*), который характеризуется ***угловой апертурой*** — углом u между крайними лучами конического светового пучка, входящего в оптическую систему[1]. В предельном случае, согласно Аббе, крайними лучами конического светового пучка будут лучи, соответствующие центральному (нулевому) и 1-му главному максимумам (рис. 21.19, *б*). При этом луч падает на предмет (решетку) под углом $u/2$, такой же угол и для первого дифракционного максимума. Из формулы (19.39) при $\beta = u/2$ и $\alpha = -u/2$ получаем

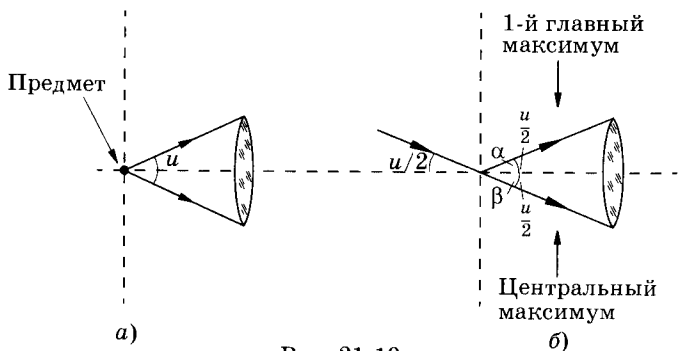


Рис. 21.19

$$2c \sin(u/2) = \lambda. \qquad \textbf{(21.17)}$$

В рассмотренной модели предмета (решетка) за предел разрешения z следует принять элемент структуры — постоянную дифракционной решетки c, т. е. $z = c$ при указанных α и β. Из (21.17) находим

$$z = 0{,}5\lambda/\sin(u/2), \qquad \textbf{(21.18)}$$

или, учитывая, что $\lambda = \lambda_0/n$, и вводя $A = n \sin(u/2)$,

$$z = 0{,}5\lambda_0/A, \qquad \textbf{(21.19)}$$

где A — ***числовая апертура***, n — показатель преломления среды, находящейся между предметом и линзой объектива, λ_0 — длина волны света в вакууме.

Как видно из формулы (21.19), один из способов уменьшения предела разрешения микроскопа — использование света с меньшей длиной волны. В связи с этим применяют ультрафиолетовый микроскоп, в котором микрообъекты исследуются в ультрафиолетовых лучах. Принципиальная оптическая схема такого микроскопа аналогична схемам обычного микроскопа. Основное отличие заключается, во-первых, в использовании оптических устройств, прозрачных для ультрафиолетового света, и, во-вторых, в особенности регистрации изображения. Так как глаз непосредственно не воспринимает этого излучения, то употребляются фотопластинки, люминесцентные экраны или электронно-оптические преобразователи (см. раздел седьмой).

Другой способ уменьшения предела разрешения микроскопа — увеличение числовой апертуры, что достигается увеличением как показателя преломления среды между предметом и объективом, так и апертурного угла. В обычных условиях (воздух) показатель преломления равен единице. Угол же $u/2$ может иметь большие значения — теоретически до 90°. Если этот угол очень велик, то лучи первого максимума могут не попасть в объектив. Так, например,

[1] Предполагается, что объектив микроскопа наиболее сильно ограничивает световой поток, т. е. является апертурной диафрагмой.

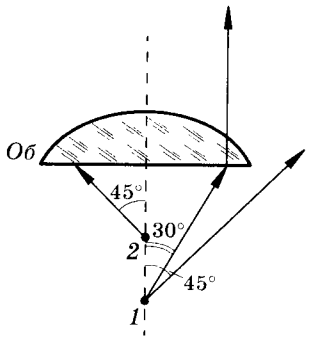


Рис. 21.20

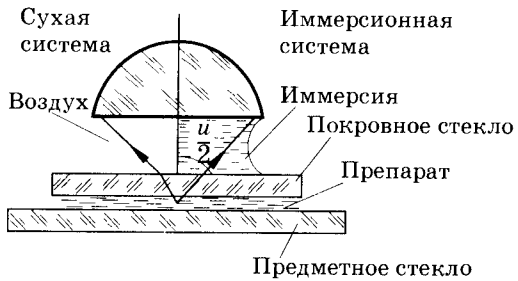


Рис. 21.21

на рис. 21.20 показано, что объектив *Об* не захватывает лучей, выходящих из точки *1* под углом 45°. Чтобы эти лучи попали, надо предмет приблизить к объективу, например в точку *2*. Однако расстояние предмета от линзы не может изменяться произвольно, оно постоянно для каждого объектива и приближать предмет нельзя.

Числовая апертура может быть увеличена с помощью специальной жидкой среды — ***иммерсии*** — в пространстве между объективом и покровным стеклом микроскопа. В иммерсионных системах по сравнению с тождественными «сухими» системами получают больший апертурный угол (рис. 21.21). В качестве иммерсии используют воду ($n = 1{,}33$), кедровое масло ($n = 1{,}515$), монобромнафталин ($n = 1{,}66$) и др. Для каждой иммерсии специально рассчитывают объектив, и его можно применять только с данной иммерсией.

В современных микроскопах угол $u/2$ достигает наибольшего значения, равного 70°. С этим углом получают максимальные числовые апертуры и минимальные пределы разрешения (табл. 28).

Таблица 28

	A	Z, мкм
Сухая система	$0{,}94 \cdot 1 = 0{,}94$	0,30
Водяная иммерсия	$0{,}94 \cdot 1{,}33 = 1{,}25$	0,22
Масляная иммерсия	$0{,}94 \cdot 1{,}515 = 1{,}43$	0,19

Данные приведены для наклонного падения света на объект и наиболее чувствительной глазу длины волны 0,555 мкм.

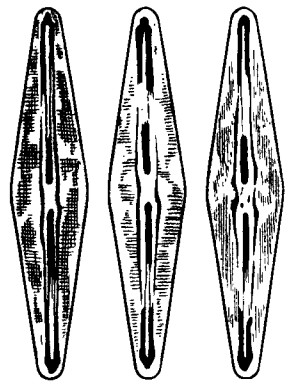
Условия освещения объекта влияют на разрешающую способность микроскопа, что важно учитывать в биологических исследованиях. Известен курьез, когда исследователи-биологи отнесли к

разным видам диатомею, так как разные условия освещения выявляли иначе структуру ее панциря. На рис. 21.22 показан вид объекта при полном (*а*) и частичном (*б*) разрешении из-за разного освещения.

Заметим, что окуляр совершенно не влияет на разрешающую способность микроскопа, он только создает увеличенное изображение объектива.

Оценим ***полезное увеличение*** микроскопа, используя формулу (21.19).

Если предмет имеет размер, равный пределу разрешения z, а размер его изображения z', и если это изображение расположено на расстоянии наилучшего зрения от глаза, то увеличение микроскопа



а) *б)*

Рис. 21.22

$$\Gamma = z'/z.$$

Подставляя в эту формулу z из (21.19), получаем

$$\Gamma = Az'/(0{,}5\lambda_0). \qquad \textbf{(21.20)}$$

Нормальный глаз в предельном случае различает две точки предмета, угловое расстояние между которыми равно 1′ (см. § 21.4). Считают, что удобная различимость должна соответствовать углу зрения в интервале от 2′ до 4′ или значениям z' (на расстоянии наилучшего зрения) от 140 до 280 мкм. Подставляя их, а также $\lambda_0 = 0{,}555$ мкм в формулу (21.20), находим интервал значений увеличения микроскопа:

$$500\,A < \Gamma < 1000\,A. \qquad \textbf{(21.21)}$$

Эти увеличения называют ***полезными***, так как при них глаз различает все элементы структуры объекта, которые разрешимы микроскопом.

Подставляя числовую апертуру иммерсионной системы с маслом ($A = 1{,}43$) в (21.21), получаем следующее неравенство для полезных увеличений такого микроскопа: $700 < \Gamma < 1400$.

§ 21.9. Некоторые специальные приемы оптической микроскопии

Измерение размеров микроскопических объектов с помощью микроскопа. Для этого применяют окулярный микрометр — круглую стеклянную пластинку, на которой нанесена шкала с делениями. Микрометр устанавливают в плоскости изо-

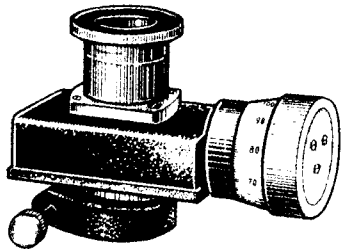


Рис. 21.23

бражения, получаемого от объектива. При рассматривании в окуляр изображения объекта и шкалы накладываются и можно отсчитать, какое расстояние по шкале соответствует измеряемой величине. Отсчет по шкале еще не дает размера объекта, так как совмещаемое со шкалой изображение не равно размеру предмета. Надо найти цену одного деления окулярного микрометра, для этого применяют объектный микрометр — шкалу с делениями по 0,01 мм. Рассматривая объектный микрометр как предмет, совмещают в одном поле зрения две шкалы — объектную и окулярную — и определяют цену деления окулярного микрометра.

Вместо объектного микрометра можно применить любой препарат, размер которого известен, или использовать счетную камеру Горяева, употребляемую в медицинских измерениях.

В настоящее время широко применяют окулярно-винтовой микрометр, который изображен на рис. 21.23. Этот прибор устанавливают вместо окуляра. При вращении винта перемещается перекрестие, что позволяет отсчитывать доли делений микрометра. Окулярно-винтовой микрометр нуждается в предварительной градуировке.

Микропроекция и микрофотография. Формирование микроскопического изображения происходит с участием человека и завершается образованием действительного изображения в глазу. Обычный микроскоп сам по себе не создает действительного изображения, однако для фотографирования (микрофотография) или проекции микроскопического изображения на экран (микропроекция) должно быть получено действительное изображение. Для этого изображение, даваемое объективом *Об*, надо расположить дальше фокусного расстояния окуляра *Ок* (рис. 21.24).

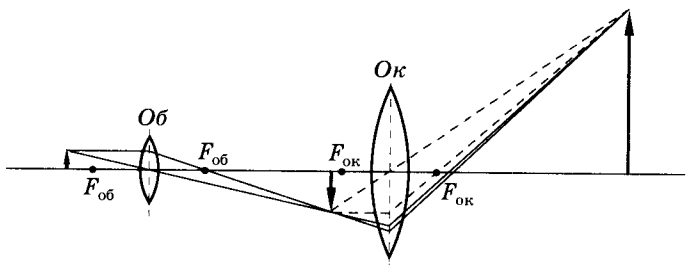


Рис. 21.24

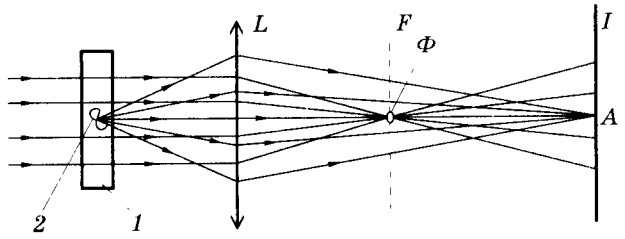


Рис. 21.25

Метод фазового контраста. Интенсивность световой волны, проходящей через прозрачный объект, почти не изменяется, но фазы претерпевают изменения, зависящие от толщины объекта и его показателя преломления. В этом смысле прозрачные объекты называют ***дефазирующими***. Увидеть детали таких объектов обычным образом невозможно. В биологических исследованиях такие объекты иногда окрашивают, однако при этом могут изменяться их свойства и жизнеспособность.

Для рассмотрения деталей дефазирующих объектов Ф. Цернике предложил метод фазового контраста.

Пусть объект состоит из однородной прозрачной среды *1* с показателем преломления n, в которой имеется прозрачное включение *2*, например бактерия с показателем преломления n_1 (рис. 21.25). При попадании плоскопараллельного пучка света часть его будет проходить через прозрачный объект и линзой L фокусироваться в небольшом участке $Ф$ фокальной плоскости F, а другая часть будет дифрагировать на неоднородности и соберется линзой в точке A плоскости I.

Фазовый состав световых колебаний в плоскости I графически в координатах интенсивность—фаза изображен на рис. 21.26. Кривая *1* соответствует прямому свету, прошедшему через объект без дифракции, кривая *2* — свету, дифрагированному объектом. Если $n_1 > n_2$, то эта кривая будет отставать по фазе, что и показано на рисунке. Кривую *2* можно представить как сумму двух волн. Одна из них (*1*) проходит объект без дифракции, другая (*3*) является результатом дифракции на бактерии с показателем преломления n_1. Кривую *3* можно найти графически, вычитая из ординат кривой *2* ординаты кривой *1*.

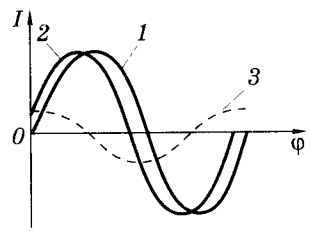


Рис. 21.26

Глаз в плоскости *I* (см. рис. 21.25) не различает волны *1* и *2*, так как их интенсивности одинаковые, а на различие фаз глаз не реагирует. Необходимо фазовый рельеф преобразовать в амплитудный.

Как видно из рис. 21.26, волна *3* сдвинута по фазе относительно волны *1* приблизительно на $\pi/2$, что соответствует оптической разности хода $\lambda/4$. Если изменить фазу волны *1* на $\pi/2$, то волны *1* и *3* окажутся либо в фазе (рис. 21.27, *а*), либо в противофазе (рис. 21.27, *б*). Кривую *2* найдем графически как сумму ординат кривых *1* и *3*. Из рисунка видно, что в этом случае волны *1* и *2* уже различаются по интенсивности (амплитуде), поэтому глаз заметит бактерию на однородном световом поле.

Так как волна *1* проходит в плоскости *F* (см. рис. 21.25) через небольшой участок, то можно, поставив в этом месте небольшую круглую пластинку (фазовую пластинку) *Ф*, изменить фазу волны. Иногда фазовую пластинку изготавливают из материала, который частично поглощает волну *1*, в этом случае контраст изображения бактерии будет еще сильнее, так как будет увеличена разница амплитуд волн *1* и *2*.

Фазово-контрастные устройства (пластинки, конденсоры) обычно комплектуют как дополнительные приспособления к микроскопам.

Ультрамикроскопия. Это метод обнаружения частиц, размеры которых лежат за пределами разрешения микроскопа. Микроскопы, работающие по этому методу, называют ***ультрамикроскопами***. В них осуществляют боковое (косое) освещение, благодаря чему субмикроскопические частицы видны как светлые точки на темном фоне; *строение частиц увидеть нельзя*.

Принципиальная оптическая схема ультрамикроскопа изображена на рис. 21.28. Свет от источника попадает с левой стороны в

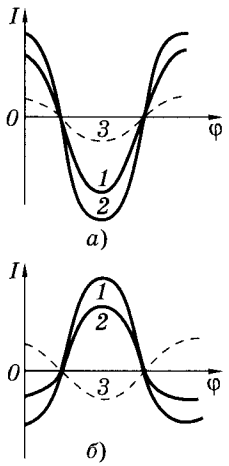


Рис. 21.27

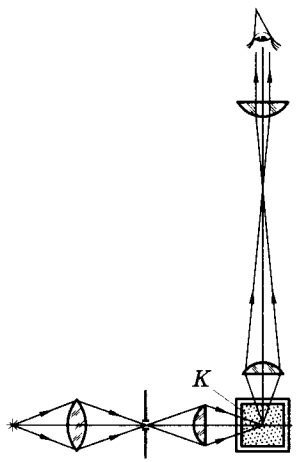


Рис. 21.28

кювету *K* с мелкими частицами аэрозолей, гидрозолей и т. п.; наблюдение производят сверху.

Этот метод позволяет регистрировать частицы размером до 2 мкм; его используют, в частности, с санитарно-гигиеническими целями для определения чистоты воздуха.

§ 21.10. Волоконная оптика и ее использование в оптических устройствах

Традиционными элементами оптических систем, формирующих световой пучок, являются линзы, зеркала, призмы, плоскопараллельные пластинки и т. п. Начиная с 50-х гг. прошлого столетия к этим элементам прибавились волоконно-оптические детали, которые способны передавать свет по каналам, называемым ***светопроводами***.

Волоконной оптикой называют раздел оптики, в котором рассматривают передачу света и изображения по светопроводам.

Этим же термином иногда называют и сами волоконно-оптические детали и приборы.

Волоконная оптика основана на явлении полного внутреннего отражения. Свет, попадая внутрь прозрачного волокна, окруженного веществом с меньшим показателем преломления, многократно отражается и распространяется вдоль этого волокна (рис. 21.29). Так как при полном отражении коэффициент отражения сравнительно высок (порядка 0,9999), то потери энергии в основном обусловлены поглощением света веществом внутри волокна. Так, например, в видимой области спектра в волокне длиной 1 м теряется 30—70% энергии.

Для передачи больших световых потоков и сохранения гибкости светопроводящей системы отдельные волокна собираются в пучки (жгуты) — световоды. На рис. 21.30 схематически показан световод; из-за хаотического расположения волокон изображение цифры 1 искажено.

В медицине световоды используют для решения двух задач: передачи световой энергии, главным образом для освещения холодным светом внутренних полостей, и передачи изображения. Для первого

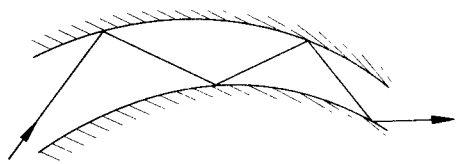


Рис. 21.29

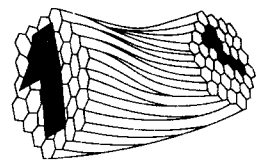


Рис. 21.30

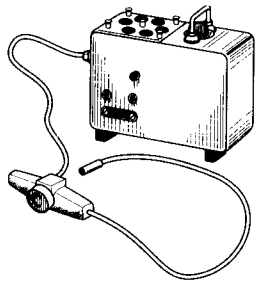


Рис. 21.31

случая не имеет значения положение отдельных волокон в световоде, для второго существенно, чтобы расположение волокон на входе и выходе световода было одинаковым.

Примером применения волоконной оптики для модернизации существующих медицинских аппаратов является ***эндоскоп*** — специальный прибор для осмотра внутренних полостей (желудок, прямая кишка и др.). Он состоит из двух основных частей: источника света и смотровой части. С использованием волоконной оптики удалось, во-первых, свет от лампочки передавать внутрь органа по световоду, тем самым избегая нежелательного нагревания этого органа, которое неизбежно возникало при помещении источника света внутри полости в эндоскопах прежней конструкции; во-вторых, что самое главное, гибкость волоконно-оптических систем допускает осмотр большей части полостей, чем с помощью жестких эндоскопов.

На рис. 21.31 показан ***волоконный гастроскоп***. С его помощью можно не только визуально осмотреть желудок, но и произвести необходимые снимки с целью диагностики. Именно эти потребности медицины стимулировали развитие волоконной оптики вообще.

С помощью световодов осуществляется передача лазерного излучения во внутренние органы с целью лечебного воздействия на опухоли.

В заключение заметим, что сетчатка глаза человека является высокоорганизованной волоконно-оптической системой, состоящей примерно из $130 \cdot 10^6$ волокон. Это, вероятно, наиболее сложная волоконно-оптическая система, существующая в настоящее время.

ГЛАВА 22

Тепловое излучение тел

Излучение электромагнитных волн веществом происходит благодаря внутриатомным и внутримолекулярным процессам. Источники энергии и, следовательно, вид свечения могут быть разными: экран телевизора, лампа дневного света, лампа накаливания, гниющее дерево, светлячок и т. д.

Из всего многообразия электромагнитных излучений, видимых или не видимых человеческим глазом, можно выделить одно, которое присуще всем телам. Это излучение нагретых тел, или тепловое излучение. Оно возникает при любых температурах выше 0 К, поэтому испускается всеми телами. В зависимости от температуры тела изменяются интенсивность излучения и спектральный состав, поэтому далеко не всегда тепловое излучение воспринимается глазом как свечение.

§ 22.1. Характеристики теплового излучения. Черное тело

Среднюю мощность излучения за время, значительно большее периода световых колебаний, принимают за ***поток излучения*** **Ф**. В СИ он выражается в *ваттах* (Вт).

Поток излучения, испускаемый 1 м^2 поверхности, называют ***энергетической светимостью*** R_e. Она выражается в *ваттах на квадратный метр* (Вт/м^2).

Нагретое тело излучает электромагнитные волны различной длины волны. Выделим небольшой интервал длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$. Энергетическая светимость, соответствующая этому интервалу, пропорциональна ширине интервала:

$$dR_\lambda = r_\lambda d\lambda, \qquad (22.1)$$

где r_λ — ***спектральная плотность энергетической светимости тела***, равная отношению энергетической светимости узкого участка спектра к ширине этого участка, Вт/м^3.

Зависимость спектральной плотности энергетической светимости от длины волны называют ***спектром излучения тела.***

Проинтегрировав (22.1), получим выражение для энергетической светимости тела:

$$R_e = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda. \qquad (22.2)$$

(Пределы интегрирования взяты с превышением, чтобы учесть все возможное тепловое излучение.)

Способность тела поглощать энергию излучения характеризуют ***коэффициентом поглощения,*** равным отношению потока излучения, поглощенного данным телом, к потоку излучения, упавшего на него:

$$\alpha = \frac{\Phi_{\text{погл}}}{\Phi_{\text{пад}}}. \qquad (22.3)$$

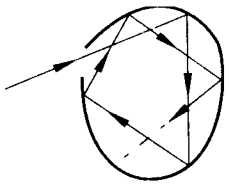


Рис. 22.1

Так как коэффициент поглощения зависит от длины волны, то (22.3) записывают для потоков монохроматического излучения, и тогда это отношение определяет ***монохроматический коэффициент поглощения***:

$$\alpha_\lambda = \frac{\Phi_{\text{погл}}(\lambda)}{\Phi_{\text{пад}}(\lambda)}. \qquad \textbf{(22.3а)}$$

Из (22.3) следует, что коэффициенты поглощения могут принимать значения от 0 до 1. Особенно хорошо поглощают излучение тела́ черного цвета: черная бумага, ткани, бархат, сажа, платиновая чернь и т. п.; плохо поглощают тела с белой поверхностью и зеркала.

Тело, коэффициент поглощения которого равен единице для всех длин волн (частот), называют черным. Оно поглощает все падающее на него излучение при любой температуре.

Черных тел в природе нет, это понятие — физическая абстракция. Моделью черного тела является маленькое отверстие в замкнутой непрозрачной полости (рис. 22.1). Луч, попавший в это отверстие, многократно отразившись от стенок, почти полностью будет поглощен. В дальнейшем именно эту модель будем принимать за черное тело.

Тело, коэффициент поглощения которого меньше единицы и не зависит от длины волны света, падающего на него, называют серым.

Серых тел в природе нет, однако некоторые тела в определенном интервале длин волн излучают и поглощают как серые. Так, например, тело человека иногда считают серым, имеющим коэффициент поглощения приблизительно 0,9 для инфракрасной области спектра.

§ 22.2. Закон Кирхгофа

Между спектральной плотностью энергетической светимости и монохроматическим коэффициентом поглощения тел существует определенная связь, которую можно пояснить на следующем примере.

В замкнутой адиабатной оболочке находятся два разных тела в условиях термодинамического равновесия, при этом их температуры одинаковы. Так как состояние тел не изменяется, то каждое

из них излучает и поглощает одинаковую энергию. Спектр излучения каждого тела должен совпадать со спектром электромагнитных волн, поглощаемых им, иначе нарушилось бы термодинамическое равновесие. Это означает, что если одно из тел излучает какие-либо волны, например красные, больше, чем другое, то оно должно больше их и поглощать.

Количественная связь между излучением и поглощением была установлена Г. Кирхгофом в 1859 г.: **при одинаковой температуре отношение спектральной плотности энергетической светимости к монохроматическому коэффициенту поглощения одинаково для любых тел, в том числе и для черных (закон Кирхгофа):**

$$\left(\frac{r_\lambda}{\alpha_\lambda}\right)_1 = \left(\frac{r_\lambda}{\alpha_\lambda}\right)_2 = \ldots = \frac{\varepsilon_\lambda}{1}, \qquad \textbf{(22.4)}$$

где ε_λ — спектральная плотность энергетической светимости черного тела (индексы у скобок означают тела *1*, *2* и т. д.).

Закон Кирхгофа может быть записан и в таком виде:

$$r_\lambda / \alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda. \qquad \textbf{(22.5)}$$

Отношение спектральной плотности энергетической светимости любого тела к его соответствующему монохроматическому коэффициенту поглощения равно спектральной плотности энергетической светимости черного тела при той же температуре.

Из (22.5) находим еще одно выражение:

$$r_\lambda = \alpha_\lambda \varepsilon_\lambda. \qquad \textbf{(22.6)}$$

Так как для любого тела (нечерного) $\alpha_\lambda < 1$, то, как следует из (22.6), спектральная плотность энергетической светимости любого тела меньше спектральной плотности энергетической светимости черного тела при той же температуре. Черное тело при прочих равных условиях является наиболее интенсивным источником теплового излучения.

Из (22.6) видно, что если тело не поглощает какое-либо излучение ($\alpha_\lambda = 0$), то оно его и не излучает ($r_\lambda = 0$).

Пользуясь законом Кирхгофа (22.6) и зная из эксперимента спектр излучения черного тела $\varepsilon_\lambda = f_1(\lambda)$, а также зависимость монохроматического коэффициента поглощения тела от длины волны $\alpha_\lambda = f_2(\lambda)$, можно в соответствии с (22.6) найти спектр излучения тела $r_\lambda = f_3(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda)$.

§ 22.3. Законы излучения черного тела

Излучение черного тела имеет сплошной спектр. Графики спектров излучения для разных температур приведены на рис. 22.2. Из этих экспериментальных кривых можно сделать ряд выводов.

Существует максимум спектральной плотности энергетической светимости, который с повышением температуры смещается в сторону коротких волн.

На основании (22.2) энергетическую светимость черного тела R_e^0 можно найти как площадь, ограниченную кривой и осью абсцисс, или

$$R_e^0 = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda \, d\lambda. \qquad (22.7)$$

Из рис. 22.2 видно, что энергетическая светимость увеличивается по мере нагревания черного тела.

Долгое время не могли получить теоретически зависимость спектральной плотности энергетической светимости черного тела от длины волны и температуры, которая отвечала бы эксперименту. В 1900 г. это было сделано М. Планком.

В классической физике испускание и поглощение излучения телом рассматривались как непрерывный волновой процесс. Планк пришел к выводу, что именно эти основные положения не позволяют получить правильную зависимость. Он высказал гипотезу, из которой следовало, что черное тело излучает и поглощает энергию не непрерывно, а определенными дискретными порциями — квантами. Представляя излучающее тело как совокупность осцилляторов, энергия которых может изменяться лишь на величину, кратную кванту энергии $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, Планк получил формулы

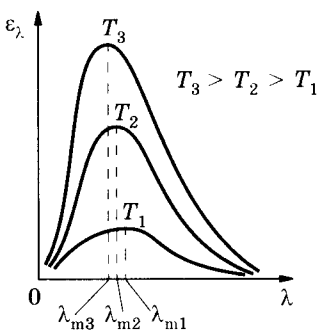


Рис. 22.2

$$\varepsilon_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}; \qquad (22.8\text{ а})$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (22.8\text{ б})$$

($h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме, k — постоянная Больцмана),

которые прекрасно описывают экспериментальные данные, в частности кривые, изображенные на рис. 22.2.

На основании (22.6) и (22.8 а) спектр излучения серого тела может быть выражен зависимостью

$$r_\lambda = \alpha \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}, \qquad (22.9)$$

где α — коэффициент поглощения серого тела.

Из формулы (22.8) можно получить расчетным путем законы, которые были установлены экспериментально еще до основополагающей работы Планка. Рассчитаем энергетическую светимость черного тела по формуле (22.7) с учетом (22.8):

$$R_e^0 = 2\pi hc^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)}.$$

Произведя замену переменных $\frac{hc}{kT\lambda} = x$, запишем

$$R_e^0 = -\frac{2\pi k^4}{h^3c^2} T^4 \int_\infty^0 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi k^4}{h^3c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \qquad (22.9\text{а})$$

Без вывода укажем, что $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$. Множитель при T^4 в (22.9а), состоящий из постоянных величин, равен

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2} \approx 5{,}6696 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4). \qquad (22.10)$$

Окончательно получаем

$$R_e^0 = \sigma T^4. \qquad (22.11)$$

Это **закон Стефана—Больцмана: энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры.** Величину σ называют ***постоянной Стефана—Больцмана.***

Для серых тел [см. (22.2) и (22.9)] имеем

$$R_e = \int_0^\infty \alpha \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} d\lambda = \alpha\sigma T^4. \qquad (22.12)$$

Закон Стефана—Больцмана можно качественно проиллюстрировать на разных телах (печь, электроплита, металлическая болванка и т. д.): по мере их нагревания ощущается все более интенсивное излучение.

Функция ε_λ, записанная в виде (22.8 а), имеет экстремум при условии

$$d\varepsilon_\lambda/d\lambda = 0. \qquad \textbf{(22.13)}$$

Отсюда получаем ***закон смещения Вина*** (см. рис. 22.2):

$$\lambda_m = b/T, \qquad \textbf{(22.14)}$$

где λ_m — длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости черного тела, $b = 0{,}28978 \cdot 10^{-2}$ м · К — ***постоянная Вина***. Этот закон выполняется и для серых тел.

Проявление закона Вина известно из обыденных наблюдений. При комнатной температуре тепловое излучение тел в основном приходится на инфракрасную область и человеческим глазом не воспринимается. Если температура повышается, то тела начинают светиться темно-красным светом, а при очень высокой температуре — белым с голубоватым оттенком, возрастает ощущение нагретости тела.

Законы Стефана—Больцмана и Вина позволяют, регистрируя излучение тел, определять их температуры (***оптическая пирометрия***).

§ 22.4. Излучение Солнца. Источники теплового излучения, применяемые для лечебных целей

Наиболее мощным источником теплового излучения, обусловливающим жизнь на Земле, является Солнце.

Поток солнечной радиации, приходящийся на 1 м^2 ***площади границы земной атмосферы, составляет*** 1350 Вт. ***Эту величину называют солнечной постоянной.***

В зависимости от высоты Солнца над горизонтом путь, проходимый солнечными лучами в атмосфере, изменяется в довольно больших пределах (рис. 22.3; граница атмосферы изображена условно) с максимальным различием в 30 раз. Даже при самых благоприятных условиях на 1 м^2 поверхности Земли падает поток солнечной радиации 1120 Вт. В июле в Москве при наивысшем стоянии Солнца это значение достигает только 930 Вт/м^2. В остальное время дня потери в атмосфере еще больше.

Ослабление радиации атмосферой сопровождается изменением ее спектрального состава. На рис. 22.4 показан спектр солнечного излучения на границе земной атмосферы (кривая *1*) и на поверхности Земли (кривая *2*) при наивысшем стоянии Солнца. Кри-

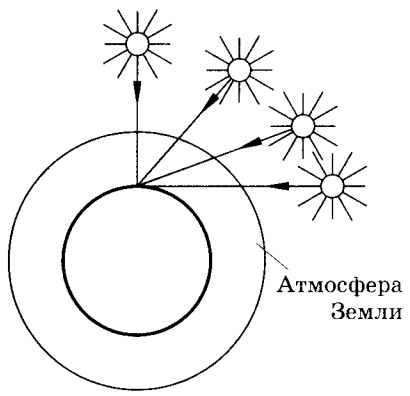


Рис. 22.3

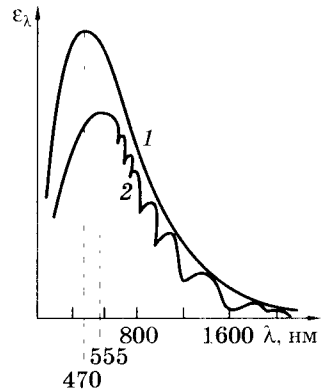


Рис. 22.4

вая *1* близка к спектру черного тела, ее максимум соответствует длине волны 470 нм, что, по закону Вина, позволяет определить температуру поверхности Солнца — около 6100 К. Кривая *2* имеет несколько линий поглощения, ее максимум расположен около 555 нм. Интенсивность прямой солнечной радиации измеряют ***актинометром***.

Принцип действия его основан на использовании нагревания зачерненных поверхностей тел, происходящего от солнечной радиации.

Дозированную солнечную радиацию применяют как солнцелечение (гелиотерапия), а также как средство закаливания организма.

Для лечебных целей используют искусственные источники теплового излучения: лампы накаливания (соллюкс) и инфракрасные излучатели (инфраруж), укрепленные в специальном рефлекторе на штативе. Инфракрасные излучатели устроены подобно бытовым электрическим нагревателям с круглым рефлектором. Спираль нагревательного элемента накаливается током до температуры порядка 400—500 °С.

§ 22.5. Теплоотдача организма. Понятие о термографии

Тело человека имеет определенную температуру благодаря терморегуляции, существенной частью которой является теплообмен организма с окружающей средой. Рассмотрим некоторые особенности такого теплообмена, предполагая, что температура окружающей среды ниже температуры тела человека.

Теплообмен происходит посредством теплопроводности, конвекции, испарения и излучения (поглощения).

Трудно или даже невозможно точно указать распределение отдаваемого количества теплоты между перечисленными процессами, так как оно зависит от многих факторов: состояния организма (температура, эмоциональное состояние, подвижность и т. д.), состояния окружающей среды (температура, влажность, движение воздуха и т. п.), одежды (материал, форма, цвет, толщина).

Однако можно сделать приближенную и усредненную оценки для лиц, не имеющих особой физической нагрузки и проживающих в условиях умеренного климата.

Так как теплопроводность воздуха мала, то этот вид теплоотдачи очень незначителен. Более существенна конвекция, она может быть не только обычной, естественной, но и вынужденной, при которой воздух обдувает нагретое тело. Большую роль для уменьшения конвекции играет одежда. В условиях умеренного климата 15—20% теплоотдачи человека осуществляется конвекцией.

Испарение происходит с поверхности кожи и легких, при этом имеет место около 30% теплопотерь.

Наибольшая доля теплопотерь (около 50%) приходится на излучение во внешнюю среду от открытых частей тела и одежды. Основная часть этого излучения относится к инфракрасному диапазону с длиной волны от 4 до 50 мкм.

Для вычисления этих потерь сделаем два основных допущения.

1. Излучающие тела (кожа человека, ткань одежды) примем за серые. Это позволит использовать формулу (22.12).

Назовем произведение коэффициента поглощения на постоянную Стефана—Больцмана ***приведенным коэффициентом излучения***: $\delta = \alpha\sigma$. Тогда (22.12) перепишется так:

$$R_e = \delta T^4. \qquad \textbf{(22.15)}$$

Ниже даны коэффициент поглощения и приведенный коэффициент излучения для некоторых тел (табл. 29).

Таблица 29

	α	δ, 10^{-8} Вт/(м² · К⁴)
Хлопчатобумажная ткань	0,73	4,2
Шерсть, шелк	0,76	4,3
Кожа человека	0,90	5,1

2. Применим закон Стефана—Больцмана к неравновесному излучению, к которому, в частности, относится излучение тела человека.

Если раздетый человек, поверхность тела которого имеет температуру T_1, находится в комнате с температурой T_0, то его потери на излучение могут быть вычислены следующим образом. В соответствии с формулой (22.15) человек излучает со всей открытой поверхности тела площадью S мощность $P_1 = S\delta T_1^4$. Одновременно человек поглощает часть излучения, попадающего от предметов комнаты, стен, потолка и т. п. Если бы поверхность тела человека имела температуру, равную температуре воздуха в комнате, то излучаемая и поглощаемая мощности были бы одинаковы и равны $P_0 = S\delta T_0^4$. Такая же мощность будет поглощаться телом человека и при других температурах поверхности тела. На основании двух последних равенств получаем мощность, теряемую человеком при взаимодействии с окружающей средой посредством излучения:

$$P = P_1 - P_0 = S\delta(T_1^4 - T_0^4).$$

Для одетого человека под T_1 следует понимать температуру поверхности одежды. Приведем количественный пример, поясняющий роль одежды.

При температуре окружающей среды 18 °С (291 К) раздетый человек, температура поверхности кожи которого 33 °С (306 К), теряет ежесекундно посредством излучения с площади 1,5 м² энергию

$$P = 1{,}5 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-8}(306^4 - 291^4)\ \text{Дж/с} \approx 122\ \text{Дж/с}.$$

При той же температуре окружающей среды в хлопчатобумажной одежде, температура поверхности которой 24 °С (297 К), ежесекундно теряется посредством излучения энергия

$$P_{\text{од}} = 1{,}5 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-8}(297^4 - 291^4)\ \text{Дж/с} \approx 37\ \text{Дж/с}.$$

Максимум спектральной плотности энергетической светимости тела человека в соответствии с законом Вина попадает на длину волны приблизительно 9,5 мкм при температуре поверхности кожи 32 °С.

Вследствие сильной температурной зависимости энергетической светимости (четвертая степень термодинамической температуры) даже небольшое повышение температуры поверхности может вызвать такое изменение излучаемой мощности, которое надежно зафиксируется приборами. Поясним это количественно.

Продифференцируем уравнение (22.15): $dR_e = 4\delta T^3 dT$. Разделив это выражение на (22.15), получим $dR_e/R_e = 4dT/T$. Это означает, что относительное изменение энергетической светимости больше относительного изменения температуры излучающей поверхности в четыре раза. Так, если температура поверхности тела человека изменится на 3 °С, т. е. приблизительно на 1%, то энергетическая светимость изменится на 4%.

У здоровых людей распределение температуры по различным точкам поверхности тела достаточно характерно. Однако воспалительные процессы, опухоли могут изменить местную температуру.

Температура вен зависит от состояния кровообращения, а также от охлаждения или нагревания конечностей. Таким образом, регистрация излучения разных участков поверхности тела человека и определение их температуры являются диагностическим методом. Такой метод, называемый ***термографией***, находит все более широкое применение в клинической практике.

Термография абсолютно безвредна и в перспективе может стать методом массового профилактического обследования населения.

Определение различия температуры поверхности тела при термографии в основном осуществляется двумя методами. В одном случае используются жидкокристаллические индикаторы, оптические свойства которых очень чувствительны к небольшим изменениям температуры. Помещая эти индикаторы на тело больного, можно визуально по изменению их цвета определить местное различие температуры. Другой метод, более распространенный, — технический, он основан на использовании ***тепловизоров***. Тепловизор — это техническая система, подобная телевизору, которая способна воспринимать инфракрасное излучение, идущее от тела, преобразовывать это излучение в оптический диапазон и воспроизводить изображение тела на экране. Части тела, имеющие разные температуры, изображают на экране разным цветом.

§ 22.6. Инфракрасное излучение и его применение в медицине

Электромагнитное излучение, занимающее спектральную область между красной границей видимого света **($\lambda = 0{,}76$ мкм)** ***и коротковолновым радиоизлучением*** **[$\lambda = (1—2)$ мм]**, ***называют инфракрасным*** **(ИК).**

Инфракрасную область спектра условно разделяют на близкую (0,76—2,5 мкм), среднюю (2,5—50 мкм) и далекую (50—2000 мкм).

Нагретые твердые и жидкие тела испускают непрерывный инфракрасный спектр. Если в законе смещения Вина вместо λ_{max} подставить пределы ИК-излучения, то получим соответственно температуры 3800—1,5 К. Это означает, что все жидкие и твердые тела в обычных условиях (при обычных температурах) практически не только являются источниками ИК-излучения, но и имеют максимум излучение в ИК-области спектра. Отклонение реальных тел от серых не изменяет существа вывода.

При невысокой температуре энергетическая светимость тел мала. Поэтому далеко не все тела могут быть использованы в качестве источников ИК-излучения. В связи с этим наряду с тепловыми источниками ИК-излучения используют еще ртутные лампы высокого давления и лазеры (см. § 24.8), которые, в отличие от других источников, не дают сплошного спектра. Мощным источником ИК-излучения является Солнце, около 50% его излучения лежит в ИК-области спектра.

Методы обнаружения и измерения ИК-излучения делят в основном на две группы: тепловые и фотоэлектрические. Примером теплового приемника служит термоэлемент, нагревание которого вызывает электрический ток. К фотоэлектрическим приемникам относят фотоэлементы и фотосопротивления.

Обнаружить и зарегистрировать инфракрасное излучение можно также фотопластинками и фотопленками со специальным покрытием.

Лечебное применение инфракрасного излучения основано на его тепловом действии. Наибольший эффект достигается коротковолновым ИК-излучением, близким к видимому свету. Для лечения используют специальные лампы (см. § 22.4).

Инфракрасное излучение проникает в тело на глубину около 20 мм, поэтому в большей степени прогреваются поверхностные слои. Терапевтический эффект как раз и обусловлен возникающим температурным градиентом, что активизирует деятельность терморегулирующей системы. Усиление кровоснабжения облученного места приводит к благоприятным лечебным последствиям.

§ 22.7. Ультрафиолетовое излучение и его применение в медицине

Электромагнитное излучение, занимающее спектральную область между фиолетовой границей видимого света **($\lambda = 400$ нм)** ***и длинноволновой частью рентгеновского излучения*** **($\lambda = 10$ нм)**, ***называют ультрафиолетовым*** **(УФ).**

В области длин волн ниже 200 нм УФ-излучение сильно поглощается всеми телами, в том числе и тонкими слоями воздуха, поэтому особого интереса для медицины не представляет. Остальную часть УФ-спектра условно делят на три области (см. § 24.9): *A* (400—315 нм), *B* (315—280 нм) и *C* (280—200 нм).

Накаленные твердые тела при высокой температуре излучают заметную долю УФ-излучения. Однако максимум спектральной плотности энергетической светимости в соответствие с законом смещения Вина даже для наиболее длинной волны УФ-диапазона (0,4 мкм) приходится на 7000 К. Практически это означает, что в обычных условиях тепловое излучение тел не может служить эффективным источником мощного УФ-излучения. Наиболее мощным источником теплового УФ-излучения является Солнце, 9% излучения которого на границе земной атмосферы приходится на УФ-диапазон.

В лабораторных условиях в качестве источников УФ-излучения используют электрический разряд в газах и парах металлов. Такое излучение уже не является тепловым и имеет линейчатый спектр.

Измерение УФ-излучения в основном осуществляется фотоэлектрическими приемниками. Индикаторами являются люминесцирующие вещества и фотопластинки.

УФ-излучение необходимо для работы ультрафиолетовых микроскопов (см. § 21.8), люминесцентных микроскопов, для люминесцентного анализа (см. § 24.6). Главное применение УФ-излучения в медицине связано с его специфическим биологическим воздействием, которое обусловлено фотохимическими процессами (см. § 24.9).

§ 22.8. Организм как источник физических полей

Всякое тело является источником физических полей. Термином ***физическое поле*** обозначают особое состояние материи, которое проявляется в воздействии на другие тела, находящиеся в этом поле. Физические поля различны по природе. Так, различают гравитационное, электрическое, магнитное, электромагнитное, ядерное поля. Можно рассматривать звук как акустическое поле.

Тело человека как физическое тело тоже является источником физических полей. *Регистрация, а также измерение характеристик этих полей могут быть использованы для получения информации о состоянии организма, его органов и тканей, т. е. для целей диагностики.*

Наиболее существенны для этого следующие физические поля.

1. Акустическое поле (см. § 6.3, аускультация, фонокардиография).
2. Электрическое поле (см. § 12.5, электрокардиография).
3. Магнитное поле (см. § 13.5, магнитокардиография).
4. Электромагнитное поле (см. § 22.5, термография).

В популярной литературе часто используется термин «биополе», понимая под этим некоторое специфическое влияние организма на окружающие тела или некоторое специфическое излучение биологических объектов. В связи с этим нужно определенно сказать, что организм является источником физических полей и каких-либо особых «биополей» не создает.

Особый вопрос — как представить результат исследования (регистрации) физического поля организма (органов, тканей) для целей диагностики. Делается это по-разному. Так, например, при аускультации врач выслушивает звуки, т. е. субъективно оценивает их громкость и частоту. При электрокардиографии документально фиксируется временна́я зависимость разности потенциалов на теле пациента, возникающих при сердечной деятельности. При термографии тепловое излучение отображается на экране тепловизора.

РАЗДЕЛ

7

Физика атомов и молекул. Элементы квантовой биофизики

До конца XIX в. атом считали неделимой частицей. Однако открытие электронов и других элементарных частиц убедило ученых в сложном строении атома.

Решающее значение для понимания структуры атома сыграли знаменитые опыты Резерфорда по рассеянию альфа-частиц. Были созданы условия для развития физики атома, которая изучает строение и состояние атомов и смежные вопросы. Это теория атома, атомная оптическая спектроскопия, рентгеновская спектроскопия, радиоспектроскопия и др.

Отдельные вопросы физики атомов и особенно физики молекул перекликаются с вопросами, рассматриваемыми в химии. Четкие границы раздела в этих областях науки отсутствуют.

Врач должен иметь представление о природе физических и физико-химических процессов, происходящих в организме человека. В конечном счете эти процессы «разыгрываются» на молекулярном уровне. Поэтому здесь рассматриваются вопросы, связанные с энергетическими превращениями молекул в биологических системах (хемилюминесценция, фотобиологические явления и др.). Эти темы объединяют термином «квантовая биофизика», видимо, по созвучию с квантовой механикой.

ГЛАВА 23

Волновые свойства частиц. Элементы квантовой механики

Квантовой механикой называют теорию, устанавливающую способ описания и законы движения микрочастиц (элементарных частиц, ядер, атомов, молекул и их систем, в частности кристаллов, и т. д.). Необычность квантово-механических представлений по сравнению с классической физикой инициировала пересмотр основных физических моделей и представлений, которые казались очевидными и незыблемыми. Прежде всего, это коснулось понятия самих частиц и принципов их движения.

В этой главе дается понятие не только о квантовой механике, но и о тех идеях и опытах, которые привели к этой теории. Здесь также рассматривается электронная микроскопия как метод, основанный на волновых свойствах электронов.

§ 23.1. Гипотеза де Бройля. Опыты по дифракции электронов и других частиц

Важным этапом в создании квантовой механики явилось установление волновых свойств микрочастиц. Идея о волновых свойствах частиц была первоначально высказана как гипотеза французским физиком Луи де Бройлем (1924)[1]. Эта гипотеза появилась благодаря следующим предпосылкам.

[1] Гипотеза де Бройля была сформулирована до опытов, подтверждающих волновые свойства частиц. Де Бройль об этом позднее, в 1936 г. писал так: «...не можем ли мы предположить, что и электрон так же двойственен, как и свет? На первый взгляд такая идея казалась очень дерзкой. Ведь мы всегда представляли себе электрон в виде электрически заряженной материальной точки, которая подчиняется законам классической динамики. Электрон никогда не проявлял волновых свойств, таких, скажем, какие проявляет свет в явлениях интерференции и дифракции. Попытка приписать волновые свойства электрону, когда этому нет никаких экспериментальных доказательств, могла выглядеть как ненаучная фантазия».

В физике в течение многих лет господствовала теория, согласно которой *свет* есть *электромагнитная волна*. Однако после работ Планка (тепловое излучение), Эйнштейна (фотоэффект) и др. стало очевидным, что *свет обладает корпускулярными свойствами*.

Чтобы объяснить некоторые физические явления, необходимо рассматривать свет как поток частиц — фотонов. Корпускулярные свойства света не отвергают, а дополняют его волновые свойства. Итак, ***фотон — элементарная частица, движущаяся со скоростью света, обладающая волновыми свойствами и имеющая энергию*** $\varepsilon = h\nu$, ***где*** ν ***— частота световой волны.***

Логично считать, что и другие частицы — электроны, нейтроны также обладают волновыми свойствами.

Выражение для импульса фотона $p_ф$ получается из известной формулы Эйнштейна $\varepsilon = mc^2$ и соотношений $\varepsilon = h\nu$ и $p_ф = mc$:

$$p_ф = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \qquad \textbf{(23.1)}$$

где c — скорость света в вакууме, λ — длина световой волны. Эта формула была использована де Бройлем и для других микрочастиц массой m, движущихся со скоростью v: $p = mv = \frac{h}{\lambda}$, откуда

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}. \qquad \textbf{(23.2)}$$

По де Бройлю, движение частицы, например электрона, описывается волновым процессом с характеристической длиной волны λ, в соответствии с формулой (23.2). Эти волны называют *волнами де Бройля*.

Гипотеза де Бройля была столь необычной, что многие крупные физики-современники не придали ей какого-либо значения. Несколькими годами позже эта гипотеза получила экспериментальное подтверждение: была обнаружена дифракция электронов.

Найдем зависимость длины волны электрона от ускоряющего напряжения U электрического поля, в котором он движется. Изменение кинетической энергии электрона равно работе сил поля:

$$\Delta E_к = A, \text{ или } \frac{mv^2}{2} = eU.$$

Выразим отсюда скорость v и, подставив ее в (23.2), получим

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \qquad \textbf{(23.3)}$$

Для получения пучка электронов с достаточной энергией, который можно зафиксировать, например, на экране осциллографа, необходимо ускоряющее напряжение порядка 1 кВ. В этом случае из (23.3) находим $\lambda = 0{,}4 \cdot 10^{-10}$ м, что соответствует длине волны рентгеновского излучения.

В гл. 19 было отмечено, что дифракция рентгеновских лучей наблюдается на кристаллических телах; следовательно, для дифракции электронов необходимо также использовать кристаллы.

К. Дэвиссон и Л. Джермер впервые наблюдали дифракцию электронов на монокристалле никеля, Дж. П. Томсон и независимо от него П. С. Тартаковский — на металлической фольге (поликристаллическое тело). На рис. 23.1 изображена электронограмма — дифракционная картина, полученная от взаимодействия электронов с поликристаллической фольгой. Сравнивая этот рисунок с рис. 19.21, можно заметить сходство дифракции электронов и рентгеновских лучей.

Способностью дифрагировать обладают и другие частицы, как заряженные (протоны, ионы и др.), так и нейтральные (нейтроны, атомы, молекулы).

Аналогично рентгеноструктурному анализу можно применять дифракцию частиц для оценки степени упорядоченности расположения атомов и молекул вещества, а также для измерения параметров кристаллических решеток. В настоящее время широкое распространение имеют методы электронографии (дифракция электронов) и нейтронографии (дифракция нейтронов).

Может возникнуть вопрос: что происходит с отдельными частицами, как образуются максимумы и минимумы при дифракции отдельных частиц?

Опыты по дифракции пучков электронов очень малой интенсивности, т. е. отдельных частиц, показали, что при этом электрон не «размазывается» по разным направлениям, а ведет себя как целая частица. Однако вероятность отклонения электрона по отдельным направлениям в результате взаимодействия с объектом дифракции различна. Наиболее вероятно попадание электронов в те места, которые по расчету соответствуют максимумам дифракции, менее вероятно их попадание в места минимумов. Таким образом, волновые свойства присущи не только коллективу электронов, но и каждому электрону в отдельности.

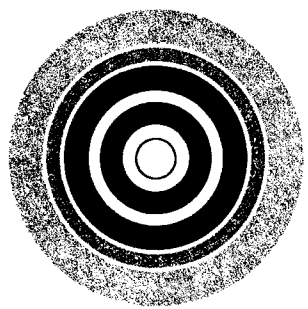


Рис. 23.1

§ 23.2. Электронный микроскоп. Понятие об электронной оптике

Волновые свойства частиц можно использовать не только для дифракционного структурного анализа, но и для получения увеличенных изображений предмета.

Открытие волновых свойств электрона сделало возможным создание электронного микроскопа. Предел разрешения оптического микроскопа (21.19) определяется в основном наименьшим значением длины волны света, воспринимаемого глазом человека. Подставив в эту формулу значение длины волны де Бройля (23.3), найдем предел разрешения электронного микроскопа, в котором изображение предмета формируется электронными пучками:

$$z = \frac{0{,}5h}{\sqrt{2emU} \cdot n\sin\frac{u}{2}}. \qquad \textbf{(23.4)}$$

Видно, что предел разрешения z электронного микроскопа зависит от ускоряющего напряжения U, увеличивая которое можно добиться, чтобы предел разрешения был значительно меньше, а разрешающая способность значительно больше, чем у оптического микроскопа.

Электронный микроскоп и его отдельные элементы по своему назначению подобны оптическому, поэтому воспользуемся аналогией с оптикой для объяснения его устройства и принципа действия. Схемы обоих микроскопов изображены на рис. 23.2 (*а* — оптический; *б* — электронный).

В оптическом микроскопе носителями информации о предмете AB являются фотоны, свет. Источником света обычно служит лампа накаливания *1*. После взаимодействия с предметом (поглощение, рассеяние, дифракция) поток фотонов преобразуется и содержит информацию о предмете. Поток фотонов формируется с помощью линз: конденсора *3*, объектива *4*, окуляра *5*. Изображение A_1B_1 регистрируется глазом *7* (или фотопластинкой, фотолюминесцирующим экраном и т. д.).

В электронном микроскопе носителем информации об образце являются электроны, а их источником — подогреваемый катод *1*. Ускорение электронов и образование пучка осуществляется фокусирующим электродом и анодом — системой, называемой электронной пушкой *2*. После взаимодействия с образцом (в основном рассеяние) поток электронов преобразуется и содержит информацию об образце. Формирование потока электронов происходит

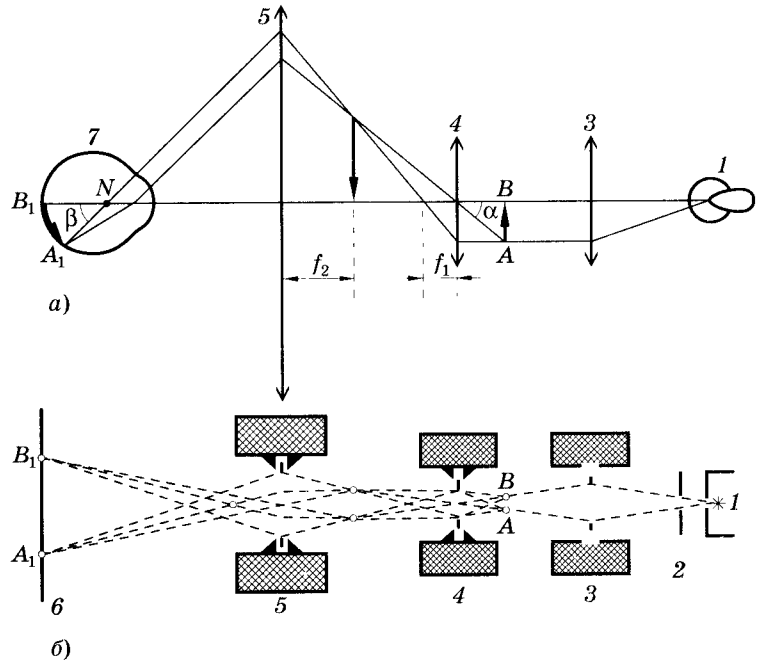


Рис. 23.2

под воздействием электрического поля (система электродов и конденсаторов) и магнитного (система катушек с током). Эти системы называют *электронными линзами* по аналогии с оптическими линзами, которые формируют световой поток (*3* — конденсорная; *4* — электронная, служащая объективом; *5* — проекционная). Изображение регистрируется на чувствительной к электронам фотопластинке или катодолюминесцирующем экране *6*.

Чтобы оценить предел разрешения электронного микроскопа, подставим в формулу (23.4) ускоряющее напряжение $U = 100$ кВ и угловую апертуру порядка 10^{-2} рад (приблизительно такие углы используют в электронной микроскопии). Получим $z \approx 0{,}1$ нм; это в сотни раз лучше, чем у оптических микроскопов. Применение ускоряющего напряжения, большего 100 кВ, хотя и повышает разрешающую способность, но сопряжено с техническими сложностями, в частности происходит разрушение исследуемого объекта электронами, имеющими большую скорость. Для биологических тканей из-за проблем, связанных с приготовлением образца, а также с его возможным радиационным повреждением, предел разрешения составляет около 2 нм. Этого достаточно, что-

бы увидеть отдельные молекулы. На рис. 23.3 показаны нити белка актина, имеющие диаметр примерно 6 нм. Видно, что они состоят из двух спирально закрученных цепей молекул белка.

Укажем некоторые особенности эксплуатации электронного микроскопа. В тех частях его, где пролетают электроны, должен быть вакуум, так как в противном случае столкновение электронов с молекулами воздуха (газа) приведет к искажению изображения. Это требование к электронной микроскопии усложняет процедуру исследования, делает аппаратуру более громоздкой и дорогой. Вакуум искажает нативные свойства биологических объектов, а в ряде случаев разрушает или деформирует их.

Для рассматривания в электронном микроскопе пригодны очень тонкие срезы (толщина менее 0,1 мкм), так как электроны сильно поглощаются и рассеиваются веществом.

Для исследования поверхностной геометрической структуры клеток, вирусов и других микрообъектов делают отпечаток их поверхности на тонком слое пластмассы (*реплику*). Обычно предварительно на реплику в вакууме напыляют под скользящим (малым к поверхности) углом слой сильно рассеивающего электроны тяжелого металла (например, платины), оттеняющий выступы и впадины геометрического рельефа.

К достоинствам электронного микроскопа следует отнести большую разрешающую способность, позволяющую рассматривать крупные молекулы, возможность изменять при необходимости ускоряющее напряжение и, следовательно, предел разрешения, а также сравнительно удобное управление потоком электронов с помощью магнитных и электрических полей.

Наличие волновых и корпускулярных свойств как у фотонов, так и у электронов и других частиц, позволяет ряд положений и

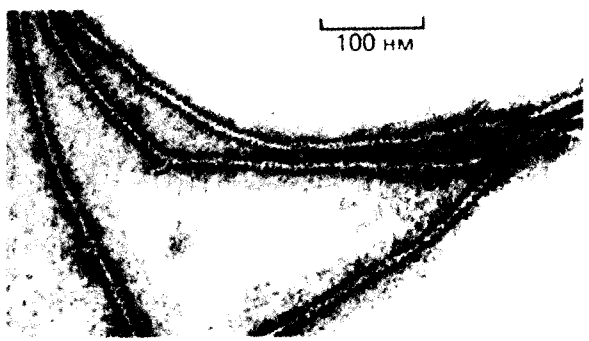


Рис. 23.3

законов оптики распространить и на описание движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

Эта аналогия позволила выделить как самостоятельный раздел ***электронную оптику*** — область физики, в которой изучается структура пучков заряженных частиц, взаимодействующих с электрическими и магнитными полями. Как и обычную оптику, электронную можно подразделить на ***геометрическую*** (лучевую) и ***волновую*** (физическую).

В рамках геометрической электронной оптики возможно, в частности, описание движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях, а также схематическое построение изображения в электронном микроскопе (см. рис. 23.2, *б*).

Подход волновой электронной оптики важен в том случае, когда проявляются волновые свойства заряженных частиц. Хорошей иллюстрацией этому является нахождение разрешающей способности (предела разрешения) электронного микроскопа, приведенное в начале параграфа.

§ 23.3. Волновая функция и ее физический смысл

Так как с микрочастицей сопоставляют волновой процесс, который соответствует ее движению, то состояние частиц в квантовой механике описывается волновой функцией, зависящей от координат и времени: $\psi(x, y, z, t)$. Эта функция аналогична функции s (см. § 5.7), описывающей волновой процесс в механике.

Если силовое поле, действующее на частицу, является стационарным, т. е. не зависящим от времени, то ψ-функцию можно представить в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит от времени, а другой — от координат:

$$\Psi(x, y, z, t) = f(t)\psi(x, y, z). \qquad \textbf{(23.5)}$$

В дальнейшем будем рассматривать только стационарные состояния; ψ-функция координат является вероятностной характеристикой пространственной локализации частицы. Поясним смысл этого утверждения.

Выделим в пространстве достаточно малый объем $dV = dxdydz$, в пределах которого значения ψ-функции можно считать одинаковыми. Вероятность нахождения $dW_в$ частицы в этом объеме пропорциональна объему и определяется, согласно М. Борну, квадратом модуля ψ-функции:

$$dW_в = |\psi|^2 dV. \qquad \textbf{(23.6)}$$

Отсюда следует физический смысл волновой функции:

$$|\psi|^2 = dW_в/dV, \qquad (23.7)$$

т. е. ***квадрат модуля волновой функции равен плотности вероятности, или отношению вероятности нахождения частицы в малом объеме*** dV ***к этому объему***.

Интегрируя выражение (23.6) по некоторому объему V, находим вероятность нахождения частицы в этом объеме:

$$W_в = \int_V |\psi|^2 dV. \qquad (23.8)$$

Отсюда получаем условие нормировки волновой функции в виде $\int |\psi|^2 dV = 1$, где интегрирование ведется по всему бесконечному пространству, вероятность нахождения в котором частицы равна единице.

§ 23.4. Соотношения неопределенностей

Одним из важных положений квантовой механики являются соотношения неопределенностей, предложенные В. Гейзенбергом. Существуют различные пары физических величин (называемые *канонически сопряженными переменными*), которые могут быть одновременно определены лишь с ограниченной точностью.

Пусть одновременно измеряют положение и импульс частицы, при этом неопределенности в измерении координаты и проекции импульса на эту координатную ось, например x, равны соответственно Δx и Δp_x.

В классической физике нет каких-либо ограничений, запрещающих с любой степенью точности одновременно измерить как одну, так и другую величину, т. е. $\Delta x \to 0$ и $\Delta p_x \to 0$.

В квантовой механике положение принципиально иное: Δx и Δp_x, соответствующие одновременному определению x и p_x, связаны зависимостью

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{h}{2\pi}. \qquad (23.9)$$

Таким образом, *чем точнее определена координата* x ($\Delta x \to 0$), *тем менее точно определена соответствующая проекция импульса* p_x ($\Delta p_x \to \infty$), и наоборот. Аналогично для y и z:

$$\Delta y \Delta p_y \geqslant \frac{h}{2\pi};\ \Delta z \Delta p_z \geqslant \frac{h}{2\pi}. \qquad (23.10)$$

Формулы (23.9), (23.10) называют ***соотношениями неопределенностей*** для координат и импульсов. Вычисления, проделанные для электрона, показывают, что его локализация внутри атомного ядра невозможна, т. к. в этом случае неопределенность его скорости должна превысить величину скорости света. Действительно, если $\Delta x \approx 10^{-14}$ м (размер ядра атома), то из (23.9) следует, что величина Δp_x должна превысить $\frac{h}{2\pi\Delta x} = 1{,}06 \cdot 10^{-20}$ Дж/(м · с), следовательно, неопределенность скорости (Δv) электрона $\Delta v \geqslant \frac{\Delta p_x}{m_e} = \frac{1{,}06 \cdot 10^{-20}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1{,}16 \cdot 10^{10}$ м/с, тогда как скорость света равна $3 \cdot 10^8$ м/с.

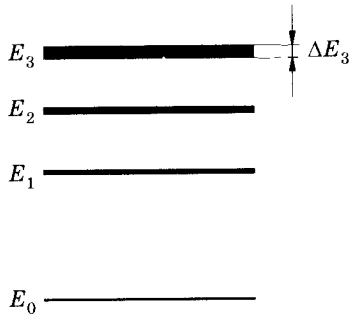


Рис. 23.4

Еще одной парой канонически сопряженных переменных являются энергия частицы E и время t. Соотношение неопределенностей для этих переменных имеет вид

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}, \qquad (23.11)$$

где ΔE — неопределенность энергии некоторого состояния системы, Δt — время его существования. Соотношение (23.11) означает, что чем короче время существования какого-либо состояния системы, тем больше неопределенность значения энергии этого состояния. Энергетические уровни (дискретные значения энергии) E_1, E_2 и т. д. имеют некоторую ширину (рис. 23.4), зависящую от времени пребывания (времени жизни) системы в состояниях, соответствующих этим уровням энергии.

«Размытость» уровней приводит к неопределенности энергии излучаемого фотона (ΔE) и его частоты ($\Delta\nu$) при переходе системы с одного энергетического уровня на другой:

$$\Delta E = \Delta(h\nu) = h\Delta\nu. \qquad (23.12)$$

Это экспериментально проявляется в уширении спектральных линий.

§ 23.5. Уравнение Шредингера. Электрон в потенциальной яме

Так как состояние микрочастицы описывают ψ-функцией, то надо указать способ нахождения этой функции с учетом внешних условий. Это возможно в результате решения основного уравнения

квантовой механики, предложенного Э. Шредингером (1926). Такое уравнение в квантовой механике постулируется так же, как в классической механике постулируется второй закон Ньютона.

Применительно к стационарным состояниям частицы уравнение Шредингера может быть записано так:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_{\text{п}})\psi = 0, \qquad \textbf{(23.13)}$$

где m — масса частицы, E и $E_{\text{п}}$ — ее полная и потенциальная энергии (потенциальная энергия определяется силовым полем, в котором находится частица, и для стационарного случая не зависит от времени).

Если частица перемещается только вдоль некоторой линии, например, вдоль оси OX (одномерный случай), то уравнение Шредингера существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_{\text{п}})\psi = 0. \qquad \textbf{(23.14)}$$

Одним из наиболее простых примеров использования уравнения Шредингера является решение задачи о движении частицы в одномерной «потенциальной яме».

Пусть электрон перемещается вдоль оси OX только в пределах $0 < x < l$ (рис. 23.5). Это означает, что в указанном интервале ψ-функция отлична от нуля, а вне интервала ($x \leqslant 0$, $x \geqslant l$) равна нулю. Так как на частицу в выделенном интервале $0 < x < l$ силовые поля не действуют, то ее потенциальная энергия может иметь любое постоянное значение (наиболее удобно принять $E_{\text{п}} = 0$). Вне этого интервала электрона нет, т. е. электрон не может выйти за пределы интервала, поэтому в области $x \leqslant 0$ и $x \geqslant l$ следует считать его потенциальную энергию бесконечно большой, а волновую функцию равной нулю ($\psi = 0$). На рис. 23.5 показана графическая зависимость $E_{\text{п}} = f(x)$. Интервал $0 < x < l$, удовлетворяющий сформулированным выше условиям, называют ***одномерной прямоугольной потенциальной ямой с бесконечно высокими стенками***. С учетом $E_{\text{п}} = 0$ уравнение Шредингера (23.14) для интервала $0 < x < l$ имеет вид

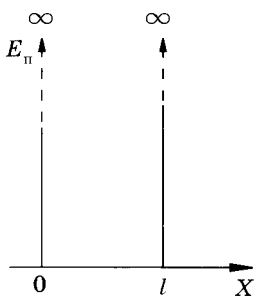


Рис. 23.5

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi = 0. \qquad \textbf{(23.14а)}$$

Произведя замену

$$\omega^2 = 8\pi^2 mE/h^2, \qquad \textbf{(23.15)}$$

получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \omega^2\psi = 0. \qquad \textbf{(23.16)}$$

Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению гармонического колебания (см. § 5.1), решение (5.8) которого запишем в виде

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega x + \varphi_0), \qquad \textbf{(23.17)}$$

где ψ_0 — амплитуда волновой функции, φ_0 — ее начальная фаза.

Чтобы найти две постоянные ψ_0 и φ_0, а также возможные значения ω или E, рассмотрим граничные условия с учетом непрерывности волновой функции ψ на границах интервала:

1) при $x = 0$, $\psi = 0$;

2) при $x = l$, $\psi = 0$.

Подставляя эти значения в (23.17), получаем $0 = \psi_0 \cos(0 + \varphi_0) = \psi_0 \cos\varphi_0$. Физический смысл здесь имеет только одно значение: $\cos\varphi_0 = 0$, откуда $\varphi_0 = \pi/2$.

С учетом $\varphi_0 = \pi/2$ из (23.17) имеем $0 = \psi_0 \cos(\omega l + \pi/2)$. Физический смысл здесь имеет только одно значение: $\cos(\omega l + \pi/2) = 0$, или $\omega l + \pi/2 = (2n + 1)(\pi/2)$, откуда

$$\omega = n\pi/l, \qquad \textbf{(23.18)}$$

где n — целое число, оно принимает значения 1, 2, 3, ...; $n \neq 0$, так как в противном случае $\psi = 0$ при любом x, что означает отсутствие электрона в потенциальной яме. Число n называют ***квантовым числом***. Из (23.15) находим энергию $E = \frac{h^2\omega^2}{8\pi^2 m}$, что с учетом (23. 18) дает

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2}n^2. \qquad \textbf{(23.19)}$$

Индекс n при E показывает, что различным значениям квантового числа n соответствует и разная энергия.

Подставляя ω из (23.18) в (23.17) и учитывая $\varphi_0 = \pi/2$, получаем

$$\psi = \psi_0 \cos(nx\pi/l + \pi/2) = \psi_0 \cos[\pi(xn/l + 1/2)]. \qquad \textbf{(23.20)}$$

Проанализируем выражения (23.19) и (23.20). Прежде всего примечательно, что решение уравнения Шредингера для электрона в потенциальной яме без каких-либо дополнительных постулатов приводит к *дискретным, квантованным* значениям энергии:

$$E_1 = \frac{h^2}{8ml^2},\ E_2 = \frac{h^2}{8ml^2}4 \text{ и т. д.}$$

Энергетические уровни E_1, E_2, E_3, E_4, соответствующие разным состояниям электрона, схематически показаны на рис. 23.6. Вычислим разность энергий соседних уровней $n + 1$ и n:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2(n+1)^2}{8ml^2} - \frac{h^2n^2}{8ml^2} =$$

$$= \frac{h^2(n^2 + 2n + 1 - n^2)}{8ml^2} = \frac{h^2(2n+1)}{8ml^2}. \qquad \textbf{(23.21)}$$

Из (23.21) видно, что при некотором фиксированном значении n дискретность, т. е. различие энергий соседних уровней тем меньше, чем больше размеры потенциальной ямы. Так, например, рассмотри два случая при $n = 1$:

1) $l = 5 \cdot 10^{-10}$ м, что примерно соответствует размерам атома; тогда $\Delta E = 4{,}5$ эВ. Это по порядку величины совпадает со значениями, полученными для атома водорода по теории Бора (см. § 23.7);

2) $l = 10^{-1}$ м, что фактически соответствует такой ширине потенциальной ямы, что электрон можно считать свободной классической частицей; при этом $\Delta E = 1{,}1 \cdot 10^{-16}$ эВ. Здесь дискретность ничтожна, и практически можно считать, что энергия электрона изменяется непрерывно.

Возведя (23.20) в квадрат, получим плотность вероятности $|\psi|^2$ нахождения электрона в разных точках потенциальной ямы. На рис. 23.7 показана графическая зависимость $|\psi|^2$ от x при разных дискретных состояниях, т. е. разных квантовых числах. Как видно из рисунка, электрон может с разной вероятностью находиться в разных местах потенциальной ямы. Есть такие точки, в которых вероятность нахождения электрона вообще равна нулю. Это существенно отличается от представлений классической физики, согласно которым нахождение частицы в разных местах потенциальной ямы равновероятно (рис. 23.8), т. е. невозможно разделение ямы точками, в которых исключено нахождение частицы.

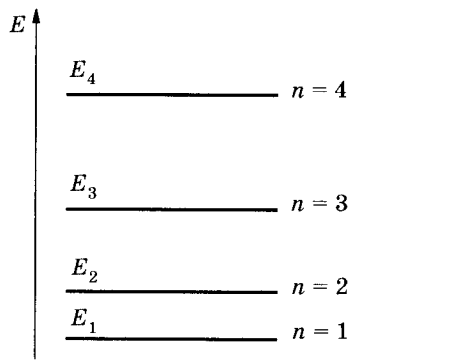


Рис. 23.6

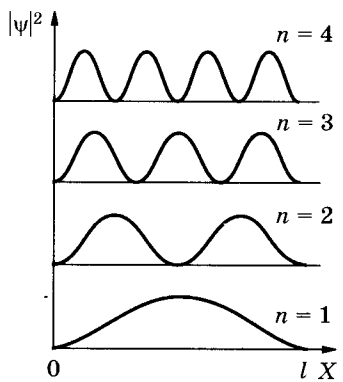


Рис. 23.7

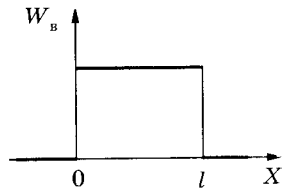


Рис. 23.8

Уравнение Шредингера можно применить и к более сложным силовым полям, например, к электрону в атоме. Это приведет к дополнительным математическим трудностям, но не изменит основных особенностей атомных систем: дискретности энергетических состояний, вероятностных суждений о нахождении электрона, своеобразной зависимости $|\psi|^2$ от координат и т. д.

§ 23.6. Применение уравнения Шредингера к атому водорода. Квантовые числа

Описание состояний атомов и молекул с помощью уравнения Шредингера является достаточно сложной задачей. Наиболее просто она решается для одного электрона, находящегося в поле ядра. Такие системы соответствуют атому водорода и водородоподобным ионам (однократно ионизированный атом гелия, двукратно ионизированный атом лития и т. п.). Однако и в этом случае решение задачи выходит за рамки нашего курса, поэтому ограничимся лишь качественным изложением вопроса.

Прежде всего в уравнение Шредингера (23.13) следует подставить потенциальную энергию, которая для двух взаимодействующих точечных зарядов $-e$ (электрон) и Ze (ядро), находящихся на расстоянии r в вакууме, выражается следующим образом:

$$E_{\text{п}} = \frac{(-e)Ze}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad \textbf{(23.22)}$$

При центральной симметрии поля, созданного ядром, удобнее решать задачу не в декартовых прямоугольных координатах, а в сферических r, θ и φ.

Решение уравнения Шредингера находят в виде произведения функций:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f_1(r)f_2(\theta)f_3(\varphi). \qquad \textbf{(23.23)}$$

Аналогично тому, как для электрона в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками граничные условия привели к конкретным возможным значениям функции ψ и энергии $E_п$, так и в потенциальной яме, соответствующей атому водорода, физические условия приводят к определенным типам функций f_1, f_2, f_3 и, следовательно, ψ-функции. Здесь также проявляется главная особенность квантово-механических систем — дискретность физических величин.

Дискретность математически проявляется в том, что любой из функций, являющейся решением уравнения Шредингера с заданными граничными условиями и потенциальной энергии $E_п$, соответствует набор (спектр) целочисленных значений параметров, каждому из которых отвечает так называемое квантовое число. В отличие от прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками состояние электрона в атоме водорода характеризуется не одним, а несколькими квантовыми числами. Решением уравнения Шредингера вводятся три квантовые числа: n, l, m_l. В общем случае ***квантовыми числами*** называют целые (0, ±1, ±2, ...) или полуцелые ($\pm^1/_2$, $\pm^3/_2$, $\pm^5/_2$, ...) числа, определяющие возможные дискретные значения физических величин, которые характеризуют квантовые системы.

Первое из них — ***главное квантовое число n*** = 1, 2, 3, ... Оно определяет уровни энергии электрона в атоме водорода ($z = 1$) или водородоподобных ионах:

$$E_п = -\frac{me^4Z^2}{8\varepsilon_0^2h^2n^2}. \qquad (23.24)$$

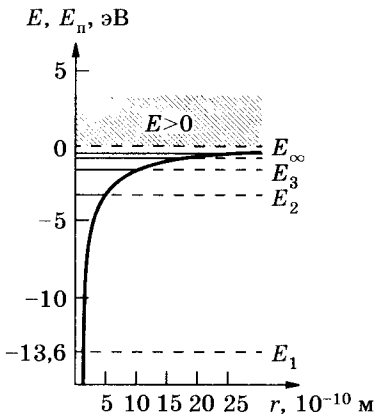


Рис. 23.9

Это выражение вытекает из решения уравнения Шредингера и полностью совпадает с соответствующей формулой теории Бора (см. § 23.7).

На рис. 23.9 штриховыми прямыми показаны уровни возможных значений полной энергии E электронов в атоме водорода (E_1, E_2, E_3 и т. д.) и график зависимости потенциальной энергии $E_п$ от расстояния r между электроном и ядром [см. (23.22)]. С возрастанием главного квантового числа n увеличивается r [см., например, (23.33)],

а полная [см. (23.24)] и потенциальная энергии стремятся к нулю. Кинетическая энергия также стремится к нулю. Заштрихованная область ($E > 0$) — непрерывный спектр значений энергии — соответствует состоянию свободного электрона.

Второе квантовое число — ***орбитальное квантовое число l***, которое при данном n может принимать значения 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Это число характеризует орбитальный момент импульса L_l электрона относительно ядра:

$$L_l = \frac{h}{2\pi}\sqrt{l(l+1)}. \qquad (23.25)$$

Третье квантовое число — ***магнитное квантовое число m_l***, которое при данном l принимает значения 0, ±1, ±2, ..., ±l, всего $2l + 1$ значений. Это число определяет проекции орбитального момента импульса электрона на некоторое произвольно выбранное направление Z (или направление внешнего магнитного поля):

$$L_{lz} = \frac{h}{2\pi}m_l. \qquad (23.26)$$

Четвертое квантовое число — ***спиновое (магнитное спиновое)***[1] ***квантовое число m_s***. Оно может принимать только два значения ($\pm^1/_2$) и характеризует возможные значения проекции на ось Z спина (собственного механического момента) электрона:

$$L_{sz} = \frac{h}{2\pi}m_s. \qquad (23.27)$$

Состояния электрона в атоме с заданными n и l обозначают следующим образом: 1s, 2s, 2p, 3s и т. д. Здесь цифра указывает значение главного квантового числа, а буква — орбитальное квантовое число: символам s, p, d, f, ... соответствуют значения $l = 0$, 1, 2, 3 и т. д. (табл. 30).

Число состояний с заданными n и l равно $2(2l + 1)$. Чтобы найти общее число состояний, имеющих одинаковое главное квантовое число, просуммируем $2(2l + 1)$ по всем возможным значениям l от $l = 0$ до $l = n - 1$:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2. \qquad (23.28)$$

[1] Наличие спина у частиц и спинового квантового числа не следует из уравнения Шредингера.

Таким образом, первому уровню энергии атома водорода соответствуют два состояния электрона, второму — 8, третьему — 18 и т. д. (см. табл. 30).

Наглядное представление о нахождении электрона в атоме дает фотомодель электронного облака (рис. 23.10). Снимки выполнены на модели со светящейся лампочкой. Рассчитав плотности вероятности $|\psi|^2$ нахождения электрона в атоме в состояниях с разными значениями n, l и m_l, лампочку перемещали в соответствии с этим расчетом: больше времени она находилась в местах с большей плотностью вероятности, менее длительно — в местах с меньшей плотностью вероятности. В результате экспозиции на фотопленке получились места разной освещенности, которые иллюстрируют распределение вероятности нахождения электрона в атоме. Из рисунков видно, сколь условно и даже неверно понятие «орбита» применительно к движению электрона.

Спиновый и орбитальный магнитные моменты взаимодействуют между собой, это изменяет систему энергетических уровней атома по сравнению с той, которая была бы без такого взаимодействия. Спин-орбитальное взаимодействие приводит к расщеплению энергетических уровней и тонкой структуре спектральных линий излучения. Если это расщепление уровней существенно, то необходимо учитывать полный момент импульса электрона — орбитальный плюс спиновый. При этом вместо m_l и m_s используют другие квантовые числа: j и m_j.

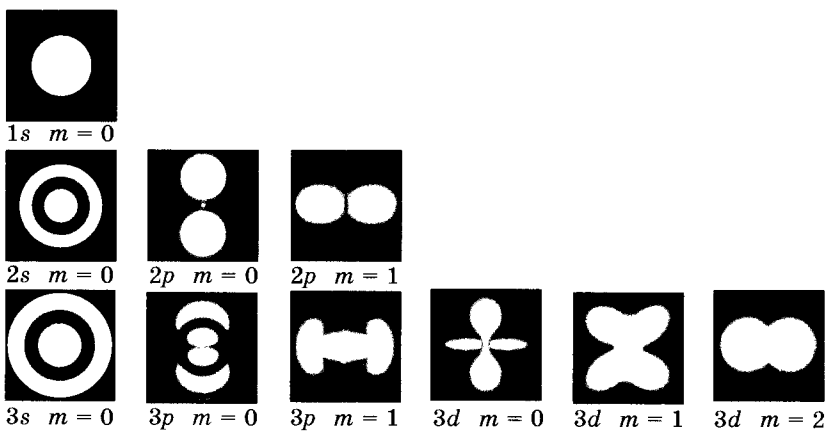


Рис. 23.10

Квантовое число j определяет дискретные значения полного момента импульса L_j электрона:

$$L_j = \frac{h}{2\pi}\sqrt{j(j+1)}. \qquad (23.29)$$

При заданном l квантовое число j принимает два значения: $j = l \pm {}^1/_2$.

Таблица 30

Символ состояния	Значения квантовых чисел			
	n	l	m_l	m_s
1s	1	0	0	$\pm{}^1/_2$
2s	2	0	0	$\pm{}^1/_2$
2p	2	1	0	$\pm{}^1/_2$
2p	2	1	1	$\pm{}^1/_2$
2p	2	1	−1	$\pm{}^1/_2$
3s	3	0	0	$\pm{}^1/_2$
3p	3	1	0	$\pm{}^1/_2$
3p	3	1	1	$\pm{}^1/_2$
3p	3	1	−1	$\pm{}^1/_2$
3d	3	2	0	$\pm{}^1/_2$
3d	3	2	1	$\pm{}^1/_2$
3d	3	2	−1	$\pm{}^1/_2$
3d	3	2	2	$\pm{}^1/_2$
3d	3	2	−2	$\pm{}^1/_2$

Магнитное квантовое число m_j характеризует возможные проекции полного момента импульса электрона L_j на некоторое произвольно выбранное направление Z, либо направление внешнего магнитного поля:

$$L_{jz} = \frac{h}{2\pi}m_j. \qquad (23.30)$$

При заданном j квантовое число m_j принимает $2j + 1$ значений: $-j, -j + 1, \ldots, +j$.

§ 23.7. Понятие о теории Бора

Еще до создания квантовой механики датский физик Н. Бор в 1913 г. предложил теорию атома водорода и водородоподобных ионов, которая основывалась на планетарной модели атома и двух постулатах. Постулаты Бора не укладывались в рамки классической физики.

Согласно первому постулату, атом и атомные системы могут длительно пребывать только в определенных стационарных состояниях. Находясь в таких состояниях, атом не излучает и не поглощает энергии. Стационарным состояниям соответствуют дискретные значения энергии: E_1, E_2, ...

Любое изменение энергии атома или атомной системы связано со скачкообразным переходом из одного стационарного состояния в другое.

По второму постулату, при переходе атома из одного состояния в другое атом испускает или поглощает фотон частоты ν, энергия которого определяется разностью энергий E_i, E_k атомных состояний:

$$h\nu = E_i - E_k. \qquad (23.31)$$

Переход из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией сопровождается излучением фотона. Обратный процесс происходит при поглощении фотона.

Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода вращается по круговой орбите вокруг ядра. Из всех возможных орбит стационарные состояния соответствуют только тем, для которых момент импульса (орбитальный механический момент) равен целому числу $\frac{h}{2\pi}$:

$$mv_n r_n = \frac{h}{2\pi} n;\ n = 1, 2, 3 \ldots, \qquad (23.32)$$

где m — масса электрона, v_n — его скорость на n-й орбите, r_n — ее радиус.

На электрон, вращающийся по круговой орбите в атоме (ионе), действует кулоновская сила притяжения со стороны положительно заряженного ядра, которая, по второму закону Ньютона, равна произведению массы электрона на центростремительное ускорение (запись дана для вакуума):

$$\frac{Ze \cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n}, \qquad (23.33)$$

где e — заряд электрона, Ze — заряд ядра. Для водорода $Z = 1$, для водородоподобных ионов $Z > 1$. Исключая v_n из (23.32) и (23.33), получаем

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi Z e^2 m}. \qquad (23.34)$$

Используя (23.33), находим кинетическую энергию электрона:

$$E_к = \frac{mv_n^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}, \qquad (23.35)$$

а сумма кинетической (23.35) и потенциальной (23.22) энергий дает полную энергию электрона:

$$E = E_к + E_п = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}. \qquad (23.36)$$

Подставляя выражение (23.34) в (23.36), получаем дискретные значения энергии $E_n = -\frac{me^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$, как в квантово-механическом описании атомов (23.24).

На основании второго постулата (23.31) и формулы (23.24) Бор получил формулу (24.14), объясняющую сериальные закономерности спектра атома водорода и водородоподобных ионов (см. § 24.3).

Теория Бора в свое время явилась триумфом развития атомной физики. Впервые, хотя и для простейшей атомной системы (один электрон вращается вокруг ядра), были раскрыты закономерности спектров.

Несмотря на большой успех теории Бора, скоро стали заметны и ее недостатки. Так, в рамках этой теории не удалось объяснить различия интенсивностей спектральных линий, т. е. ответить на вопрос, почему одни переходы между энергетическими уровнями более вероятны, чем другие. Теория Бора не раскрыла спектральных закономерностей более сложных атомных систем, в частности, атома гелия (с двумя электронами, вращающимися вокруг ядра).

Недостатком теории Бора была ее внутренняя противоречивость. Эта теория объединяла в себе положения принципиально отличных теорий: классической и квантовой физики. Так, например, в соответствии с теорией Бора считается, что электрон в атоме движется по определенным орбитам (классические представления), но при этом не излучает и не поглощает электромагнитной энергии (противоречит классической электродинамике).

В первой четверти двадцатого века стало ясно, что теория Бора должна быть заменена другой теорией атома, в связи с чем и появилась квантовая механика.

§ 23.8. Электронные оболочки сложных атомов

Квантовые числа, описывающие состояние электрона в атоме водорода, используют для приближенной характеристики состояния отдельных электронов сложных атомов. Однако при этом сле-

дует учитывать по крайней мере два существенных отличия сложных атомов от атома водорода: 1) в сложных атомах энергия электронов из-за их взаимодействия зависит не только от n, но и от l; 2) распределение электронов по энергетическим уровням обусловлено принципом Паули, согласно которому в атоме не может быть двух (и более) электронов с четырьмя одинаковыми квантовыми числами.

При образовании электронной конфигурации, соответствующей невозбужденному состоянию атома, каждый электрон стремится иметь наименьшую энергию. Если бы не принцип Паули, то все электроны расположились бы на самом нижнем энергетическом уровне. В действительности электроны последовательно заполняют состояния, которые указаны для атома водорода в табл. 30 (за некоторыми исключениями).

Электроны с одинаковым главным квантовым числом образуют слой. Слои обозначают буквами K, L, M, N и т. д. в соответствии с $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Электроны, имеющие одинаковые пары значений n и l, входят в состав оболочки, которая кратко обозначается так же, как соответствующие состояния для электрона атома водорода: $1s$, $2s$, $2p$ и т. д. Так, например, называют $2s$-оболочка, $2s$-электроны и т. п.

Число электронов в оболочке обозначают справа вверху около символической записи оболочки, например $2p^4$.

Распределение электронов по оболочкам в атоме (электронные конфигурации) обычно указывают следующим образом: для азота ($Z = 7$) — $1s^2$, $2s^2$, $2p^3$; для кальция ($Z = 20$) — $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$, $4s^2$ и т. д.

Так как энергия электронов сложных атомов зависит не только от n, но и от l, то построение таблицы Менделеева не всегда происходит постепенным заполнением слоев по мере усложнения атома. У калия ($Z = 19$), например, вместо заполнения слоя M (что соответствовало бы конфигурации $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$, $3d^1$) начинается заполнение слоя N и создается следующая электронная конфигурация: $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^2$, $3p^6$, $4s^1$. Аналогичные отклонения от «регулярного» заполнения слоев имеются и у некоторых других элементов.

Всегда выполняется общее правило: электроны невозбужденного атома занимают состояние с наименьшей энергией и в соответствии с принципом Паули. На рис. 23.11 схематически без соблюдения масштаба показаны энергетические состояния и уровни сложного атома и соответствующее им число электронов.

В заключение отметим, что состояние многоэлектронного атома в целом определяется следующими квантовыми числами: L — квантовым числом полного орбитального момента атома[1], которое принимает значения 0, 1, 2, 3 и т. д.; J — квантовым числом полного момента атома, которое может принимать значения с интервалом в единицу от $|L - S|$ до $L + S$; S — квантовым числом результирующего спинового момента атома; магнитным квантовым числом m_j, которое определяет дискретные значения проекции полного момента импульса атома L_A на некоторую ось Z:

$$L_{Az} = \frac{h}{2\pi} m_j. \qquad \textbf{(23.37)}$$

При заданном J квантовое число m_j принимает $2J + 1$ значений: $-J$, $-J + 1$, ..., $+J$.

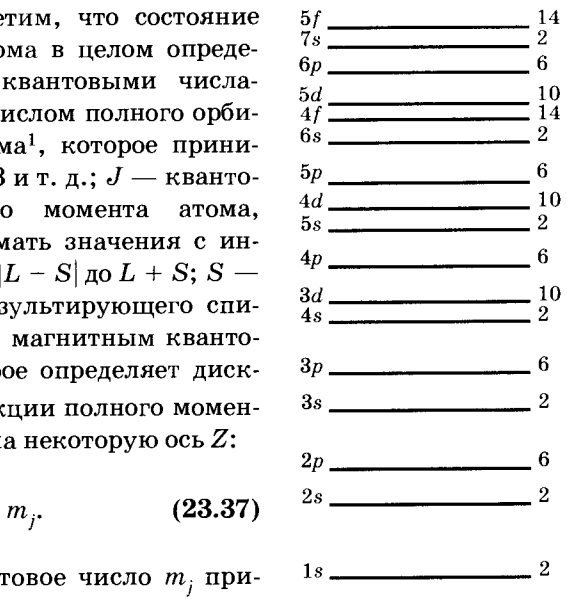


Рис. 23.11

§ 23.9. Энергетические уровни молекул

Энергетические уровни молекул имеют более сложное строение, чем у атомов. Это вызвано тем, что в молекуле, кроме движения электронов относительно ядер, происходит колебательное движение атомов около их положения равновесия (колебание ядер вместе с окружающими их электронами) и вращательное движение молекулы как целого.

Электронному, колебательному и вращательному движениям молекулы соответствуют три типа уровней энергии: $E_{эл}$, $E_{кол}$ и $E_{вр}$.

Согласно квантовой механике, энергия всех видов движения в молекуле принимает только дискретные значения (квантуется). Полная энергия E молекулы может быть представлена суммой квантованных значений энергии разных видов:

$$E = E_{эл} + E_{кол} + E_{вр}. \qquad \textbf{(23.38)}$$

[1] Не следует смешивать это обозначение с названием электронного слоя L и с символом полного момента импульса электрона.

На рис. 23.12 схематически изображена система уровней молекулы: далеко отстоящие электронные уровни энергии a' и a'', для которых $E_{кол} = E_{вр} = 0$; более близко расположенные колебательные уровни v' и v'', для которых $E_{вр} = 0$; наиболее тесно расположенные вращательные уровни J' и J'' с различными значениями $E_{вр}$.

«Расстояние» между электронными уровнями энергии примерно 1—10 эВ, между соседними колебательными уровнями — 10^{-2}—10^{-1} эВ, между соседними вращательными уровнями — 10^{-5}—10^{-3} эВ.

Квантование колебательной энергии двухатомной молекулы можно объяснить, если рассматривать молекулу как *гармонический осциллятор*. Допустим, что атомы сопротивляются смещению из положения равновесия с силой $\vec{F}$, пропорциональной величине смещения x, тогда, следуя закону Гука (см. § 5.1), можно написать выражение для частоты колебаний двухатомного осциллятора (вибратора)

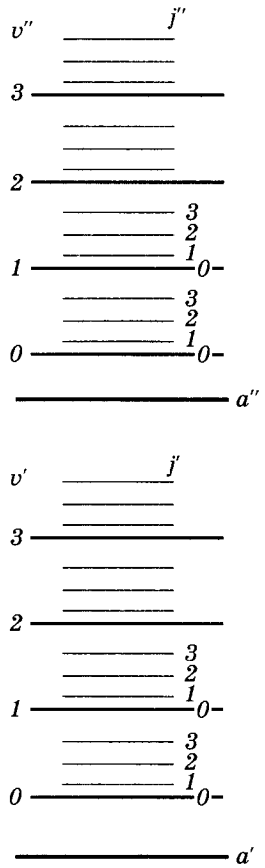


Рис. 23.12

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (23.39)$$

где k — является мерой «упругости», или силы химической связи между атомами. Чем выше упругость или меньше масса атомов, тем выше частота колебаний.

На основании (5.25) можно написать выражение для потенциальной энергии осциллятора

$$E_п = \frac{k(r - r_0)^2}{2}, \qquad (23.40)$$

где $(r - r_0)$ — смещение относительно положения равновесия. Подставив (23.40) в уравнение Шредингера (23.14), получим

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E - \frac{k(r - r_0)^2}{2}\right]\psi = 0. \qquad (23.41)$$

Решение уравнения (23.41) дает выражение для полной энергии колебаний $E_{кол}$

$$E_{кол} = h\nu\left(v + \frac{1}{2}\right). \qquad (23.42)$$

Величина v — колебательное квантовое число, которое может принимать значения 0, 1, 2, ... и т. д.

При аппроксимации двухатомной молекулы моделью гармонического осциллятора график зависимости потенциальной энергии (23.40) от межатомного расстояния (рис. 23.13) представляет собой параболу с равноотстоящими уровнями колебательной энергии. Горизонтальные кривые соответствуют $E_{кол}$ — полной энергии (кинетическая плюс потенциальная) вибратора на колебательных уровнях, характеризуемых значениями $v = 0, 1, 2$ и т. д.

Интересно, что даже на нижнем колебательном уровне ($v = 0$) в точке $r = r_0$, соответствующей положению равновесия, молекула обладает половиной кванта колебательной энергии (см. рис. 23.14). Для молекулярного водорода это составляет 0,269 эВ. Молекула сохраняет такую колебательную энергию даже при абсолютном нуле.

Рассмотрим молекулу с колебательным уровнем $v = 2$ и первоначально находящуюся в состоянии сжатия (в точке C, межъядерное расстояние r_C). Тогда вся энергия будет потенциальной, и кинетическая энергия осциллятора равна нулю. Такая молекула может колебаться между точками C и C'. В точке $r = r_0$ кинетическая энергия будет достигать максимума, а потенциальная будет равняться нулю.

Используя приближение классического осциллятора, можно предсказать, что максимальное смещение при колебательном движении соответствует двум точкам поворота C и C' и что осциллятор должен находиться большую часть времени вблизи этих точек. Квантовая механика также предсказывает значения наибольшей плотности вероятности нахождения атомов в областях вблизи точек поворота, но значительно смещенных к центру (межъядерное расстояние r_1). Это показано на рис. 23.13, где распределение плотности вероятности $|\psi|^2$ представлено для колебательных уров-

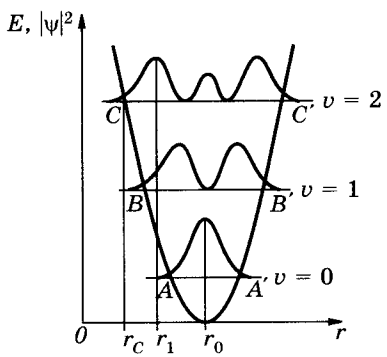


Рис. 23.13

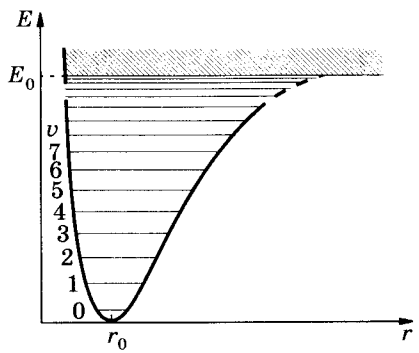


Рис. 23.14

ней двухатомной молекулы в зависимости от расстояния r между атомами молекулярного гармонического осциллятора. Вместо простой классической картины с двумя максимумами вероятности (в точках A и A', B и B', C и C') рис. 23.13 дает $v + 1$ максимумов. При этом на нижнем колебательном уровне наиболее вероятно нахождение молекулы в положении r_0, а на более высоких уровнях — ближе к областям точек поворота.

Модель гармонического осциллятора удовлетворительно описывает колебание двухатомной молекулы лишь при небольших смещениях $r - r_0$, тогда как разрыв химических связей происходит при значительных смещениях ядер. Реальные кривые потенциальной энергии асимметричны, как это показано на рис. 23.14 на примере молекулы водорода. Гармонический осциллятор предсказывает серию равноотстоящих уровней колебательной энергии, однако в действительности (при асимметрии потенциальной кривой) уровни сгущаются с ростом v. В пределе, когда энергия колебаний становится равной энергии связи, дискретные уровни сливаются, и для энергий, превышающих энергию связи, получается сплошной спектр значений. Это означает, что при таких энергиях связь разрывается и атомы разлетаются с определенной относительной скоростью, соответствующей данному значению энергии в области сплошного спектра.

Существенный результат квантово-механических расчетов заключается в том, что в самом нижнем колебательном состоянии ($v = 0$) осциллятор обладает энергией так называемых нулевых колебаний $\frac{h\nu}{2}$. Классическое же решение задачи допускает решения, соответствующие покоящемуся осциллятору с энергией, равной нулю: такое состояние отвечало бы наличию определенной координаты r_0 и определенной скорости, равной нулю, что противоречит соотношениям неопределенностей.

В биологии и медицине особенно важны представления об энергетических состояниях сложных органических молекул, содержащих двойные ковалентные связи между атомами углерода.

Одинарную связь между атомами углерода образуют σ-электроны (σ-связь), в ее формировании участвуют два электрона с противоположными спинами (спаренные электроны). Они формируют единое вытянутое электронное облако, симметричное относительно прямой, соединяющей центры атомов. На рис. 23.15, *а* показаны σ-связи между атомами углерода в *n*-гексане. Области перекрывания заштрихованы, они находятся в промежутках между атомами, σ-орбитали соседних одинарных связей не перекрываются друг с другом.

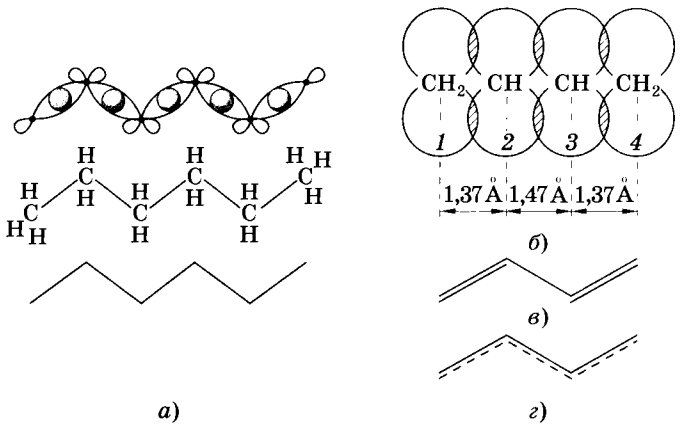


Рис. 23.15

При возникновении между атомами углерода второй связи происходит перекрывание орбиталей еще двух электронов (*p*-орбиталей) соседних углеродных атомов. Их электронные облака имеют в сечении вид восьмерки, ось которой перпендикулярна направлению σ-связи. Боковое перекрывание этих орбиталей в двух областях приводит к образованию молекулярной π-орбитали (рис. 23.15, *б*), соответственно электроны, формирующие π-орбиталь, называют π-электронами. Плотность образовавшегося облака π-электронов сосредоточена по обеим сторонам от линии σ-связи. Она максимальна на расстоянии примерно 1 Å (10^{-10} м) от линии σ-связи и обращается в нуль вблизи ядер атомов. Если двойные связи разделены одной одинарной (сопряжены), то происходит перекрывание π-орбиталей всех атомов углерода, участвующих в образовании цепочки сопряженных связей. На рис. 23.15, *б* показаны перекрывающиеся π-орбитали атомов углерода в молекуле бутадиена, одинарные σ-связи условно изображены прямыми линиями, соединяющими атомы углерода. Данные о длине связей в молекуле бутадиена указывают на то, что при сопряжении двойных связей нет обычных двойных (длина связи 1,33 Å) или одинарных (1,54 Å) связей, связи являются примерно полуторными. Поэтому, хотя в органической химии и принято изображать систему сопряженных двойных связей, как показано на рис. 23.15, *в*, более точно ситуацию отображает рис. 23.15, *г*. Каждый электрон, участвующий в образовании двойной связи, оказывается принадлежащим не какой-то определенной паре атомов углерода, а сразу всей цепочке атомов, связанных сопряженными связями. Такие π-электроны делокализованы по всей це-

почке и могут свободно по ней перемещаться подобно электронам проводимости в металле, но не могут ее покинуть. Другими словами электроны π-орбиталей находятся в потенциальной яме. Можно показать, что энергия этих электронов квантована, подобно энергии электронов в атоме.

Представим, что сопряженная цепь состоит из N звеньев, включающих по одной двойной и одной одинарной связи, тогда общая длина цепи равна

$$l = NL, \qquad \textbf{(23.43)}$$

где L — длина одного звена. Квантование энергий π-орбиталей является следствием волновых свойств электронов (23.2). Электрон (волна) перемещается по потенциальной яме длиной l со скоростью υ, не выходя за ее пределы. Внутри ямы вся энергия электрона кинетическая, на краях ямы — потенциальная. Волна будет устойчива, если внутри ямы укладывается целое число n полуволн, т. е. если волна будет стоячей с узлами на стенках

$$l = \frac{n\lambda}{2}, \qquad \textbf{(23.44)}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ и т. д. Подставив λ из формулы для длины волны де Бройля (23.2) в (23.44), находим возможные значения скорости электрона

$$\upsilon = \frac{h}{m\lambda} = \frac{nh}{2ml},$$

при этом его кинетическая энергия равна

$$E_n = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{n^2h^2}{8ml^2}. \qquad \textbf{(23.45)}$$

Видно, что формула (23.45) совпадает с (23.19), полученной при решении уравнения Шредингера для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Таким образом, энергия π-орбиталей квантована и может иметь только дискретные значения $\frac{h^2}{8ml^2}$, $\frac{4h^2}{8ml^2}$, $\frac{9h^2}{8ml^2}$, ... Согласно принципу Паули на каждом уровне энергии могут находиться только два электрона с противоположными спинами. Следовательно, в основном (невозбужденном) состоянии $2N$ электронов π-орбиталей N-членной цепи занимают N уровней с наименьшими значениями энергии от $\frac{h^2}{8ml^2}$ до $\frac{N^2h^2}{8ml^2}$. Молекулярные орбитали с энергиями $\frac{(N+1)^2h^2}{8ml^2}$ и выше в основном состоянии молекулы будут оставаться свободными.

При поглощении квантов света может произойти переход какого-либо электрона с заполненного на свободный уровень. Молекула при этом оказывается в электронно-возбужденном состоянии. Кванты оптического (ультрафиолетового или видимого) излучения способны обычно вызывать электронные переходы только с верхнего заполненного ($n = N$) на нижний ($n = N + 1$) или следующий ($n = N + 2$) свободные уровни. Поэтому в оптической спектроскопии на схемах молекулярных энергетических уровней (рис. 23.16) изображают только верхний заполненный и нижние свободные уровни, тогда как нижние заполненные уровни не приводят совсем.

На рис. 23.16 представлена *схема Яблонского* энергетических уровней молекул с сопряженными связями, жирными горизонтальными линиями показаны электронные уровни, тонкими — колебательные, вращательные уровни не приведены. Рядом с уровнями в прямоугольных рамках схематически представлены основные и возбужденные состояния молекулы, стрелками показано направление спинов электронов. Состояния молекул, при которых спины имеют противоположное направление и сумма спиновых квантовых чисел равна нулю, называются синглетными и обозначаются буквами S с индексом внизу. Верхний заполненный уровень обозначают S_0, а свободные — S_1, S_2 и т. д. В электронно-возбужденных молекулах у электронов на уровнях S_1, S_2 и т. д. может произойти обращение спина, тогда молекула оказывается в триплетном возбужденном состоянии, обозначаемом T_1, T_2 и т. д. Сумма

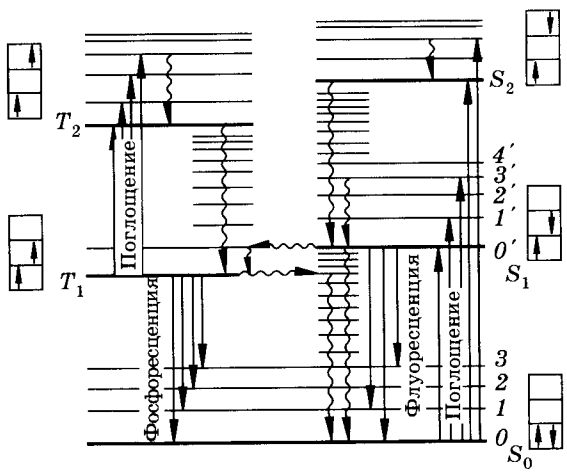


Рис. 23.16

спиновых квантовых чисел молекул в триплетных состояниях равна единице[1]. Каждому возбужденному синглетному уровню соответствует один триплетный. По принципу Паули уровень T_0, соответствующий S_0, не существует, т. е. невозбужденная молекула не может быть в триплетном состоянии. Переходы между молекулярными энергетическими уровнями будут обсуждаться в главе 24.

ГЛАВА 24

Излучение и поглощение энергии атомами и молекулами

Огромное количество разных явлений происходит потому, что изменяется энергия атомов и молекул. Во многих случаях эффективное использование явления для практики оказывается возможным только с непременным учетом его молекулярной (атомной) природы.

В этой главе излагаются особенности излучения и поглощения энергии атомами и молекулами, а также некоторые практически важные явления, знание молекулярной природы которых существенно для их использования. Некоторые вопросы этой обширной темы рассматриваются в следующей главе.

§ 24.1. Поглощение света

Интенсивность света, распространяющегося в среде, может уменьшаться из-за поглощения и рассеяния его молекулами (атомами) вещества.

Поглощением света называют ослабление интенсивности света при прохождении через любое вещество вследствие превращения световой энергии в другие виды энергии.

[1] Так как результирующий спиновый момент равен единице, то в магнитном поле происходит расщепление энергетического уровня на три (см. § 25.1), отсюда и термин «триплетный» уровень. Триплетные состояния молекул были открыты А. Н. Терениным в 1943 г.

Поглощение кванта света происходит при его неупругом столкновении с молекулой (атомом), приводящем к передаче энергии фотона веществу, и является случайным событием. Вероятность поглощения кванта света образцом вещества толщиной l (рис. 24.1) оценивается величиной коэффициента поглощения $1 - T$, равного отношению интенсивностей поглощенного света $I_п = I_0 - I$ к интенсивности падающего I_0

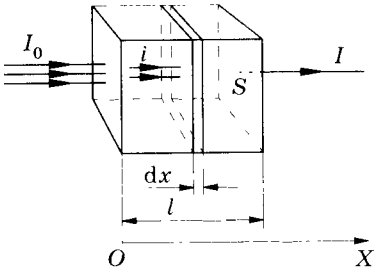


Рис. 24.1

$$1 - T = \frac{I_0 - I}{I_0}, \tag{24.1}$$

где I — интенсивность прошедшего света, $T = \frac{I}{I_0}$ — коэффициент пропускания.

Выведем закон поглощения света веществом. Выделим тонкий слой вещества dx, перпендикулярный пучку монохроматического света интенсивностью i ($I_0 \geqslant i \geqslant I$), и будем исходить из предположения, что ослабление света (доля поглощенных квантов) $-\mathrm{d}i/i$ таким слоем не зависит от интенсивности (если интенсивность не слишком велика), а определяется только толщиной слоя dx и коэффициентом пропорциональности k_λ:

$$-\mathrm{d}i/i = k_\lambda \mathrm{d}x. \tag{24.2}$$

Коэффициент k_λ различен для разных длин волн и его величина зависит от природы вещества. Интегрируя (24.2) и подставив пределы интегрирования для x от 0 до l и для i от I_0 до I, получаем

$$\int_{I_0}^{I} \frac{\mathrm{d}i}{i} = -k_\lambda \int_0^l \mathrm{d}x \text{ или } \ln \frac{I}{I_0} = -k_\lambda l,$$

откуда, потенцируя, имеем

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-k_\lambda l}. \tag{24.3}$$

Эта формула выражает ***закон поглощения света Бугера***. Коэффициент k_λ называют натуральным показателем поглощения, его величина обратна расстоянию, на котором интенсивность света ослабляется в результате поглощения в среде в e раз.

Так как поглощение света обусловлено взаимодействием с молекулами (атомами), то закон поглощения можно связать с некоторыми характеристиками молекул. Пусть n — концентрация молекул (число молекул в единице объема), поглощающих кванты света. Обозначим буквой s эффективное сечение поглощения

молекулы — некоторую площадь, при попадании фотона в которую происходит его захват молекулой. Другими словами молекулу можно представить как мишень определенной площади.

Если считать, что площадь сечения прямоугольного параллелепипеда (рис. 24.1) равна S, то объем выделенного слоя $S\mathrm{d}x$, а количество молекул в нем $nS\mathrm{d}x$; суммарное эффективное сечение всех молекул в этом слое будет $snS\mathrm{d}x$. Доля площади поперечного сечения поглощения всех молекул в общей площади сечения

$$\frac{snS\mathrm{d}x}{S} = sn\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(24.4)}$$

Можно считать, что такая же, как и (24.4), часть попавших на слой квантов поглощается молекулами, ибо отношение площадей определяет вероятность взаимодействия одного кванта с молекулами выделенного слоя. Доля поглощенных слоем квантов равна относительному уменьшению интенсивности ($\mathrm{d}i/i$) света. На основании изложенного можно записать

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -sn\mathrm{d}x, \qquad \textbf{(24.5)}$$

откуда после интегрирования и потенцирования имеем

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-snl}. \qquad \textbf{(24.6)}$$

В это уравнение, аналогичное (24.3), входит параметр s, который отражает способность молекул поглощать монохроматический свет используемой длины волны.

Более приняты молярные концентрации $C = n/N_\mathrm{A}$, откуда $n = CN_\mathrm{A}$. Преобразуем произведение $sn = sCN_\mathrm{A} = \chi_\lambda C$, где $\chi_\lambda = sN_\mathrm{A}$ — натуральный молярный показатель поглощения. Его физический смысл — суммарное эффективное сечение поглощения всех молекул одного моля вещества. Если молекулы, поглощающие кванты, находятся в растворителе, который не поглощает свет, то можно (24.6) записать в виде

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\chi_\lambda Cl}. \qquad \textbf{(24.7)}$$

Эта формула выражает ***закон Бугера—Ламберта—Бера***. В лабораторной практике этот закон обычно выражают через показательную функцию с основанием 10:

$$I = I_0 \cdot 10^{-\varepsilon Cl}, \qquad \textbf{(24.8)}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\chi_\lambda}{\ln 10}$ — молярный показатель поглощения[1].

[1] В спектроскопии ε принято называть молярным коэффициентом поглощения.

Закон Бугера—Ламберта—Бера используют для фотометрического определения концентрации окрашенных веществ. Для этого непосредственно измеряют потоки падающего и прошедшего через раствор монохроматического света (*концентрационная колориметрия*), однако определенный таким образом коэффициент пропускания T (или поглощения $1 - T$, см. (24.1)) неудобен, так как он из-за вероятностного характера процесса[1] связан с концентрацией нелинейно [см. (24.8) и рис. 24.2, *а*]. Поэтому в количественном анализе обычно определяют ***оптическую плотность*** (D) раствора[2], представляющую десятичный логарифм величины, обратной коэффициенту пропускания,

$$D = \lg\frac{1}{T} = \lg\frac{I_0}{I} = \varepsilon \mathrm{Cl}. \qquad \textbf{(24.9)}$$

Оптическая плотность удобна тем, что она линейно связана с концентрацией определяемого вещества (рис. 24.2, *б*).

Закон Бугера—Ламберта—Бера выполняется не всегда. Он справедлив при следующих предположениях: 1) используется монохроматический свет; 2) молекулы растворенного вещества в растворе распределены равномерно; 3) при изменении кон-

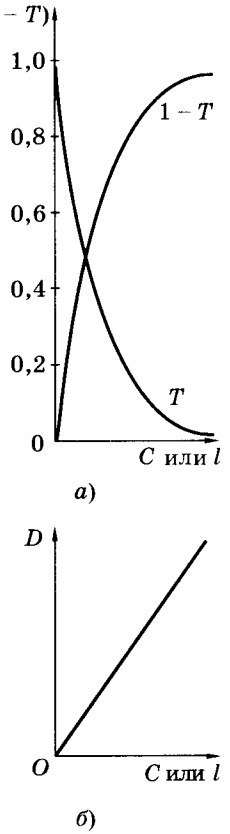


Рис. 24.2

[1] Экспоненциальная зависимость интенсивности прошедшего света от концентрации вещества (24.6—24.8) определяется вероятностным характером поглощения квантов света. Доля поглощенных квантов $\mathrm{d}i/i$ (24.5) может рассматриваться как вероятность поглощения, зависящая от суммарной площади поглощающих кванты мишеней в тонком слое образца $sn\mathrm{d}x$ (24.5). Попадание или непопадание кванта в мишень — случайный, вероятностный процесс. Аналогичные экспоненциальные зависимости, отражающие вероятностный характер процессов, получаются при выводе уравнений, описывающих распределение Больцмана (§ 2.4), ослабление рентгеновского излучения веществом (§ 26.3) или радиоактивный распад (§ 27.2).

[2] В англоязычной литературе сейчас вместо оптической плотности используется другое обозначение и термин: поглощательная способность (A) (*absorbance*).

центрации характер взаимодействия между растворенными молекулами не меняется (иначе фотофизические свойства вещества, в том числе и значения s и ε, будут изменяться); 4) в процессе измерения не происходят химические превращения молекул под действием света; 5) интенсивность падающего света должна быть достаточно низка (чтобы концентрация невозбужденных молекул практически не уменьшалась в ходе измерения). Зависимости s, χ, ε или D от длины волны света называют спектрами поглощения вещества.

Спектры поглощения являются источниками информации о состоянии вещества и о структуре энергетических уровней атомов и молекул (см. § 24.3 и 24.4). Спектры поглощения используют для качественного анализа растворов окрашенных веществ.

§ 24.2. Рассеяние света

Рассеянием света называют явление, при котором распространяющийся в среде световой пучок отклоняется по всевозможным направлениям.

Необходимое условие для возникновения рассеяния света — наличие оптических неоднородностей, т. е., в частности, областей с иным, чем основная среда, показателем преломления.

Рассеяние света возникает на оптических неоднородностях среды. Различают два основных вида таких неоднородностей:

1) мелкие инородные частицы в однородном прозрачном веществе. Такие среды являются мутными: дым (твердые частицы в газе), туман (капельки жидкости в газе), взвеси, эмульсии и т. п. Рассеяние в мутных средах называют ***явлением Тиндаля***;

2) оптические неоднородности, возникающие в чистом веществе из-за статистического отклонения молекул от равномерного распределения (флуктуации плотности). Рассеяние света на неоднородностях этого типа называют ***молекулярным***, например рассеяние света в атмосфере.

Уменьшение интенсивности света вследствие рассеяния, как и при поглощении, описывают показательной функцией

$$I = I_0 e^{-ml}, \qquad \textbf{(24.10)}$$

где m — показатель рассеяния (натуральный).

При совместном действии поглощения и рассеяния света ослабление интенсивности также является показательной функцией

$$I = I_0 e^{-\mu l}, \qquad \textbf{(24.11)}$$

где μ — показатель ослабления (натуральный). Как нетрудно видеть, $\mu = m + k_\lambda$.

Рэлей установил, что при рассеянии в мутной среде на неоднородностях, приблизительно меньших $0{,}2\lambda$ (λ — длина волны света), а также при молекулярном рассеянии интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны (***закон Рэлея***):

$$I \sim 1/\lambda^4. \qquad \textbf{(24.12)}$$

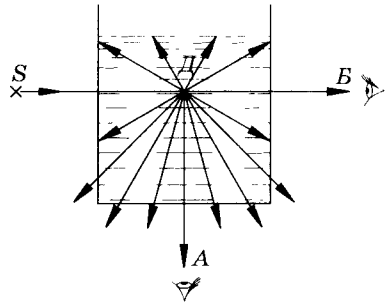
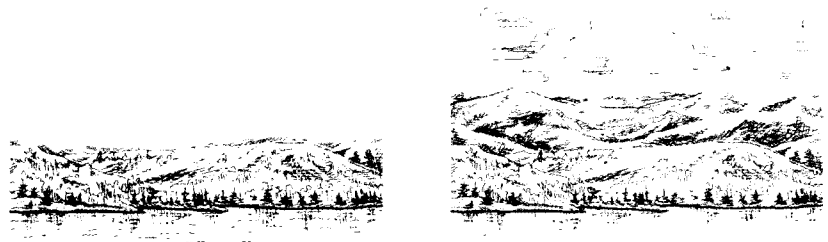


Рис. 24.3

Это означает, что из белого света веществом, например в точке $Д$ (рис. 24.3), будут преимущественно рассеиваться голубые и фиолетовые лучи (направление $А$), а красные — проходить в направлении $Б$ падающего света. Аналогичное явление наблюдается и в природе: голубой цвет неба — рассеянный свет, красный цвет заходящего Солнца — изменение спектра белого света из-за значительного рассеяния голубых и фиолетовых лучей в толще атмосферы при наклонном падении (см. пояснение к рис. 22.3).

Меньшее рассеяние красных лучей используют в сигнализации: опознавательные огни на аэродромах, наиболее ответственный свет светофора — красный, и т. п. Инфракрасные лучи рассеиваются еще меньше. На рис. 24.4 изображены две фотографии пейзажа: на левой, снятой обычным методом, туман сильно ограничил видимость; на правой, снятой в инфракрасном излучении на специальной пластинке, туман не мешает, он оказался прозрачным для более длинных волн.

Если взвешенные частицы велики по сравнению с длиной волны, то рассеяние не соответствует закону Рэлея (24.12) — в знаменателе дроби будет стоять λ^2. Рассеянный свет теряет свою голубизну и становится белее. Так, пыльное небо городов кажется нам белесым в противоположность темно-синему небу чистых морских просторов.



а) *б)*

Рис. 24.4

Направление рассеянного света, степень его поляризации, спектральный состав и т. д. приносят информацию о параметрах, характеризующих межмолекулярное взаимодействие, размерах макромолекул в растворах, частиц в коллоидных растворах, эмульсиях, аэрозолях и т. д. Методы измерения рассеянного света с целью получения такого рода сведений называют ***нефелометрией***, а соответствующие приборы — ***нефелометрами***.

Еще один тип рассеяния света, названный ***комбинационным рассеянием***, был открыт в 1928 г. Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом в Москве и одновременно Ч. В. Раманом в Индии. Это явление заключается в том, что в спектре рассеяния помимо несмещенной линии, соответствующей частоте падающего света, появляются новые линии, частоты которых ν' представляют собой комбинацию частоты падающего света ν_0 и частот ν_i ($i = 1, 2, \ldots$) колебательных или вращательных переходов рассеивающих молекул:

$$\nu' = \nu_0 \pm \nu_i. \qquad \textbf{(24.13)}$$

Комбинационное рассеяние можно рассматривать как неупругое соударение квантов с молекулами. При соударении квант может отдать молекуле или получить от нее только такие количества энергии, которые равны разностям двух ее энергетических уровней. Если при столкновении с квантом молекула переходит из состояния с энергией E' в состояние с энергией E'' ($E'' > E'$), то энергия фотона после рассеяния станет равной $h\nu_0 - \Delta E$, где $\Delta E = E'' - E'$. Соответственно частота кванта уменьшится на $\nu_1 = \Delta E/h$ — возникает спутник с большей длиной волны, который условно называют «красным». Если первоначально молекула находилась в состоянии с энергией E'', она может перейти в результате соударения с фотоном в состояние с энергией E', отдав избыток энергии $\Delta E = E'' - E'$ кванту. В результате энергия кванта станет равной $h\nu_0 + \Delta E$ и частота увеличится на ν_1 — возникает спутник с меньшей длиной волны, называемый «синим». Рассеяние кванта $h\nu_0$ может сопровождаться переходами молекулы между различными вращательными или колебательными уровнями E', E'', E''' и т. д. В результате возникает ряд симметрично расположенных спутников.

С помощью метода комбинационного рассеяния определяются собственные частоты колебаний молекулы; он позволяет также судить о характере симметрии молекулы. Спектры комбинационного рассеяния настолько характерны для молекул, что с их помощью осуществляется анализ сложных молекулярных смесей. Спектроскопия комбинационного рассеяния дает информацию, аналогичную получаемой инфракрасной спектроскопией, но имеет то преимущество, что позволяет работать с водными растворами молекул, используя видимый свет, для которого растворитель прозрачен.

§ 24.3. Оптические атомные спектры

Атомными спектрами[1] ***называют как спектры испускания, так и спектры поглощения, которые возникают при квантовых переходах между энергетическими уровнями свободных или слабовзаимодействующих атомов.***

Электроны в атомах могут находиться в стационарных энергетических состояниях. В этих состояниях атомы не излучают и не поглощают энергии. Энергетические состояния схематически изображают в виде уровней (см., например, рис. 23.11). Число электронов в атоме ограничено, при отсутствии внешних воздействий они заполняют только часть возможных электронных энергетических уровней с наименьшей энергией. Таким образом, оказываются заполненными нижние электронные уровни, тогда как верхние остаются свободными. Состояние атома с возможной минимальной энергией называют ***основным***. Если атом получает энергию (например, при соударении с другими атомами или при поглощении кванта света), то может произойти переход какого-либо электрона с заполненного на более высокий свободный уровень. При этом атом оказывается в электронно-возбужденном состоянии с избыточной энергией.

Поглощение кванта возможно при условии, если его энергия равна разности энергий какого-либо свободного электронного уровня (E_i) и заполненного (E_k): $h\nu = E_i - E_k$, $i > k$ (23.31). Эта формула выражает *закон сохранения энергии*.

Возбужденные атомы стремятся перейти в состояние с наименьшей энергией. Поэтому происходят ***спонтанные квантовые переходы*** $E_i \rightarrow E_k$. Такие переходы могут быть безызлучательными (энергия передается окружающим атомам при столкновениях, вызывая нагрев тела) или излучательными с испусканием квантов света, энергия которых выражается формулой (23.31). Спонтанное излучение определяется в основном внутренними причинами, является случайным событием и имеет вероятностный характер. Обычные источники света испускают в основном спонтанное излучение.

Особо выделяется другой вид излучения, который называется ***вынужденным***, или ***индуцированным***. Оно возникает при взаимодействии кванта с возбужденным атомом и будет рассмотрено в § 24.8.

Наибольший интерес представляют оптические атомные спектры испускания, которые получают от возбужденных атомов. Их

[1] Атомные спектры называют оптическими, если они лежат в ультрафиолетовом (100—400 нм), видимом (400—760 нм) или инфракрасном ($\lambda > 760$ нм) диапазоне длин волн.

возбуждение обычно достигается при электрическом разряде в газе или нагревании вещества пламенем газовых горелок, электрической дугой или искрой.

Атомные спектры в результате квантования энергии электронов и в соответствии с формулой (23.31) состоят из отдельных линий поглощения или испускания. Подробные сведения о спектрах конкретных атомов можно найти в специальных справочниках по спектроскопии. В качестве простого примера рассмотрим спектр атома водорода и водородоподобных ионов.

Из формул (23.24) и (23.31) можно получить формулу для частоты света, излучаемого (поглощаемого) атомом водорода ($Z = 1$):

$$\nu = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left[\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2}\right], \qquad \textbf{(24.14)}$$

где i и k — порядковые номера уровней, между которыми происходит переход. Эта формула была получена на основании эксперимента И. Я. Бальмером еще задолго до создания квантовой механики и теоретически обоснована Бором (см. § 23.7).

В спектре можно выделить группы линий, называемые ***спектральными сериями***. Каждая серия применительно к спектрам испускания соответствует переходам с различных уровней на один и тот же конечный (рис. 24.5).

В ультрафиолетовой области находятся линии ***серии Лаймана***, которая образуется при переходе с верхних энергетических

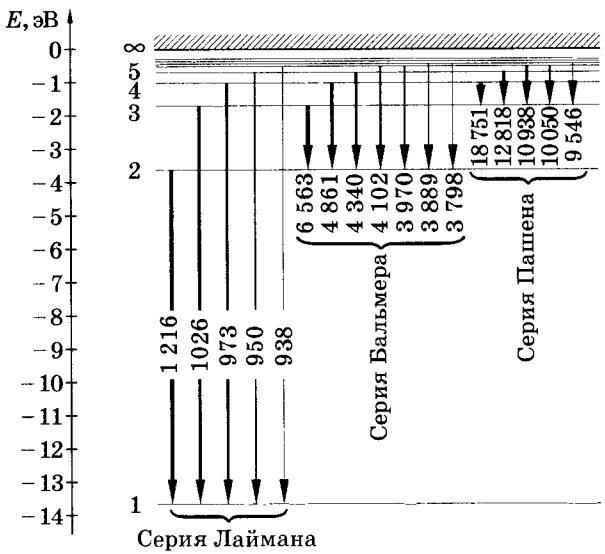


Рис. 24.5

уровней на самый нижний, основной ($n_k = 1$). Из формулы (24.14) для серии Лаймана получаем

$$\nu = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{n_i^2}\right]; \; n_i = 2, 3, 4, \ldots, \qquad \textbf{(24.15)}$$

т. е. находим частоты всех линий этой серии. Самая длинноволновая линия имеет наибольшую интенсивность. Интенсивности спектральных линий на рис. 24.5 условно показаны толщиной линий, отображающих соответствующие переходы.

В видимой и близкой ультрафиолетовой областях спектра расположена ***серия Бальмера***, которая возникает вследствие переходов с верхних энергетических уровней на второй ($n_k = 2$). Из формулы (24.14) для серии Бальмера получаем

$$\nu = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2}\right]; \; n_i = 3, 4, 5, \ldots, \qquad \textbf{(24.16)}$$

т. е. находим частоты всех линий этой серии.

К инфракрасной области относится ***серия Пашена***, которая возникает при переходах с верхних энергетических уровней на третий ($n_k = 3$). Из формулы (24.14) для серии Пашена следует

$$\nu = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_i^2}\right]; \; n_i = 4, 5, 6, \ldots . \qquad \textbf{(24.17)}$$

Существуют и другие серии в инфракрасной области. Может показаться, что спектр атомарного водорода не ограничен со стороны малых частот, так как энергетические уровни по мере увеличения n становятся сколь угодно близкими. Однако на самом деле вероятность перехода между такими уровнями столь мала, что практически эти переходы не наблюдаются.

Выражение для работы ионизации атома водорода $A_и = h\nu$ и потенциала ионизации (12.60) можно получить из (24.14), считая $n_k = 1$ и $n_i \to \infty$:

$$\varphi_и = \frac{me^3}{8\varepsilon_0^2 h^2}. \qquad \textbf{(24.18)}$$

Для атомного спектрального анализа используют как спектры испускания (эмиссионный спектральный анализ), так и спектры поглощения (абсорбционный атомный спектральный анализ). Эмиссионный анализ часто служит для количественного определения микроэлементов в различных образцах, небольшого количества атомов металлов в консервированных продуктах и т. п.

Высокочувствительным и простым методом обнаружения микроколичеств щелочных и щелочноземельных металлов является *пламенная фотометрия*. Всего этим методом определяют около 50 элементов. Раствор анализируемых веществ распыляют в пламя газовой

горелки, где вследствие высокой температуры вещества переходят в парообразное состояние. При этом проводят регистрацию спектров и интенсивности полос поглощения или испускания атомов. Эмиссионный метод обычно обладает большей чувствительностью, чем абсорбционный (см. таблицу 31, где указаны длины волн наиболее интенсивных линий). Так как электронные переходы различных атомов отличаются по длине волны, возможно качественное и количественное определение сразу нескольких элементов в сложных смесях, какими являются многие биологические жидкости.

Таблица 31

Элемент	Абсорбционный метод		Эмиссионный метод	
	длина волны поглощаемого света, нм	чувствительность, мкг/мл	длина волны излучения, нм	чувствительность, мкг/мл
Калий	766,5	0,02	766,5	0,0002
Кальций	422,7	0,08	422,7	0,007
Литий	670,8	0,03	670,8	0,0002
Магний	285,2	0,002	285,2	0,04
Натрий	589,0	0,008	589,0	0,0002

§ 24.4. Молекулярные спектры

Молекулярные спектры (испускания и поглощения) возникают при квантовых переходах молекул с одного энергетического уровня на другой (см. § 23.9) и состоят из совокупности более или менее широких полос, которые представляют собой тесно расположенные линии. Сложность молекулярных спектров по сравнению с атомными обусловлена бóльшим разнообразием движений и, следовательно, энергетических переходов в молекуле.

Учитывая (23.31) и (23.38), находим частоту, излучаемую или поглощаемую молекулой:

$$\nu = \frac{1}{h}(E'' - E') = \frac{1}{h}[(E''_{эл} - E'_{эл}) + (E''_{кол} - E'_{кол}) + (E''_{вр} - E'_{вр})] =$$

$$= \frac{1}{h}(\Delta E_{эл} + \Delta E_{кол} + \Delta E_{вр}); \qquad \textbf{(24.19)}$$

здесь один или два штриха относятся к нижнему и верхнему уровням соответственно. Следует иметь в виду, что $\Delta E_{эл} \gg \Delta E_{кол} \gg \Delta E_{вр}$. Если $\Delta E_{эл} = 0$ и $\Delta E_{кол} = 0$, а $\Delta E_{вр} \neq 0$, то получают состоящие из отдельных линий чисто вращательные молекулярные спектры, которым отвечают [см. (24.18)] невысокие частоты. Такие спектры наблюдаются в далекой инфракрасной и микроволновой (СВЧ) областях.

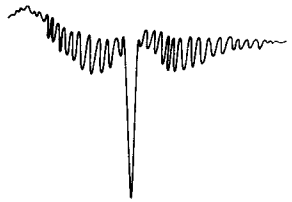


Рис. 24.6

Если $\Delta E_{эл} = 0$, а $\Delta E_{кол} \neq 0$, то обычно одновременно и $\Delta E_{вр} \neq 0$, при этом возникает колебательно-вращательный спектр. Он состоит из колебательных полос, распадающихся при достаточном разрешении спектрального прибора на отдельные вращательные линии. На рис. 24.6 графически изображен колебательно-вращательный спектр метана. Колебательно-вращательные спектры наблюдают в близкой инфракрасной области. (Колебательно-вращательные спектры можно также регистрировать методом комбинационного рассеяния, см. § 24.2.)

При $\Delta E_{эл} \neq 0$ обычно одновременно $\Delta E_{кол} \neq 0$ и $\Delta E_{вр} \neq 0$. Образуются электронно-колебательные, а точнее — электронно-колебательно-вращательные спектры, которые состоят из различных полос, а полосы — из тесно расположенных линий, соответствующих вращательным переходам. На рис. 24.7, *а* приведен электронно-колебательный спектр молекулы азота, а на рис. 24.7, *б* — вращательное расщепление одной из полос.

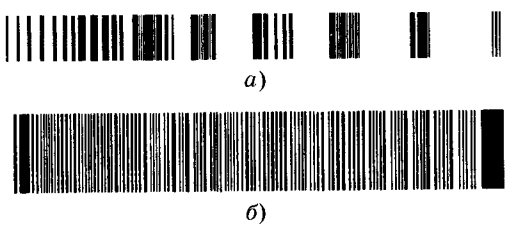
Электронно-колебательно-вращательные спектры испускания и поглощения наблюдают в видимой и ультрафиолетовой областях.

В сложных многоатомных молекулах с сопряженными двойными связями способность поглощать свет определяется главным образом молекулярными π-орбиталями. При взаимодействии молекулы с квантом света может произойти его поглощение при выполнении условия (23.31) равенства энергии кванта разности энергий какого-либо свободного и заполненного уровней.

Рассмотрим, как протяженность системы сопряженных связей влияет на положение максимума спектра поглощения вещества, т. е. на его окраску.

Вычислим частоту ν_{min}, соответствующую минимальной энергии поглощаемых квантов для электронного перехода с верхнего заполненного на нижний свободный уровень (см. § 23.9)

$$h\nu_{min} = (E_{N+1} - E_N), \qquad \textbf{(24.20)}$$



а)

б)

Рис. 24.7

откуда на основании (23.45) получим:

$$\nu_{min} = \frac{1}{h}\left[\frac{(N+1)^2h^2}{8ml^2} - \frac{N^2h^2}{8ml^2}\right]. \qquad (24.21)$$

Подставив в (24.21) длину системы сопряженных связей (23.43) $l = NL$ (L — длина одного звена), находим

$$\nu_{min} = \frac{2N+1}{N^2} \cdot \frac{h}{8mL^2}. \qquad (24.22)$$

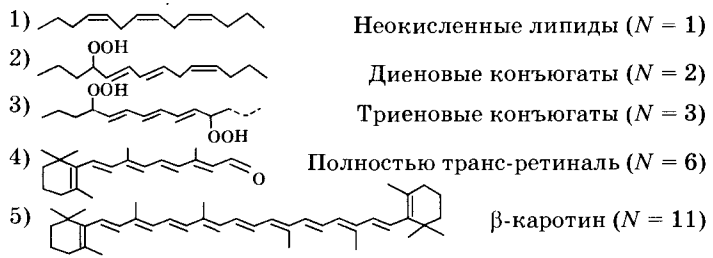
При $N \geqslant 2$ первый сомножитель в (24.22) можно принять приближенно равным $2/N$, тогда

$$\nu_{min} \approx \frac{h}{4mL^2} \cdot \frac{1}{N}.$$

Следовательно, длина волны наиболее длинноволновой полосы поглощения λ_{max} примерно пропорциональна N — числу сопряженных двойных связей в молекуле:

$$\lambda_{max} = \frac{c}{\nu_{min}} \approx \frac{4mcL^2}{h}N. \qquad (24.23)$$

На рис. 24.8 показаны формулы нескольких соединений с сопряженными двойными связями и их спектры поглощения. Видно, что связь между химической структурой молекулы и ее спектральными свойствами, описываемая формулой (24.23), качественно выполняется.



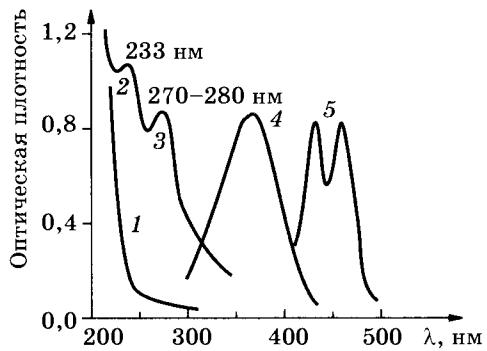


Рис. 24.8

Следует учитывать, что на положение максимума спектра поглощения помимо длины системы сопряженных связей также могут влиять соседние химические группы, агрегатное состояние вещества, растворитель и др. Анализ спектров поглощения дает информацию как о структуре молекул, так и о свойствах среды, окружающей молекулы.

§ 24.5. Различные виды люминесценции

Люминесценцией называют избыточное над тепловым излучение тела, имеющее длительность, значительно превышающую период ($\sim 10^{-15}$ с) ***излучаемых световых волн.***

Первая часть определения отделяет люминесценцию от равновесного теплового излучения. Люминесценция обычно наблюдается в видимой или ультрафиолетовой областях спектра. Тепловое излучение в этой области возникает только при температуре в несколько сотен или тысяч градусов, тогда как люминесценция наблюдается при любых температурах, поэтому люминесценцию часто называют холодным свечением.

Признак длительности в этом определении был предложен С. И. Вавиловым для того, чтобы отличить люминесценцию от некоторых других явлений вторичного свечения, например отражения и рассеяния света.

Люминесцируют электронно-возбужденные молекулы (атомы). В зависимости от способа возбуждения различают несколько типов люминесценции.

Люминесценция, вызванная заряженными частицами: ионами — *ионолюминесценция*, электронами — *катодолюминесценция*, ядерным излучением — *радиолюминесценция*. Люминесценцию под воздействием рентгеновского и γ-излучения называют *рентгенолюминесценцией*, фотонов видимого света — *фотолюминесценцией*. При растирании, раздавливании или раскалывании некоторых кристаллов возникает *триболюминесценция*. Электрическим полем возбуждается *электролюминесценция*, частным случаем которой является свечение газового разряда. Люминесценцию, сопровождающую экзотермическую химическую реакцию, называют *хемилюминесценцией*.

§ 24.6. Фотолюминесценция

***Фотолюминесценция**, называемая иногда просто люминесценцией, подразделяется на* **флуоресценцию** *(кратковременное послесвечение) и* **фосфоресценцию** *(сравнительно длительное послесвечение).*

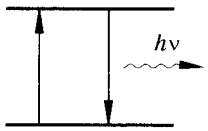


Рис. 24.9

Начальным актом любой фотолюминесценции является возбуждение фотоном с энергией $h\nu$ атома или молекулы. В наиболее простом случае, который обычно реализуется в одноатомных парах и газах при низком давлении, атом возвращается в основное состояние, излучая фотон света той же частоты ν (рис. 24.9). Это явление называют ***резонансной флуоресценцией***. Специальные опыты показали, что такое свечение возникает приблизительно через 10^{-8} с после освещения вещества и поэтому не является рассеянием в обычном понимании этого слова.

При повышении давления или добавлении в люминесцирующие пары инородных газов (водород, кислород и др.) резонансная флуоресценция уменьшается и появляются другие линии флуоресценции. Это обусловлено тем, что возбужденные атомы успевают столкнуться с окружающими атомами или молекулами. В результате возбужденные атомы переходят в основное состояние, а окружающие частицы приобретают дополнительную кинетическую энергию.

Органические молекулы, имеющие систему сопряженных двойных связей, в основном (невозбужденном) состоянии почти все находятся в нижнем колебательном состоянии электронного уровня S_0 (см. рис. 23.16). Распределение молекул по энергетическим уровням за счет тепловой энергии определяется распределением Больцмана (§ 2.4)

$$\frac{n_i}{n_0} = e^{-\frac{\Delta E_i}{kT}}, \qquad \textbf{(24.24)}$$

где n_0 и n_i — число молекул в основном и i-ом возбужденном состояниях, ΔE_i — разность энергий для этих состояний, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Под действием света при выполнении условия (23.31) может произойти возбуждение молекулы с переходом на разные колебательные уровни электронных уровней S_1, S_2 и т. д. Длина стрелок, направленных вверх (см. рис. 23.16), равна энергии поглощаемых квантов. Поглощение кванта происходит примерно за 10^{-15} с. В течение последующих ~10^{-12} с возбужденная молекула отдает часть энергии окружающей среде и переходит на нижний колебательный уровень электронного уровня S_1 (безызлучательные переходы показаны направленными вниз волнистыми стрелками). Таким образом, все молекулы, независимо от энергии поглощенного кванта, оказываются в одинаковом самом нижнем возбужденном состоянии, в котором молекула может находиться

10^{-9}—10^{-8} с. Дальнейшие пути расходования энергии возбуждения могут быть различными.

Часть молекул отдает энергию окружающим частицам, нагревая тело. Это соответствует безызлучательному переходу в основное состояние.

Другая часть излучает кванты флуоресценции, переходя на какой-либо колебательный уровень основного состояния, длина направленных вниз стрелок равна энергии излучаемых квантов.

У части возбужденных молекул происходит обращение спина с переходом в триплетное состояние T_1, возвращение из которого на основной уровень S_0 запрещено (маловероятно), поскольку, в соответствии с принципом Паули, в основном состоянии не может быть двух электронов с одинаковыми спинами. Это приводит к задержке молекулы в триплетном состоянии на время от 10^{-6} до 10 с. Триплетные молекулы из-за большого времени жизни успевают многократно столкнуться с окружающими молекулами, поэтому они с бóльшей вероятностью переходят в основное состояние безызлучательно. Небольшая доля триплетных молекул переходит в основное состояние, излучая кванты фосфоресценции. В жидких растворах фосфоресценцию обычно наблюдать не удается, т. к. почти все триплетные молекулы переходят в основное состояние безызлучательно. Поэтому для наблюдения фосфоресценции растворы замораживают или исследуемое вещество помещают в твердый растворитель.

Каждый из описанных процессов происходит с определенной вероятностью, называемой ***квантовым выходом***. Так, ***квантовый выход флуоресценции*** ($\varphi_{фл}$) равен отношению числа излученных квантов флуоресценции к числу поглощенных квантов или отношению потока флуоресценции ($\Phi_{фл}$) к потоку поглощенного света $I_0(1 - T)S$, где I_0 — интенсивность возбуждающего света, S — площадь поглощающей поверхности, а $(1 - T)$ — коэффициент поглощения:

$$\varphi_{фл} = \frac{\Phi_{фл}}{I_0(1-T)S}. \qquad \textbf{(24.25)}$$

Значения квантового выхода флуоресценции для разных веществ сильно отличаются. Для флуоресцеина $\varphi_{фл} = 0{,}9$, для белков — варьирует в пределах 0,01—0,03. Флуоресцирующие соединения удается с высокой чувствительностью (до 10^{-10} г в пробе) обнаруживать в сложных смесях нефлуоресцирующих соединений. По флуоресценции удается обнаруживать грибковые повреждения волос и кожи, следовые количества наркотических веществ, начальные стадии порчи некоторых продуктов.

Из (24.25) следует, что поток флуоресценции ($\Phi_{фл}$) пропорционален коэффициенту поглощения ($1 - T$), который нелинейно зависит от концентрации (см. рис. 24.2, *а*). Поэтому и флуоресценция зависит от концентрации нелинейно. В эксперименте обычно регистрируют интенсивность флуоресценции $I_{фл}$:

$$I_{фл} = kI_0(1 - T)\varphi_{фл} = kI_0(1 - 10^{-\varepsilon Cl})\varphi_{фл}, \qquad (24.26)$$

где k — коэффициент, определяемый чувствительностью прибора, $T = 10^{-\varepsilon Cl}$, как следует из (24.9). В разбавленных растворах (при оптической плотности $D < 0{,}1$) отклонения от линейности составляют менее 5% и ими можно пренебрегать.

Воспользуемся схемой энергетических уровней молекул и переходов между ними (рис. 23.16) для пояснения законов люминесценции.

Закон Стокса: спектр люминесценции сдвинут в длинноволновую область относительно спектра поглощения того же соединения.

На рис. 24.10 приведены спектры поглощения и флуоресценции антрацена. Причина сдвига спектров заключается в том, что электронный переход при поглощении происходит с нижнего колебательного уровня основного состояния на любые колебательные уровни возбужденных электронных уровней (рис. 23.16). При этом часть энергии возбуждения молекул переходит в тепло (направленные вниз волнистые стрелки), и они оказываются на нижнем колебательном уровне нижнего возбужденного электронного состояния. Излучение происходит только с такого уровня на любые колебательные подуровни основного состояния. Длина стрелок, изображающих поглощательные и излучательные переходы в молекуле, пропорциональна энергии поглощенных или излученных фотонов. Из рис. 23.16 видно, что энергия поглощенных квантов выше, чем излученных (направленные вниз прямые стрелки короче, чем направленные вверх) — это отражает превращение части энергии возбужденного состояния молекулы в тепловую энергию окружающих молекул.

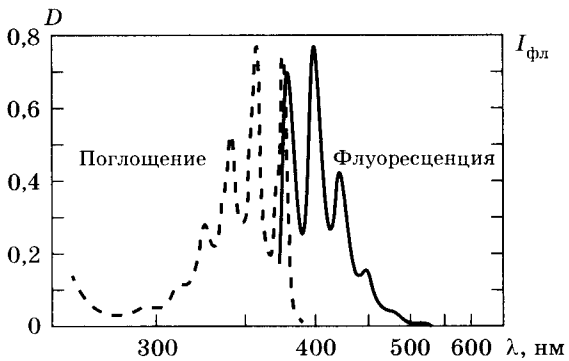


Рис. 24.10

Форма спектра люминесценции (правило Каши) и квантовый выход люминесценции (закон Вавилова) не зависят от длины волны возбуждения люминесценции. Причина этого в том, что излучение люминесценции происходит всегда с нижнего колебательного уровня нижнего возбужденного электронного состояния, независимо от того, на какой уровень молекула была возбуждена после поглощения. Спектр фотолюминесценции по форме совпадает со спектрами других типов люминесценции данного вида молекул, т. е. форма спектра люминесценции не зависит от способа возбуждения молекулы.

Спектральное положение полосы флуоресценции (как и длинноволновой полосы поглощения) зависит от длины системы сопряженных двойных связей l: чем больше l, тем большей длине волны соответствует максимум флуоресценции λ_{max}. Кроме того, на положение λ_{max} (а также на квантовый выход) флуоресценции некоторых молекул могут сильно влиять свойства окружающей среды. Так, например, для диметиламинохалкона в гептане (диэлектрическая проницаемость гептана $\varepsilon = 1{,}9$) $\lambda_{max} = 436$ нм, а в воде ($\varepsilon = 81$) $\lambda_{max} = 560$ нм. Чувствительность параметров флуоресценции молекул к особенностям среды (диэлектрической проницаемости, вязкости и др.), в которой они оказались, используется в биологии и медицине.

Если флуоресцирующие молекулы вводятся в исследуемую систему как индивидуальные вещества, которые затем сами в соответствии со своими свойствами распределяются в ней, то такие молекулы называют ***флуоресцентными зондами***. Примером применения флуоресцентных зондов может служить внутривенное введение пациентам флуоресцеина. Этот краситель не токсичен, обладает очень высоким квантовым выходом флуоресценции (около 90%). Он с током крови разносится по всему организму и диффундирует в дерму и эпидермис. Флуоресцеин возбуждают невидимым глазом ближним УФ-светом (365 нм) и наблюдают его зеленую флуоресценцию. По скорости появления флуоресценции в поверхностных тканях судят об участках тела с пониженным кровообращением, в них флуоресцеин появляется позже, чем в участках тела с нормальным кровообращением.

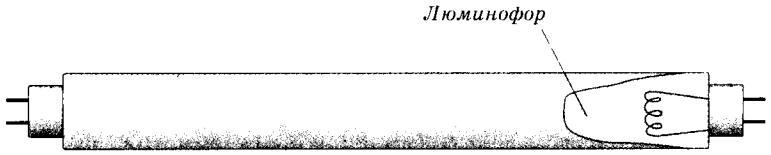


Рис. 24.11

В других случаях флуоресцирующие красители ковалентно связывают с какими-либо молекулами и затем вводят их в исследуемую систему. Такие молекулы называют ***флуоресцентными метками***. Примером может служить использование флуоресцентно-меченых антител. Если добавить такие антитела к суспензии смеси клеток, то они связываются только с теми из них, на поверхности которых находятся специфические к данному антителу антигены. Возникает яркая флуоресценция определенных клонов клеток, хорошо видная в люминесцентных микроскопах, в которых в отличие от обычных источников света, как правило, используют ртутные лампы высокого и сверхвысокого давлений и применяют два светофильтра. Один из них, расположенный перед конденсором, выделяет область спектра источника света, которая вызывает люминесценцию объекта; другой, находящийся между объективом и окуляром, выделяет свет люминесценции. Подсчет таким образом меченных флуоресцирующих клеток используется в иммунологических исследованиях крови.

На основе фотолюминесценции созданы источники света, спектр которых больше соответствует дневному свету, чем у ламп накаливания. Это имеет значение как для производственных целей, так и для гигиенических. В таких люминесцентных лампах, называемых лампами дневного света, происходит электрический разряд в парах ртути при низком давлении (электролюминесценция). На внутренней поверхности лампы, сделанной из обычного стекла (рис. 24.11), нанесен тонкий слой люминофора, который фотолюминесцирует под воздействием излучения паров ртути.

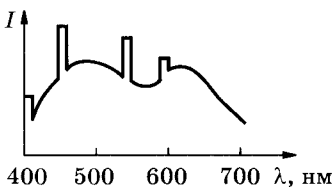


Рис. 24.12

Изменяя состав люминофора, можно подобрать наиболее подходящий спектр фотолюминесценции. На рис. 24.12 показан один из возможных спектров, интенсивные линии соответствуют спектру паров ртути, излучение которых частично проходит через люминофор.

§ 24.7. Хемилюминесценция

Хемилюминесценцией называют свечение, сопровождающее химические реакции. Наличие такого свечения означает, что энергия, которая выделяется на одной из стадий химического процесса, протекающего в системе, оказывается достаточной для образования одного из продуктов реакции в электронно-возбужденном состоянии (обозначается звездочкой):

$$A + B \rightarrow P^* + \text{другие продукты}$$

$$P^* \rightarrow P + h\nu \text{ (хемилюминесценция)}$$

Среди огромного разнообразия химических реакций лишь единичные сопровождаются излучением в видимой или ультрафиолетовой областях спектра, которое удается измерить. Наиболее изучены следующие типы процессов, сопровождающихся свечением.

Биолюминесценция — яркое, видимое простым глазом свечение некоторых бактерий, простейших, ракообразных, червей, моллюсков, рыб. Хорошо известна биолюминесценция светляков. Биолюминесценция обусловлена определенными ферментативными реакциями.

Хемилюминесценция в системах, содержащих *активные формы кислорода*: пероксид водорода, супероксидный и гидроксидный радикалы, синглетный (электронно-возбужденный) кислород.

Хемилюминесценция сопровождает *реакции цепного* (свободнорадикального, пероксидного) *окисления* органических соединений. Основной вклад в слабую хемилюминесценцию (раньше ее называли *сверхслабым свечением*) тканей, гомогенатов, растворов и суспензий полиненасыщенных жирных кислот дает свечение, сопровождающее пероксидное окисление липидов.

Хемилюминесценция при реакциях свободных радикалов, образовавшихся *при действии физических факторов* подразделяется на следующие виды: *радиохемилюминесценция* (при воздействии ионизирующего излучения); *фотохемилюминесценция* (после облучения видимым или УФ-светом); *электрохемилюминесценция* (при пропускании электрического тока через растворы); *сонолюминесценция* (при воздействии ультразвука); *триболюминесценция* (при перемешивании растворов) и др.

При облучении (или освещении) веществ в твердой фазе (как частный случай — при облучении биологических объектов, суспензий или растворов, замороженных жидким азотом) подвижность свободных радикалов резко ограничивается. Их реакции и сопутствующая хемилюминесценция активируются при нагревании и размягчении среды. Такое свечение называют *термолюминесценцией*.

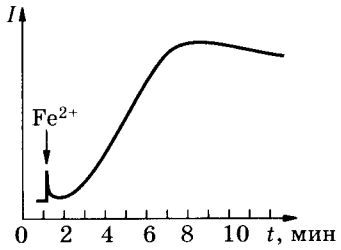


Рис. 24.13

Измерение характеристик хемилюминесценции — удобный метод контроля за течением химических реакций, сопровождающихся свечением, и, следовательно, может использоваться для изучения кинетики и механизма реакций. Регистрация хемилюминесценции в ряде случаев является наиболее чувствительным методом обнаружения свободных радикалов.

На рис. 24.13 показана хемилюминесценция плазмы крови при выведении в нее ионов двухвалентного железа. Железо инициирует пероксидное окисление липидов. Кванты хемилюминесценции излучаются триплетными возбужденными кетонами, образующимися при рекомбинации пероксидных свободных радикалов (обозначены жирными точками)

$$ROO^{\bullet} + ROO^{\bullet} + H^{+} \rightarrow RO^{*} + ROH + O_2,$$

$$RO^{*} \rightarrow RO + h\nu$$

Хемилюминесценция фагоцитирующих клеток крови при добавлении к ним различных образцов промышленной пыли значительно различается: по характеру кривых свечения клеток можно оценивать токсичность пыли. Токсичная пыль активирует ферментативную систему клеток, вырабатывающую супероксидные $O_2^{\bullet-}$ и гидроксильные $^{\bullet}OH$ радикалы и другие активные формы кислорода. Активность фагоцитирующих клеток также резко меняется при ишемической болезни сердца, инфаркте и других заболеваниях, поэтому хемилюминесценция этих клеток используется как диагностический метод.

§ 24.8. Лазеры и их применение в медицине

Несмотря на общую природу световых и радиоволн, многие годы оптика и радиоэлектроника развивались самостоятельно, независимо друг от друга. Казалось, что источники света — возбужденные частицы и генераторы радиоволн — имеют мало общего. Лишь с середины XX столетия появились работы по созданию молекулярных усилителей и генераторов радиоволн, которые положили начало новой самостоятельной области физики — квантовой электронике.

Квантовая электроника *изучает методы усиления и генерации электромагнитных колебаний с использованием вынужденного излучения квантовых систем.* Достижения в этой области знаний находят все большее применение в науке и технике. Ознакомимся с

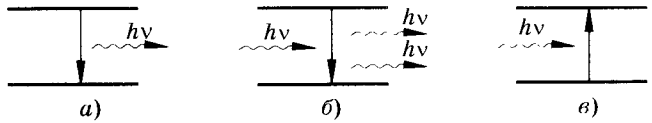


Рис. 24.14

некоторыми явлениями, лежащими в основе квантовой электроники и работы оптических квантовых генераторов — лазеров.

Создание лазеров оказалось возможным в результате реализации трех фундаментальных физических идей: вынужденного излучения (1), создания термодинамически неравновесной инверсной населенности энергетических уровней атомов (2) и использования положительной обратной связи (3).

Возбужденные молекулы (атомы) способны излучать фотоны люминесценции (см. § 24.5—24.6). Такое излучение является ***спонтанным*** процессом (рис. 24.14, *а*). Оно случайно и хаотично по времени, частоте (могут быть переходы между разными уровнями), по направлению распространения и поляризации. Другое излучение — ***вынужденное***, или ***индуцированное*** (рис. 24.14, *б*) — возникает при взаимодействии фотона с возбужденной молекулой, если энергия фотона равна разности соответствующих уровней энергии (23.31). При вынужденном (индуцированном) излучении число переходов, совершаемых в секунду, зависит от числа фотонов, попадающих в вещество за это же время, т. е. от интенсивности света, а также от числа возбужденных молекул. Другими словами, число вынужденных переходов будет тем больше, чем выше населенность соответствующих возбужденных энергетических состояний.

Индуцированное излучение тождественно падающему во всех отношениях, в том числе и по фазе, поэтому можно говорить о когерентном усилении электромагнитной волны, что используется в качестве первой основополагающей идеи в принципах лазерной генерации.

В обычных условиях вынужденное излучение маловероятно. На рис. 24.15 показано «заселение» молекулами энергетических



Рис. 24.15

уровней, описываемое распределением Больцмана (24.24). На рисунке «длина» каждого уровня пропорциональна числу частиц, имеющих соответствующую энергию (E_0 — основное состояние, E_1, E_2, ..., — возбужденные состояния, N — общее число частиц, N_i — число частиц на i-ом уровне энергии). Видно, что при «низких» температурах количество возбужденных молекул чрезвычайно мало, при повышении температуры оно увеличивается, при «высокой» температуре практически все энергетические уровни будут заселены одинаково. В любом случае, когда система находится в тепловом равновесии с окружающей средой (наиболее часто встречающаяся ситуация), большая часть молекул находится в основном состоянии. Поэтому фотоны будут сталкиваться, главным образом, с невозбужденными молекулами и будет происходить поглощение света. Для отдельной частицы равновероятны вынужденное поглощение, если частица находится в основном состоянии (рис. 24.14, *в*), и вынужденное излучение, если частица возбуждена (рис. 24.14, *б*). Поэтому даже если число возбужденных частиц в веществе равно числу невозбужденных («высокая» температура на рис. 24.15), усиления падающей электромагнитной волны не будет. На самом деле в обычном состоянии вещества («низкая» температура на рис. 24.15) условия для усиления волны не выполняются, т. е. волна при прохождении среды поглощается.

Вторая идея, реализуемая при создании лазеров, заключается в создании термодинамически неравновесных систем, в которых, вопреки закону Больцмана, на более высоком уровне находится больше частиц, чем на более низком. Состояние среды, в котором хотя бы для двух энергетических уровней оказывается, что число частиц с бóльшей энергией превосходит число частиц с меньшей энергией, называется ***состоянием с инверсной населенностью уровней***, а среда — ***активной***. Именно активная среда, в которой фотоны взаимодействуют с возбужденными атомами, вызывая вынужденные переходы на более низкий уровень с испусканием квантов индуцированного (вынужденного) излучения, является рабочим веществом лазера. Состояние с инверсной населенностью уровней формально получается из распределения Больцмана для $T < 0$ K, поэтому иногда называется состоянием с «отрицательной» температурой. По мере распространения света в активной среде интенсивность его возрастает, имеет место явление, обратное поглощению, т. е. усиление света. Это означает, что в законе Бугера (24.3) $k\lambda < 0$, поэтому инверсная населенность соответствует среде с отрицательным показателем поглощения.

Состояние с инверсной населенностью можно создать, отбирая частицы с меньшей энергией или специально возбуждая частицы, например, светом или электрическим разрядом. Само по себе состояние с отрицательной температурой долго не существует.

Третья идея, используемая в принципах лазерной генерации, возникла в радиофизике и заключается в использовании положительной обратной связи. При ее осуществлении часть генерируемого вынужденного излучения остается внутри рабочего вещества и вызывает вынужденное излучение все новыми и новыми возбужденными атомами. Для реализации такого процесса активную среду помещают в ***оптический резонатор***, состоящий обычно из двух зеркал, подобранных так, чтобы возникающее в нем излучение многократно проходило через активную среду, превращая ее в генератор когерентного вынужденного излучения.

Первый такой генератор в диапазоне СВЧ (мазер) был сконструирован в 1955 г. независимо советскими учеными Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым и американскими — Ч. Таунсом и др.[1]. Так как работа этого прибора была основана на вынужденном излучении молекул аммиака, то генератор был назван *молекулярным.*

В 1960 г. был создан первый квантовый генератор видимого диапазона излучения — ***лазер***[2] с кристаллом рубина в качестве рабочего вещества (активной среды). В том же году был создан газовый гелий-неоновый лазер. Все огромное многообразие созданных в настоящее время лазеров можно классифицировать по видам рабочего вещества: различают газовые, жидкостные, полупроводниковые и твердотельные лазеры. В зависимости от типа лазера энергия для создания инверсной населенности сообщается разными способами: возбуждение очень интенсивным светом — «оптическая накачка», электрическим газовым разрядом, в полупроводниковых лазерах — электрическим током. По характеру свечения лазеры подразделяют на импульсные и непрерывные.

Рассмотрим принцип работы твердотельного рубинового лазера. Рубин — это кристалл окиси алюминия Al_2O_3, содержащий в виде примеси примерно 0,05% ионов хрома Cr^{3+}. Возбуждение ионов хрома осуществляют методом оптической накачки с помощью импульсных источников света большой мощности. В од-

[1] В 1964 г. Н. Г. Басову, А. М. Прохорову и Ч. Таунсу за эти работы была присуждена Нобелевская премия.

[2] Название «лазер» является аббревиатурой от англ. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (усиление света посредством вынужденного излучения).



Рис. 24.16

ной из конструкций применяют трубчатый отражатель, имеющий в сечении форму эллипса. Внутри отражателя помещены прямая ксеноновая импульсная лампа и рубиновый стержень, расположенные вдоль линий, проходящих через фокусы эллипса (рис. 24.16). Внутренняя поверхность алюминиевого отражателя хорошо отполирована или посеребрена. Основное свойство эллиптического отражателя заключается в том, что свет, вышедший из одного его фокуса (ксеноновой лампы) и отраженный от стенок, попадает в другой фокус отражателя (рубиновый стержень).

Рубиновый лазер работает по трехуровневой схеме (рис. 24.17, *а*). В результате оптической накачки ионы хрома переходят с основного уровня *1* в короткоживущее возбужденное состояние *3*[1]. Затем происходит безызлучательный переход в долгоживущее (метастабильное) состояние *2*, с которого вероятность спонтанного излучательного перехода относительно мала. Поэтому происходит накопление возбужденных ионов в состоянии *2* и создается инверсная населенность между уровнями *1* и *2*. В обычных условиях переход со *2*-го на *1*-й уровень происходит спонтанно и сопровождается люминесценцией с длиной волны 694,3 нм. В резонаторе лазера есть два зеркала (см. рис. 24.16), одно из которых

[1] На этой редуцированной схеме представлены только те уровни и переходы между ними, которые существенны для генерации лазерного излучения. На самом деле схема электронных уровней гораздо сложнее. На схеме не отражена ширина энергетических уровней. Так, короткоживущий уровень *3* является широким и поглощает большую часть спектра излучения лампы накачки.

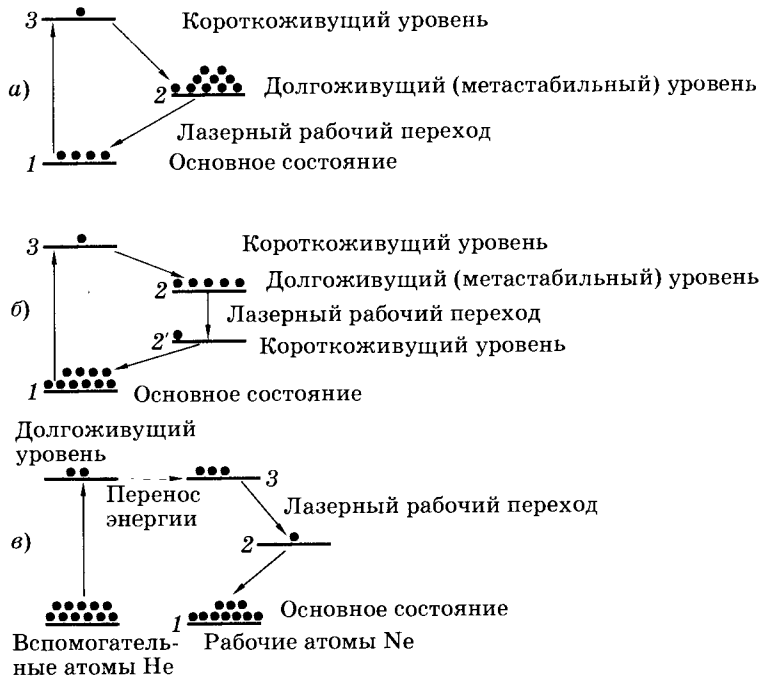


Рис. 24.17

имеет коэффициент отражения $R = \frac{I_{отр} \cdot 100}{I_0} = 100\%$ ($I_{отр}$ и I_0 — интенсивности отраженного и падающего на зеркало света), другое зеркало полупрозрачное и пропускает часть падающего на него излучения ($R < 100\%$). Кванты люминесценции в зависимости от направления их движения либо вылетают из боковой поверхности рубинового стержня и теряются, либо, многократно отражаясь от зеркал, сами вызывают вынужденные переходы. Таким образом, пучок, перпендикулярный зеркалам, будет иметь наибольшее развитие и выходит наружу через полупрозрачное зеркало. Такой лазер работает в импульсном режиме.

Наряду с рубиновым лазером, работающим по трехуровневой схеме, широкое распространение получили четырехуровневые схемы лазеров на ионах редкоземельных элементов (неодим, самарий и др.), внедренных в кристаллическую или стеклянную матрицы (рис. 24.17, *б*). В таких случаях инверсная населенность создается между двумя возбужденными уровнями: долгоживущим уровнем *2* и короткоживущим уровнем 2′.

Очень распространенным газовым лазером является гелий-неоновый, возбуждение в котором возникает при электрическом разряде. Активной средой в нем служит смесь гелия и неона в соотношении 10 : 1 и давлении около 150 Па. Излучающими являются атомы неона, атомы гелия играют вспомогательную роль. На рис. 24.17, *в* показаны энергетические уровни атомов гелия и неона. Генерация происходит при переходе между *3* и *2* уровнями неона. Для того чтобы создать между ними инверсную населенность, необходимо заселить уровень *3* и опустошить уровень *2*. Заселение уровня *3* происходит с помощью атомов гелия. При электрическом разряде электронным ударом происходит возбуждение атомов гелия в долгоживущее состояние (со временем жизни около 10^{-3} с). Энергия этого состояния очень близка к энергии уровня *3* неона, поэтому при соударении возбужденного атома гелия с невозбужденным атомом неона происходит передача энергии, в результате чего заселяется уровень *3* неона. Для чистого неона время жизни на этом уровне мало и атомы переходят на уровни *1* или *2*, реализуется больцмановское распределение. Опустошение уровня 2 неона происходит в основном за счет спонтанного перехода его атомов в основное состояние при соударениях со стенками разрядной трубки. Так обеспечивается стационарная инверсная населенность уровней *2* и *3* неона.

Основным конструктивным элементом гелий-неонового лазера (рис. 24.18) является газоразрядная трубка диаметром около 7 мм. В трубку вмонтированы электроды для создания газового разряда и возбуждения гелия. На концах трубки под углом Брюстера (§ 20.2) расположены окна, благодаря которым излучение оказывается плоскополяризованным. Плоскопараллельные зеркала резонатора монтируются вне трубки, одно из них полупрозрачное (коэффициент отражения $R < 100\%$). Таким образом, пучок вынужденного излучения выходит наружу через полупрозрачное зеркало. Это лазер непрерывного действия. Так как уровни *2* и *3* неона обладают сложной структурой (на рис. 24.17, *в* не показано), то гелий-неоновый лазер может работать на 30 длинах волн в области видимого и инфракрасного диапазонов. Зеркала резонатора делают с многослойными покрытиями, и вследствие интерференции создается необходимый коэффициент отражения для заданной длины волны. Чаще всего используются гелий-неоновые лазеры, излучающие красный свет с длиной волны 632,8 нм. Мощность таких лазеров небольшая, она не превышает 100 мВт.

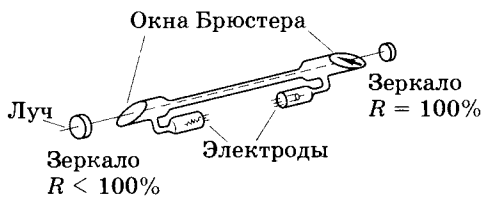


Рис. 24.18

Применение лазеров основано на свойствах их излучения: *высокая монохроматичность* ($\Delta\lambda \approx 0{,}01$ нм), *достаточно большая мощность, узость пучка* и *когерентность*.

Узость светового пучка и малая его расходимость позволили использовать лазеры для измерения расстояния между Землей и Луной (получаемая точность — около десятков сантиметров), скорости вращения Венеры и Меркурия и др.

На когерентности лазерного излучения основано их применение в голографии (см. § 19.8). На основе гелий-неонового лазера с использованием волоконной оптики разработаны *гастроскопы*, которые позволяют голографически формировать объемное изображение внутренней полости желудка.

Монохроматичность лазерного излучения очень удобна при возбуждении спектров комбинационного рассеяния света атомами и молекулами (см. § 24.3).

Широкое применение лазеры нашли в хирургии, стоматологии, офтальмологии, дерматологии, онкологии. Биологические эффекты лазерного излучения зависят как от свойств биологического материала, так и от свойств лазерного излучения.

Все лазеры, используемые в медицине, условно подразделяются на 2 вида: низкоинтенсивные (интенсивность не превышает 10 Вт/см^2, чаще всего составляет около 0,1 Вт/см^2) — терапевтические и высокоинтенсивные — хирургические. Интенсивность наиболее мощных лазеров может достигать 10^{14} Вт/см^2, в медицине обычно используются лазеры с интенсивностью 10^2—10^6 Вт/см^2.

Низкоинтенсивные лазеры — это такие, которые не вызывают заметного деструктивного действия на ткани непосредственно во время облучения. В видимой и ультрафиолетовой областях спектра их эффекты обусловлены фотохимическими реакциями и не отличаются от эффектов, вызываемых монохроматическим светом, полученным от обычных, некогерентных источников (см. § 24.9). В этих случаях лазеры являются просто удобными монохроматическими источниками света, обеспечивающими точную

локализацию и дозированность воздействия. Примерами может служить использование света гелий-неоновых лазеров для лечения трофических язв, ишемической болезни сердца и др., а также криптоновых и др. лазеров для фотохимического повреждения опухолей в фотодинамической терапии.

Качественно новые явления наблюдаются при использовании видимого или ультрафиолетового излучения высокоинтенсивных лазеров. В лабораторных фотохимических экспериментах с обычными источниками света, а также в природе при действии солнечного света обычно осуществляется однофотонное поглощение. Об этом говорится во **втором законе фотохимии**[1], сформулированном Штарком и Эйнштейном: **каждая молекула, участвующая в химической реакции, идущей под действием света, поглощает один квант излучения, который вызывает реакцию.** Однофотонность поглощения, описываемая вторым законом, выполняется потому, что при обычных интенсивностях света практически невозможно одновременное попадание в молекулу, находящуюся в основном состоянии, двух фотонов. Если бы такое событие осуществилось, то выражение (23.31) приобрело бы вид:

$$2h\nu = E_i - E_k,$$

что означало бы суммирование энергии двух фотонов для перехода молекулы из энергетического состояния E_k в состояние с энергией E_i. Не происходит также поглощения фотонов электронно-возбужденными молекулами, так как их время жизни мало, а обычно используемые интенсивности облучения невелики. Поэтому концентрация электронно-возбужденных молекул низка, и поглощение ими еще одного фотона чрезвычайно маловероятно.

Однако если увеличить интенсивность света, то становится возможным двухфотонное поглощение. Например, облучение растворов ДНК высокоинтенсивным импульсным лазерным излучением с длиной волны около 266 нм приводило к ионизации молекул ДНК, подобной вызываемой γ-излучением. Воздействие ультрафиолета с низкой интенсивностью ионизации не вызывало. Установлено, что при облучении водных растворов нуклеиновых кислот или их оснований пикосекундными (длительность импульса 30 пс) или наносекундными (10 нс) импульсами с интенсивностями выше 10^6 Вт/см^2 приводило к электронным переходам, показанным на рис. 24.19, завершавшимся ионизацией молекул. При

[1] Фотохимия изучает химические реакции, протекающие под действием света.

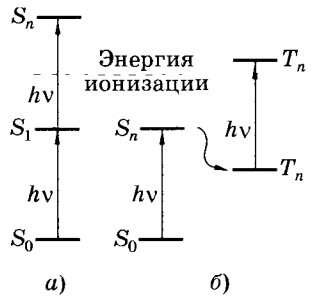


Рис. 24.19

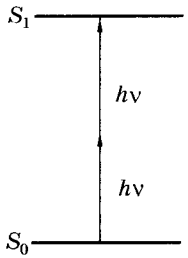


Рис. 24.20

пикосекундных импульсах (рис. 24.19, *а*) заселение высоких электронных уровней происходило по схеме ($S_0 \xrightarrow{h\nu} S_1 \xrightarrow{h\nu} S_n$), а при наносекундных (рис. 24.19, *б*) — по схеме ($S_0 \xrightarrow{h\nu} S_1 \rightarrow T_1 \xrightarrow{h\nu} T_n$). В обоих случаях молекулы получали энергию, превышающую энергию ионизации.

Полоса поглощения ДНК располагается в ультрафиолетовой области спектра при $\lambda < 315$ нм, видимый свет нуклеиновые кислоты совсем не поглощают. Однако воздействие высокоинтенсивным лазерным излучением около 532 нм переводит ДНК в электронно-возбужденное состояние за счет суммирования энергии двух фотонов (рис. 24.20).

Поглощение любого излучения приводит к выделению некоторого количества энергии в виде тепла, которое рассеивается от возбужденных молекул в окружающее пространство. Инфракрасное излучение поглощается главным образом водой и вызывает в основном тепловые эффекты. Поэтому излучение высокоинтенсивных инфракрасных лазеров вызывает заметное немедленное тепловое действие на ткани. Под тепловым воздействием лазерного излучения в медицине понимают в основном испарение (резание) и коагуляцию биотканей. Это касается различных лазеров с интенсивностью от 1 до 10^7 Вт/см^2 и с продолжительностью облучения от миллисекунд до нескольких секунд. К ним относятся, например, газовый CO_2-лазер (с длиной волны 10,6 мкм), Nd:YAG-лазер (1,064 мкм) и другие. Nd:YAG-лазер — наиболее широко используемый твердотельный четырехуровневый лазер. Генерация осуществляется на переходах ионов неодима (Nd^{3+}), введенных в кристаллы $Y_3Al_5O_{12}$ иттрий-алюминиевого граната (YAG).

Наряду с нагревом ткани происходит отвод части тепла за счет теплопроводности и тока крови. При температурах ниже 40 °С не-

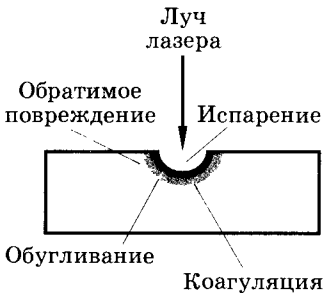


Рис. 24.21

обратимые повреждения не наблюдаются. При температурах 60 °С и выше начинается денатурация белков, коагуляция тканей и некроз. При 100—150 °С вызывается обезвоживание и обугливание, а при температурах свыше 300 °С ткань испаряется.

Когда излучение исходит от высокоинтенсивного сфокусированного лазера, количество выделяющегося тепла велико, в ткани возникает температурный градиент. В месте падения луча ткань испаряется, в прилегающих областях происходит обугливание и коагуляция (рис. 24.21). Фотоиспарение является способом послойного удаления или разрезания ткани. В результате коагуляции завариваются сосуды и останавливается кровотечение. Так сфокусированным лучом непрерывного CO_2-лазера ($\lambda = 10{,}6$ мкм) с мощностью около $2 \cdot 10^3$ Вт/см^2 пользуются как хирургическим скальпелем для разрезания биологических тканей.

Если уменьшать длительность воздействия (10^{-9}—10^{-6} с) и увеличивать интенсивность (выше 10^6 Вт/см^2), то размеры зон обугливания и коагуляции становятся пренебрежимо малыми. Такой процесс называют фотоабляцией (фотоудалением) и используют для послойного удаления ткани. Фотоабляция возникает при плотностях энергии 0,01—100 Дж/см^2.

При дальнейшем повышении интенсивности (10^{11} Вт/см^2 и выше) возможен еще один процесс — «оптический пробой». Это явление заключается в том, что из-за очень высокой напряженности электрического поля лазерного излучения (сравнимой с напряженностью внутриатомных электрических полей) материя ионизуется, образуется плазма и генерируются механические ударные волны. Для оптического пробоя не требуется поглощения квантов света веществом в обычном смысле, он наблюдается также в прозрачных средах, например в воздухе.

§ 24.9. Фотобиологические процессы. Понятия о фотобиологии и фотомедицине

Фотобиологическими называют процессы, которые начинаются с поглощения квантов света молекулами, а заканчиваются физиологической реакцией организма.

К фотобиологическим процессам относятся фотосинтез, зрение, загар и эритема кожи, фотопериодизм и многие другие.

Условно всякий фотобиологический процесс можно разбить на несколько стадий:

1) поглощение кванта света молекулой;

2) внутримолекулярные процессы размена энергии;

3) межмолекулярные процессы переноса энергии электронно-возбужденного состояния (важны в некоторых фотобиологических процессах);

4) первичный фотохимический акт, сопровождающийся образованием короткоживущих, нестабильных фотопродуктов, в него молекула вступает из нижнего синглетного S_1 или триплетного T_1 возбужденных состояний;

5) реакции нестабильных фотопродуктов, заканчивающиеся образованием стабильных продуктов;

6) биохимические реакции с участием фотопродуктов;

7) физиологический ответ на действие света.

Первые три стадии фотобиологических процессов одинаковы для фотохимических реакций и фотолюминесценции. Поэтому законы фотохимии имеют свои аналогии с законами люминесценции (см. § 24.6). Первичный фотохимический акт заключается в химических изменениях молекулы (например, присоединении или отдаче электрона или водорода).

Особенностью биологического действия ультрафиолетового и видимого излучения (200—750 нм)[1] является ярко выраженная зависимость биологического эффекта от длины волны излучения. Бактерицидные эффекты вызываются волнами в диапазоне 200—315 нм, покраснение (эритема) кожи наиболее эффективно вызывается излучением с длиной волн 280—315 нм, зрительный эффект — 400—750 нм (видимый диапазон), лечение желтухи новорожденных — фиолетовым светом (около 400 нм). При фотосинтезе растения и фотосинтезирующие бактерии используют весь диапазон солнечного ультрафиолетового излучения, достигающего поверхности Земли (коротковолновая граница солнечного света, проходящего через атмосферу Земли, ~ 285 нм), видимого света, и даже ближнего инфракрасного излучения (иногда до 1000 нм). Меняя длину волны, можно избирательно инициировать те или иные

[1] Ультрафиолетовое излучение с длинами волн менее 200 нм используется редко. Оно поглощается кислородом воздуха, поэтому его действие можно изучать только в специальных условиях, например, в вакууме, из-за этого ультрафиолет с $\lambda < 200$ нм называют вакуумным.

фотобиологические процессы[1]. Дело в том, что разные фотобиологические процессы начинаются с поглощения квантов света разными молекулами, в свою очередь положение полосы поглощения молекулы зависит от ее химической структуры (см. § 24.4).

Важной характеристикой воздействия света на биологические объекты является ***спектр фотобиологического действия — зависимость биологического эффекта от длины волны действующего света.*** Спектры действия позволяют определить, какая область спектра наиболее эффективно вызывает биологический процесс, а также определить природу молекул, ответственных за поглощение света в данном процессе.

Рассмотрим количественно начальные этапы этого процесса: поглощение света и первичную фотохимическую реакцию.

По аналогии с рассуждениями § 24.1, введем понятие эффективного сечения поглощения молекулой фотона s. Отличие от вывода закона Бугера—Ламберта—Бера заключается, по крайней мере, в следующем: во-первых, будем учитывать уменьшение числа активируемых молекул, так как воздействие света вызывает их химические превращения; во-вторых, рассмотрим достаточно тонкий слой разбавленного раствора, это позволит считать интенсивность света I_0 постоянной и одинаковой по всей толщине слоя раствора.

Элементарное уменьшение концентрации dn молекул под действием света пропорционально:

— концентрации n молекул;
— эффективному сечению поглощения s;
— времени облучения dt;
— интенсивности света I_0[2]:

$$dn = -\varphi I_0 s n \cdot dt. \qquad \textbf{(24.27)}$$

Здесь знак «−» означает уменьшение числа молекул со временем. Коэффициент φ_x называют квантовым выходом фотохимической

[1] Избирательность действия отличает биологические эффекты света от эффектов ионизирующего излучения. Поглощение квантов рентгеновского или γ-излучения осуществляется не молекулами, а атомами и не зависит от того, в состав каких молекул эти атомы входят (см. § 26.4). Поэтому поглощение ионизирующего излучения происходит в основном теми элементами, которых в организме больше. Так как наш организм на 80% состоит из воды, то радиохимические процессы приводят преимущественно к появлению радикалов воды, которые в дальнейшем повреждают белки, нуклеиновые кислоты, липиды и др.

[2] Здесь интенсивность выражена в числе фотонов, падающих на 1 м^2 за 1 с.

реакции. Этот коэффициент показывает, какая часть молекул, которые поглотили фотоны, вступила в фотохимическую реакцию. Разделим переменные и проинтегрируем (24.27):

$$\int_{n_0}^{n_t} \frac{dn}{n} = -\varphi_x I_0 s \int_0^t dt,$$

где n_0 — начальная концентрация молекул, а n_t — концентрация молекул в момент t. Получаем

$$\ln\frac{n_t}{n_0} = -\varphi_x I_0 s t,$$

или

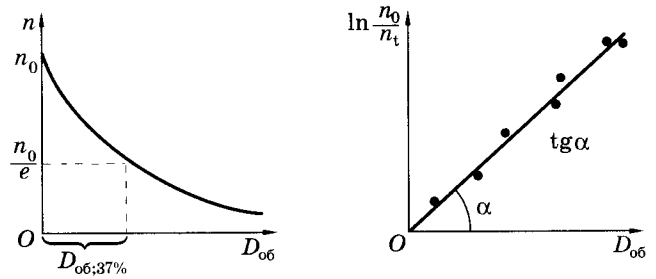
$$\ln\frac{n_0}{n_t} = \varphi_x I_0 s t = D_{об}\sigma_x. \qquad \textbf{(24.28)}$$

Здесь $I_0 t = D_{об}$ — доза облучения, а $s\varphi_x = \sigma_x$ — эффективное сечение молекулы для фотохимического превращения, оно пропорционально вероятности такого взаимодействия фотона с молекулой, в результате которого произойдет фотохимическая реакция.

Для нахождения σ_x строят график зависимости $\ln\frac{n_0}{n_t} = f(D_{об})$ и по наклону прямой [см. (24.28)] определяют эту величину (рис. 24.22, *б*). Можно найти σ_x непосредственно на дозовой кривой фотолиза[1] вещества (рис. 24.22, *а*)

$$\sigma_x = \frac{1}{D_{об;\,37\%}}, \qquad \textbf{(24.29)}$$

где $D_{об;\,37\%}$ — доза облучения, при которой концентрация вещества уменьшилась в e раз, другими словами, осталось неразрушенными 37% молекул.



а) *б*)

Рис. 24.22

[1] Фотолиз — химическая модификация вещества под действием света.

В фотохимии спектром действия называют зависимость $\sigma_x(\lambda)$. Эту зависимость можно найти, используя связь $\sigma_x = s\varphi_x$. Дело в том, что квантовый выход фотохимических реакций (подобно квантовому выходу флуоресценции, см. § 24.6) в растворах не зависит от длины волны действующего света, т. е. $\varphi_x(\lambda) = \text{const}$. Физически это означает, что независимо от энергии возбуждения $h\nu$ молекула сначала израсходует часть этой энергии, пока не перейдет в нижнее возбужденное состояние (см. § 24.6 и рис. 23.16), и только после этого сможет начать фотохимическое превращение. Учитывая это, можно заключить, что спектр действия $\sigma_x(\lambda)$ и спектр поглощения (см. § 24.4) — зависимость $s(\lambda)$ — имеют одинаковый вид, так как различаются только постоянным множителем φ_x. Такая особенность позволяет, сопоставляя спектр действия фотохимической реакции со спектрами поглощения содержащихся в объекте соединений, определить, какое из них поглощает фотоны, вызывающие фотохимические превращения.

Описанная методика определения спектров действия может быть применена к исследованию бактерицидного действия света. Сходство процессов при фотолизе молекул в растворе и при фотоинактивации бактерий в суспензии заключается в следующем. Под действием поглощенного кванта молекула либо совсем не изменится, либо превратится в фотопродукт, т. е. возможны только два исхода, причем вероятность фотолиза определяется квантовым выходом φ_x. Точно так же при поглощении кванта бактерией она либо останется живой, либо погибнет. Концентрацию жизнеспособных бактерий можно определить подобно концентрации неразрушенных молекул в растворе. Вероятность гибели бактерии при поглощении кванта определяется квантовым выходом бактерицидного эффекта и (так же как при фотолизе молекул) не зависит от длины волны действующего света. Поэтому если в формулы (24.27)—(24.29) вместо концентрации молекул подставить концентрацию бактерий, то можно найти σ_x для бактерицидного эффекта и построить спектр действия. Так, например, было установлено, что кривая гибели бактерий под действием УФ-излучения (спектр фотобиологического действия) подобна спектру поглощения нуклеиновых кислот, представляющему широкую неструктурированную полосу в диапазоне длин волн 200—315 нм с максимумом при 260 нм. Это дало основание сделать вывод, что гибель бактерий обусловлена повреждением именно нуклеиновых кислот. На этом основано использование в медицине для обеззараживания помещений ртутных бактерицидных ламп, излучающих монохроматический свет с длиной волны 254 нм, что соответствует максимуму спектра действия бактерицидного эффекта.

Сложнее дело обстоит в случае таких процессов, как эритема кожи. Эритема заключается в расширении кровеносных сосудов кожи, что видно по ее покраснению. Зависимость степени покраснения от дозы характеризуется наличием пороговой дозы (*минимальной эритемной дозы*, МЭД), вызывающей едва различимое глазом покраснение. Подпороговые дозы эритему не вызывают совсем. При увеличении дозы облучения степень покраснения растет пропорционально логарифму дозы. Здесь отсутствуют количественные показатели, подобные числу разрушенных молекул или погибших клеток, которые можно было бы использовать для расчета σ_x. Выход из положения был найден при введении следующего предположения. Если облучать кожу разными длинами волн и при этом подбирать каждый раз дозу так, чтобы возникающий эффект (степень покраснения) был одинаков, то можно думать, что одинаковая степень покраснения (стандартный эффект) является результатом одинаковых фотохимических повреждений. В качестве стандартного эффекта обычно выбирают минимальное покраснение, вызываемое МЭД. Величина МЭД является функцией длины волны действующего света. По аналогии с (24.29) было предложено определять величину *эритемной эффективности* как 1/МЭД. Предполагается, что 1/МЭД пропорциональна σ_x, подобно $1/D_{\text{об; }37\%}$ из выражения (24.29). Спектры действия эритемы представлены на рис. 24.23, кривая *1* измерена через 8 часов после облучения, *2* — через 24 часа и *3* — через 10 суток. Выяснилось, что динамика развития, длительность существования и степень покраснения кожи сильно зависят от длины волны действующего света. На этом основании в медицине весь диапазон УФ-излучения принято подразделять на три области: УФ-А (320—400 нм), УФ-В (280—320 нм) и УФ-С ($\lambda < 280$ нм). УФ-А-излучение наименее эффективно. УФ-В-излучение способно вызывать наиболее интенсивную и длительную эритему, переходящую при дозах более 10 МЭД в эдему (ожог кожи). УФ-С-излучение может вызвать только умеренное покраснение, ни при каких дозах не пе-

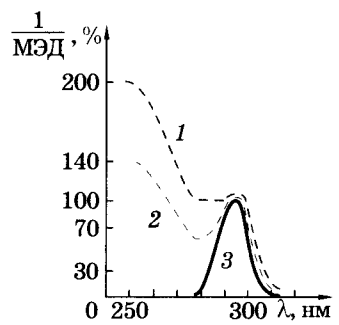


Рис. 24.23

реходящее в эдему. Регистрация спектров действия эритемы показала, что данная реакция кожи является следствием суммирования двух или трех фотохимических процессов, каждый из которых по-разному зависит от длины волны действующего света.

В случае других сложных фотобиологических процессов можно для регистрации спектров действия использовать величину *биологической эффективности света* (БЭС), обратную дозе облучения, вызывающей стандартный биологический эффект $D_{об,\ ст}$

$$БЭС = 1/D_{об,\ ст} \sim \sigma_x. \qquad (24.30)$$

Изучение спектров действия показало, что УФ-В-излучение наиболее эффективно вызывает не только эритему, но также пигментацию и рак кожи, кроме того, оно подавляет Т-клеточное звено иммунитета и вызывает многие другие эффекты у человека и животных. Отсюда понятно внимание, уделяемое состоянию озонового слоя атмосферы. Озон является естественным светофильтром, определяющим коротковолновую границу солнечного излучения, достигающего поверхности Земли. В ясный полдень на экваторе на высоте моря коротковолновая граница проходит вблизи 285 нм. Суммарно УФ-В-излучение составляет менее 1,5% энергии солнечного света, но обусловливает наиболее острые фотобиологические эффекты. Уменьшение озонового слоя резко увеличивает количество УФ-В-излучения, что крайне опасно для живых организмов.

Сопоставление спектров действия со спектрами поглощения содержащихся в биологическом объекте молекул позволяет определить, какие молекулы поглощают фотоны, запускающие исследуемый фотобиологический процесс. Такие фотобиологические процессы, как зрительный эффект, фотомутагенез, фотоканцерогенез, эритема и др., индуцируются под действием света, поглощаемого нормально содержащимися в объекте молекулами, например, зрительными пигментами, нуклеиновыми кислотами, белками и др. В некоторых случаях наблюдается резкое повышение светочувствительности биологических систем в результате попадания в них экзогенных (посторонних) молекул, способных поглощать ультрафиолет или видимый свет. Вещества, повышающие чувствительность биообъектов к свету, называют *фотосенсибилизаторами*, а инициируемые ими фотобиологические процессы — *фотосенсибилизированными*. Форма спектра действия такого процесса совпадает со спектром поглощения соответствующего фотосенсибилизатора.

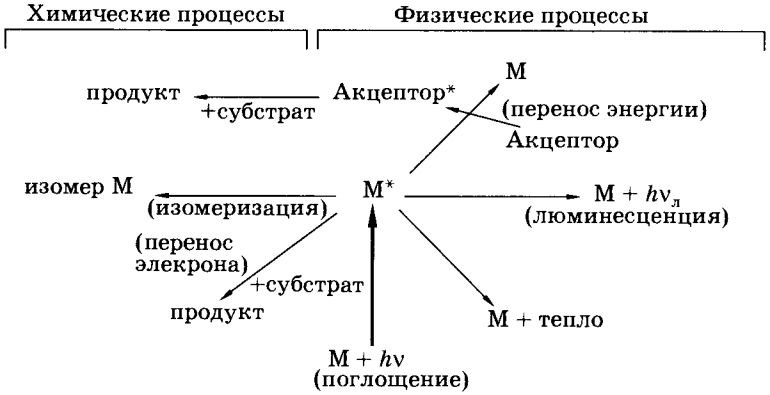


Рис. 24.24

Определение вида молекул, поглотивших свет, существенно потому, что свойства электронно-возбужденных молекул сильно отличаются от свойств тех же молекул в основном (невозбужденном) состоянии. Благодаря такому изменению свойств молекул и инициируются фотобиологические процессы.

Молекула (М) обязательно избавляется от избыточной энергии, расходуя ее либо в физических процессах, либо в фотохимических реакциях. Основные пути расходования энергии возбужденных молекул (М*) показаны на рис. 24.24. Может произойти безызлучательный переход энергии в тепло, либо излучение квантов люминесценции с возвращением молекулы в основное состояние (§ 24.6).

Все многообразие фотохимических реакций электронно-возбужденных молекул сводится к фотоизомеризации или переносу электрона между возбужденной молекулой и субстратом.

Фотоизомеризация — это изменение пространственной структуры молекул, осуществляющееся в электронно-возбужденном состоянии. Известно, что у органических молекул, находящихся в основном состоянии, невозможно вращение их частей вокруг двойных связей. Такие молекулы имеют плоскую *цис-* или *транс*-конфигурацию (рис. 24.25). Это связано с особенностями пе-



Рис. 24.25

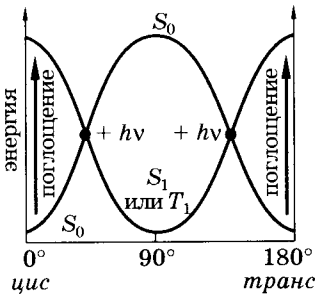


Рис. 24.26

рекрывания π-орбиталей при образовании второй связи (см. рис. 23.15, *б*). Для того чтобы повернуть две части молекулы вокруг двойной связи, нужно уменьшить области перекрывания π-орбиталей, для этого нужно затратить значительную энергию (кривая с индексом S_0 на рис. 24.26), такой процесс самопроизвольно произойти не может. Наименьшую энергию молекула имеет при перекрывании π-орбиталей, поэтому π-орбитали называют *связывающими*. При поглощении фотона и переходе в возбужденное состояние молекула сразу после перехода сохраняет плоскую конфигурацию основного состояния. Но возбужденные π*-орбитали (S_1 или T_1 состояния на рис. 24.26) являются *разрыхляющими*: наименьшую энергию имеет конфигурация, в которой π-связь разрывается и две части молекулы поворачиваются вокруг σ-связи на 90°. При возвращении молекулы в основное состояние она может претерпеть *цис-транс-* или *транс-цис-изомеризицию*; *цис-транс*-фотоизомеризации пигмента ретиналя принадлежит ведущая роль в зрительной рецепции (см. § 24.10).

К фотохимическим превращениям молекулы, поглотившей фотон, приводят резкие изменения ее ***донорно-акцепторных свойств***. В возбужденной молекуле освобождается электронная вакансия на верхней заполненной орбитали (S_0 на рис. 23.16), в результате чего молекула становится акцептором электрона, способным вступать в реакции фотовосстановления с подходящими донорами. Примером такой реакции может служить открытая А. А. Красновским (1948) реакция фотовосстановления хлорофилла. Это открытие имело фундаментальное значение в познании процесса фотосинтеза. Наряду с этим в возбужденной молекуле появляется электрон на сравнительно высоко расположенной нижней свободной орбитали (S_1 или T_1 на рис. 23.16). В результате этого молекула становится донором электрона и легко вступает в реакции фотоокисления. Так, возбужденные ароматические аминокислоты триптофан и тирозин способны отдавать электрон молекулам среды, что приводит к их ионизации.

Если рядом с возбужденной молекулой находится подходящий акцептор, то энергия может быть перенесена на него. Электронно-возбужденный акцептор может либо сам химически модифицироваться или вступить в реакцию с субстратом. Подобные реакции могут быть отнесены к фотосенсибилизированным.

Механизмы фотосенсибилизированных реакций крайне разнообразны. Практически удобно классифицировать их на два вида: нуждающиеся в присутствии кислорода и не нуждающиеся в нем. Фотобиологические эффекты, для осуществления которых требуется участие трех составляющих — света, кислорода и фотосенсибилизатора — принято называть *фотодинамическими эффектами*, а соответствующие фотосенсибилизаторы — *фотодинамическими*. Фотодинамические эффекты инициируются фотосенсибилизаторами из триплетного электронно-возбужденного состояния T_1 (см. рис. 23.16).

Более детальная классификация фотосенсибилизированных реакций основана на природе реакционно-способных фотопродуктов, непосредственно реагирующих с субстратом. Рассмотрим этот вопрос на примере псораленов — фотосенсибилизаторов растительного происхождения, повышающих чувствительность биообъектов к УФ-А-излучению.

В реакциях типа I происходит перенос электрона (или водорода) между электронно-возбужденным фотосенсибилизатором и субстратом, сопровождающийся образованием свободных радикалов, которые взаимодействуют с молекулярным кислородом.

В реакциях типа II происходит перенос энергии от фотосенсибилизатора, находящегося в триплетном электронно-возбужденном состоянии T_1, на молекулярный кислород по схеме:

$S_0 \xrightarrow{h\nu} S_1 \rightarrow T_1$ — поглощение света и образование триплетного состояния фотосенсибилизатора;

$T_1 \xrightarrow{O_2} S_0 + {}^1O_2$ — перенос энергии и образование синглетного электронно-возбужденного молекулярного кислорода. Образующийся при этом синглетный кислород ${}^1O_2$ взаимодействует с субстратом, окисляя последний:

$${}^1O_2 + \textit{субстрат} \rightarrow \textit{окисленный субстрат}.$$

В реакциях типа II фотосенсибилизатор работает подобно катализатору и в реакции не расходуется. Субстратами фотоокисления служат молекулы ДНК, белков, ненасыщенных липидов и другие.

В реакциях типа III участвуют электронно-возбужденные молекулы псораленов, предварительно в темноте встроившиеся в

двуспиральную ДНК. При этом они ковалентно присоединяются к тимину, повреждая либо одну из нитей двуспиральной ДНК, либо образуя межнитевую сшивку в двуспиральной молекуле ДНК.

Реакции типов I—III могут осуществляться только в том случае, если субстрат облучается в присутствии фотосенсибилизатора. Это связано с коротким временем жизни реакционно-способных фотопродуктов. Так, время жизни синглетных и триплетных электронно-возбужденных состояний молекул составляет, соответственно, около 10^{-9} и 10^{-6} с, синглетного кислорода — около 10^{-6} с, свободных радикалов — микро- или миллисекунды. Невозможно фотомодифицировать субстрат, сначала отдельно облучив фотосенсибилизатор, а затем после выключения света добавив к нему субстрат.

Модификация субстрата путем добавления к нему предварительно облученных фотосенсибилизаторов возможна в реакциях типа IV. При облучении растворов фотосенсибилизаторов в присутствии кислорода в них образуются относительно стабильные продукты фотоокисления, имеющие время жизни от нескольких секунд до нескольких дней. Эти продукты фотоокисления при столкновениях с молекулами субстрата реагируют с ними, давая биологически активные конечные продукты.

Фотохимические реакции, инициируемые светом в тканях человека и животных, могут иметь как положительные, так и отрицательные последствия. Раздел медицины, посвященный лечебному применению или патологическим последствиям действия оптического излучения, называется ***фотомедициной***.

Известны терапевтические эффекты оптического излучения, осуществляющиеся за счет поглощения света молекулами, содержащимися в биологических тканях. Так, УФ-В-облучение кожи используется для лечения кожного заболевания — псориаза. Фототерапия без использования экзогенных фотосенсибилизаторов применяется для лечения желтухи новорожденных. Желтуха новорожденных возникает из-за накопления в крови аномально высоких концентраций продукта распада гемоглобина — билирубина. Это связано с тем, что в первые дни жизни у некоторых детей наблюдается недостаток фермента глюкуронилтрансферазы, превращающей плохо растворимый в воде билирубин в его водорастворимое производное. Гидрофобный билирубин склонен накапливаться в клетках мозга, что может приводить к необратимым изменениям в центральной нервной системе. Билирубин имеет максимум поглощения в синей области спектра. Под действием синего света билирубин легко фотоизомеризуется непосредственно в кровеносных сосудах, образуя водорастворимые продукты, легко выводящиеся из организма. Таким образом устраняются патологические последствия гипербилирубинемии.

Существует ряд терапевтических методов, называемых *фотохимиотерапией*, в которых используется совместное воздействие экзогенных фотосенсибилизаторов и света. Наиболее распространены два вида фотохимиотерапии: ПУВА-терапия кожных заболеваний и фотодинамическая терапия злокачественных новообразований.

В ПУВА-терапии[1] в качестве фотосенсибилизаторов используются псоралены в сочетании с УФ-А-облучением кожи. Она эффективна при псориазе, витилиго, кожной Т-клеточной лимфоме и других дерматозах. При ПУВА-терапии в коже человека протекают все IV типа фотосенсибилизированных реакций, наиболее важны из них реакции типов III и IV.

Фотодинамическая терапия (ФДТ) используется для удаления опухолей, доступных для облучения светом. ФДТ основана на применении локализующихся в опухолях фотосенсибилизаторов, повышающих чувствительность тканей при их последующем облучении видимым светом. Часто в качестве фотосенсибилизаторов при ФДТ используют производные гематопорфирина, поглощающие в красной области спектра. Ведущую роль при ФДТ играют реакции типа II. Разрушение опухолей при ФДТ основано на трех эффектах: 1) прямое фотохимическое уничтожение клеток опухоли; 2) повреждение кровеносных сосудов опухоли, приводящее к ишемии и гибели опухоли; 3) ФДТ способно вызывать воспалительную реакцию, мобилизующую противоопухолевую иммунную защиту тканей организма.

§ 24.10. Биофизические основы зрительной рецепции

В этом параграфе описаны процессы, протекающие от момента поглощения кванта света молекулой зрительного пигмента до возникновения рецепторного потенциала на клеточной мембране палочки.

---

[1] Русское название этой терапии возникло путем транслитерации английской аббревиатуры PUVA, произошедшей от Psoralens + UVA-radiation.

Сначала рассмотрим, как устроен зрительный рецептор. На рис. 24.27 показаны: *1* — разрез глаза; *2* — колбочка; *3* — палочка (М — скопление митохондрий); *4* — диск наружного сегмента палочки; *5* — фрагмент мембраны диска со встроенной в нее молекулой родопсина; *6* — хромофорная группировка родопсина — ретиналь в *11-цис-* и полностью-*транс*-конформации. Свет, попавший в глаз (см. § 21.4), фокусируется оптической системой на слой светочувствительных клеток сетчатки — палочек и колбочек. Палочки (их около 125 млн) располагаются по всей поверхности полусферической сетчатки и отвечают за черно-белое, или сумеречное, зрение. Колбочек значительно меньше (примерно 6,5 млн). Они, главным образом, сконцентрированы в центральной части сетчатки, на прямой, проходящей через центры роговицы и хрусталика, и отвечают за цветовое зрение при достаточно ярком освещении.

Строение сетчатки человека и позвоночных животных на первый взгляд может показаться парадоксальным. Светочувствительные клетки находятся в заднем слое сетчатки. Прежде чем свет попадет на них, он должен пройти через несколько слоев нервных клеток. Мало того, сами палочки и колбочки ориентированы к свету своим внутренним сегментом, не содержащим зрительного пигмента (см. рис. 24.27). Однако такая организация не снижает существенно чувствительности глаза к свету, так как нервные клетки и внутренние сегменты самих светочувствительных клеток прозрачны для видимого света.

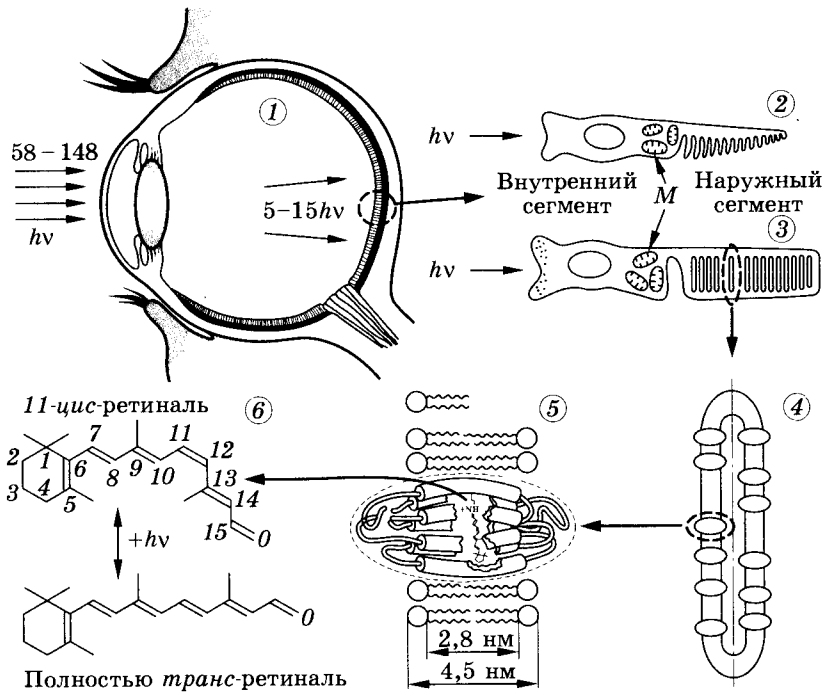


Рис. 24.27

Самые ранние исследования зрения касались порога чувствительности глаза. ***Абсолютный порог чувствительности зрения*** человека (т. е. минимальная еще обнаруживаемая энергия светового импульса при отсутствии светового фона и в условиях полной световой адаптации) равен $2{,}1 \cdot 10^{-17}$ — $5{,}7 \cdot 10^{-17}$ Дж на поверхности роговицы глаза, что соответствует 58—148 квантам сине-зеленого света. Однако из них только 5—15 квантов поглощаются собственно молекулами зрительного пигмента в палочках сетчатки, а остальные теряются. Около 4% света отражается от роговицы, около 50% поглощается оптическими средами глаза, при этом около 80—85% света, дошедшего до сетчатки, проходит сквозь нее и поглощается в клетках пигментного эпителия. Благодаря пигментному эпителию, подстилающему сетчатку, резко уменьшается количество отраженного и рассеянного от задней стенки глаза света, и тем самым улучшается острота зрения. Так как в сетчатке содержится 125 млн палочек, все кванты при пороговой интенсивности (а их всего 5—15) поглощаются разными палочками.

Рассмотрим строение и функции палочек (см. рис. 24.27). Зрительный пигмент палочек родопсин сосредоточен в наружных сегментах палочек, где он встроен в зрительные диски. Диски представляют собой замкнутые бимолекулярные липидные мембраны, напоминающие собой расплющенные воздушные шары, уложенные в стопку. Наружный сегмент соединен с внутренним сегментом тонкой соединительной ножкой. Во внутреннем сегменте рядом с ножкой сосредоточено большое количество митохондрий, в нем же располагается ядро клетки. В конце внутреннего сегмента, повернутого к свету, находится синаптический контакт с нервным волокном.

Молекулы родопсина пронизывают липидный бислой мембран зрительных дисков. Для нормальной фоторецепции очень важно, чтобы молекулы пигмента могли совершать быструю латеральную диффузию и находились в очень «мягком» окружении в

мембране, так как молекулы пигмента после поглощения фотона претерпевают значительные конформационные перестройки. Низкая вязкость липидного слоя обусловлена очень высоким (до 50%) содержанием полиненасыщенной докозагексеновой жирной кислоты (22 : 6 — она содержит 22 атома углерода и 6 ненасыщенных двойных связей). Однако по этой же причине в липидах мембран могут легко активироваться процессы пероксидного окисления, что, по-видимому, лежит в основе ряда заболеваний глаз.

Зрительный пигмент родопсин — сложный белок. Он состоит из гликопротеидной части — опсина и хромофорной группы — ретинальдегида, или просто ретиналя. Ретиналь может иметь несколько пространственных изомеров, например *9-цис*-ретиналь, 11-*цис*-ретиналь, полностью-*транс*-ретиналь и др. Вся совокупность фотохимических превращений родопсина зиждется на двух фундаментальных явлениях. Во-первых, ретиналь под действием света способен переходить в различные *цис-транс*-изомеры, наиболее важные из которых (*11-цис*- и полностью-*транс*-ретиналь) изображены на рис. 24.27. Во-вторых, только одна из этих изомерных форм, а именно *11-цис*-ретиналь, структурно соответствует центру связывания ретиналя на опсине и образует с ним прочный комплекс. Другие изомеры таким соответствием не обладают и комплекс хромофор-белок непрочен.

Единственной фотохимической реакцией, которая приводит к появлению ощущения света, в зрительном рецепторе является фотоизомеризация (см. § 24.9) *11-цис*-ретиналя в полностью-*транс*-конформацию. После образования *транс*-формы пространственное соответствие хромофора и опсина нарушается, а это приводит к целой серии конформационных перестроек в молекуле белка, которые сопровождаются изменениями в спектре поглощения зрительного пигмента. Перестройки родопсина завершаются его распадом на опсин и полностью-*транс*-ретиналь. Далее фермент изомераза переводит полностью-*транс*-ретиналь в 11-*цис*-ретиналь, после чего происходит его присоединение к опсину и регенерация родопсина.

Фотопревращения родопсина приводят к электрическому ответу рецепторной клетки. За этим процессом можно проследить путем регистрации электроретинограмм (экстраклеточного отведения потенциалов от сетчатки). Сразу после освещения палочки короткой вспышкой света наблюдается продолжающийся примерно 1 мс ранний рецепторный потенциал (РРП), амплитуда которого растет с увеличением интенсивности вспышки, но не превышает 5 мВ (рис. 24.28). Затем через ~ 1 мс развивается поздний рецепторный потенциал (ПРП). Обращают на себя внимание несколько особенностей рецепторных потенциалов. Во-первых, в отличие от всех других известных клеток на цитоплазматической мембране наружных сегментов палочек потенциал имеет знак (+) внутри и знак (−) снаружи. Под действием света происходит развитие некоторого подобия потенциала действия нервных клеток, но с противоположным знаком. Во-вторых, индуцированный светом сигнал состоит из двух фаз: РРП и ПРП, природа которых совершенно различна. По-видимому, РРП связан с перемещением молекул родопсина во время конформационных перестроек, вызванных освещением. На молекуле этого белка имеются фиксированные заряды, положение которых относительно бислоя липидов после поглощения квантов света меняется, что и является причиной РРП. Следует подчеркнуть, что в возникновении РРП не участвуют никакие процессы изменения ионной проницаемости мембран. После РРП начинаются процессы совершенно иной природы, в которых решающую роль играет движение ионов через клеточную мембрану.

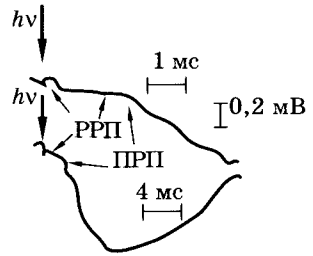


Рис. 24.28

Особенностью наружных сегментов палочек сетчатки является то, что в покое (в темноте) их цитоплазматическая мембрана имеет высокую проницаемость для ионов натрия, тогда как в покое мембраны нервных и мышечных клеток имеют высокую проницаемость для ионов калия. Асимметрия распределения ионов в палочке по сравнению с внешней средой такая же, как и для других клеток: внутри мало натрия, но много калия. Ведущую роль в открывании натриевых каналов цитоплазматических мембран палочек играет циклический гуанозинмонофосфат, на свету его концентрация падает. Поэтому после поглощения света родопсином натриевые каналы проницаемости закрываются и главным потенциал-образующим ионом становится калий. В результате развивается поздний рецепторный потенциал со знаком (−) внутри клетки.

При слабом свете максимум чувствительности глаза человека расположен в области около 500 нм, что соответствует максимуму поглощения родопсина, содержащегося в палочках. На ярком свету максимум чувствительности смещается к 550 нм, что соответствует максимуму спектра поглощения пигмента в наиболее

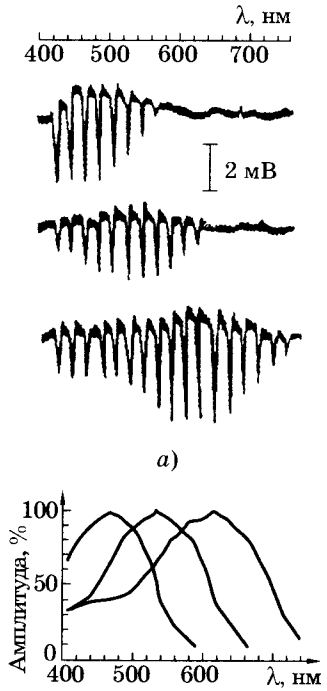


Рис. 24.29

распространенном типе колбочек. Пигмент колбочек содержит тот же самый 11-*транс*-ретиналь, как и родопсин, но белковая часть пигмента отличается, поэтому пигменты колбочек носят название *иодопсинов*.

При измерении спектров поглощения отдельных колбочек оказалось, что каждая колбочка содержит только один вид иодопсина, а типов колбочек всего три. Иодопсины человека имеют максимумы поглощения при 445, 535 и 570 нм. Поглощение света иодопси-нами приводит к появлению РРП в колбочках. Для того чтобы измерить спектр действия РРП, регистрируют вызываемые короткими вспышками яркого монохроматического света амплитуды РРП (рис. 24.29, *а*). На основании этих измерений строят спектры действия РРП (рис. 24.29, *б*), совпадающие по форме со спектрами поглощения зрительных пигментов. В сетчатке карпа таким способом обнаружено три типа колбочек с максимумами спектров действия при 462, 529 и 611 нм.

При некоторых генетических заболеваниях нарушается синтез одного из белков иодопсинов, в результате чего не образуется соответствующий пигмент цветного зрения и человек утрачивает способность различать цвета. Эта болезнь называется *дальтонизмом*.

Роговица и хрусталик помимо того, что они ответственны за формирование изображения на сетчатке, выполняют также роль граничных светофильтров, пропускающих излучение с длинами волн более 300 и 400 нм, соответственно. В обеих структурах при очень больших дозах УФ-облучения происходят фотохимические повреждения, выражающиеся в помутнении и воспалительных реакциях. Главная причина помутнения хрусталика (катаракты) — его фотоповреждение. В присутствии сенсибилизаторов фотоповреждения глаз резко усиливаются. Так, при ПУВА-терапии заболеваний кожи (см. § 24.9) часть сенсибилизатора, естественно, проникает в структуры глаза. УФ-А-облучение сенсибилизированных животных приводило к морфологически выраженным повреждениям роговицы, вещества внутренней камеры глаза, ирисовой диафрагмы и хрусталика. В основе фотосенсибилизированного псораленами повреждения хрусталика глаза лежат окислительные реакции с белками хрусталика человека — кристаллинами. Максимум спектра действия сенсибилизированного псораленами фотоповреждения глаз расположен при 320—340 нм, хвост спектра доходит до 380 нм. Больные, получающие ПУВА-терапию, во время УФ-А-облучения обязательно надевают светозащитные очки, чтобы избежать повреждения глаз. Им также в течение нескольких часов после приема таблеток псораленов нельзя находиться на прямом солнечном свету, содержащем большое количество УФ-А-излучения. Фотоповреждения хрусталика необратимы, так как поврежденные молекулы из него никогда не выводятся.

До сетчатки УФ-излучение не доходит, поэтому псоралены и другие фотосенсибилизаторы, поглощающие при $\lambda < 400$ нм, не эффективны. Однако в клетках сетчатки осуществляются фотоповреждения под действием света, поглощенного хромофорной группой зрительных пигментов ретиналем. Ретиналь, входящий в состав зрительных пигментов, расходует энергию электронного возбуждения в процессах *цис-транс*-изомеризации. В других фотохимических реакциях связанный с опсином *11-цис*-ретиналь, по-видимому, практически не участвует. Но свободный полностью-*транс*-ретиналь является на свету эффективным генератором синглетного кислорода, т. е. способен фотосенсибилизировать реакции типа II (см. § 24.9). Квантовый выход триплетных возбужденных состояний свободного полностью-*транс*-ретиналя высок; он составляет 0,4—0,7. Максимумы спектров поглощения различных изомеров свободного ретиналя располагаются при 360—380 нм, длинноволновый хвост захватывает фиолетовую область видимого света. Поэтому фиолетовый свет вызывает генерацию триплетных возбужденных состояний ретиналя, что в свою очередь приводит к значительному окислительному повреждению мембран дисков рецепторных клеток. Субстратом окисления являются главным образом остатки полиненасыщенной докозагексеновой жирной кислоты, содержание которой в фосфолипидах мембран рецепторных дисков очень велико. Для защиты мембран дисков от фотосенсибилизированного окисления в них содержится витамин Е (α-токоферол) в высоких концентрациях. Защитный эффект этого витамина обусловлен тем, что он, с одной стороны, способен переводить синглетный кислород в основное состояние, с

другой стороны, он является эффективным ингибитором свободно-радикальных реакций цепного окисления ненасыщенных липидов. Фотоповреждение мембран, сенсибилизированное ретиналем, — очень важный негативный эффект, лежащий в основе повреждения сетчатки глаз под действием видимого света. Для защиты глаз можно рекомендовать два способа: применять антиоксиданты, а также пользоваться светозащитными очками, не пропускающими фиолетовый и синий свет. Ношение синих очков (пропускающих синий свет) очень вредно для глаз, так как эти очки, ослабляя интегральный световой поток, стимулируют расширение зрачков. На сетчатку в результате попадает большее количество фиолетового света, и фотосенсибилизируемое свободным ретиналем повреждение усиливается.

ГЛАВА 25

Магнитный резонанс

В этой главе, как и в предыдущей, рассматриваются явления, связанные с излучением и поглощением энергии атомами и молекулами.

Магнитный резонанс — избирательное поглощение электромагнитных волн веществом, помещенным в магнитное поле.

§ 25.1. Расщепление энергетических уровней атомов в магнитном поле

В § 13.1, 13.2 было показано, что на контур с током, помещенный в магнитное поле, действует момент силы. При устойчивом равновесии контура его магнитный момент совпадает с направлением вектора магнитной индукции. Такое положение занимает контур с током, предоставленный самому себе. Существенно иначе ориентируются в магнитном поле магнитные моменты частиц. Рассмотрим этот вопрос с позиции квантовой механики.

В § 23.6 отмечалось, что проекция момента импульса электрона на некоторое направление принимает дискретные значения.

Чтобы обнаружить эти проекции, необходимо каким-то образом выделить направление Z. Один из наиболее распространенных способов — задание магнитного поля, в этом случае определяют проекцию орбитального момента импульса [см. (23.26)], проекцию спина (23.27), проекцию полного момента импульса электрона [см. (23.30)] и проекцию момента импульса атома L_{Az} [см. (23.37)] на направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$.

Связь между моментом импульса и магнитным моментом (13.30) и (13.31) позволяет использовать перечисленные формулы для нахождения дискретных проекций соответствующего магнитного момента на направление вектора $\vec{B}$. Таким образом, в отличие от классических представлений, магнитные моменты частиц ориентируются относительно магнитного поля под некоторыми определенными углами.

Для атома, например, из (23.37) получаем следующие значения проекций магнитного момента p_{mz} на направление вектора магнитной индукции:

$$p_{mz} = -g\frac{e}{2m}L_{Az} = -g\frac{e}{2m}\frac{h}{2\pi}m_J = -g\mu_Б m_J, \qquad (25.1)$$

где $\mu_Б = eh/(4\pi m)$ — ***магнетон Бора*** (см. § 13.1), m — масса электрона, m_J — магнитное квантовое число, g — ***множитель Ланде*** (g-фактор) (см. § 13.4), для заданного уровня энергии атома он зависит от квантовых чисел L, J, S. Знак «−» в (25.1) обусловлен отрицательным зарядом электрона.

Энергия атома в магнитном поле с учетом того, что в отсутствие поля энергия атома равна E_0, определяется формулой

$$E = E_0 + g\mu_Б B m_J. \qquad (25.2)$$

Так как магнитное квантовое число m_J [см. (23.37)] может принимать $2J + 1$ значений от $+J$ до $-J$, то из (25.2) следует, что каждый энергетический уровень при помещении атома в магнитное поле расщепляется на $2J + 1$ подуровней. Это схематически показано на рис. 25.1 для $J = 1/2$. Разность энергий между соседними подуровнями равна

$$\Delta E = g\mu_Б B. \qquad (25.3)$$

Расщепление энергетических уровней приводит и к расщеплению спектральных линий атомов, помещенных в магнитное поле. Это явление называют ***эффектом Зеемана***.

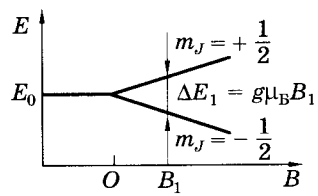


Рис. 25.1

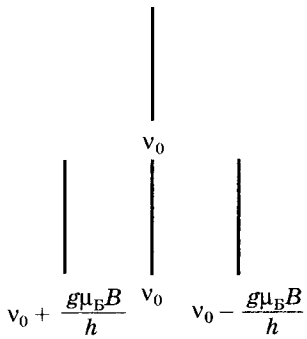


Рис. 25.2

Запишем выражение (25.2) для двух подуровней E_1 и E_2, образованных при наложении магнитного поля:

$$E_1 = E_{01} + g_1\mu_B B m_{J_1},$$
$$E_2 = E_{02} + g_2\mu_B B m_{J_2}, \qquad (25.4)$$

где E_{01} и E_{02} — энергетические уровни атома в отсутствие магнитного поля. Используя (23.31) и (25.4), получаем выражение для излучаемых атомом частот:

$$\nu = (E_{02} - E_{01})/h + \mu_B B(g_2 m_{J_2} - g_1 m_{J_1})/h = \nu_0 + \Delta\nu, \qquad (25.5)$$

где

$$\nu_0 = (E_{02} - E_{01})/h \qquad (25.6)$$

— частота спектральной линии в отсутствие магнитного поля;

$$\Delta\nu = \mu_B B(g_2 m_{J_2} - g_1 m_{J_1})/h \qquad (25.7)$$

— расщепление спектральной линии в магнитном поле. Из (25.7) видно, что $\Delta\nu$ зависит от магнитного квантового числа, множителя Ланде и магнитной индукции поля. Если $g_1 = g_2 = g$, то

$$\Delta\nu = g\mu_B B(m_{J_2} - m_{J_1})/h.$$

Согласно правилам отбора для магнитного квантового числа, имеем

$$\Delta m_J = m_{J_2} - m_{J_1} = 0, \pm 1. \qquad (25.8)$$

Это соответствует трем возможным частотам: $\nu_0 + g\mu_B B/h$, ν_0, $\nu_0 - g\mu_B B/h$, т. е. в магнитном поле спектральная линия расщепляется и превращается в триплет (рис. 25.2). Такое расщепление называется ***нормальным*** или ***простым эффектом Зеемана***. Он наблюдается в сильных магнитных полях или при $g_1 = g_2$.

В слабых магнитных полях при $g_1 \neq g_2$ существует ***аномальный эффект Зеемана***, и расщепление спектральных линий значительно более сложное.

§ 25.2. Электронный парамагнитный резонанс и его медико-биологические применения

У атома, помещенного в магнитное поле, спонтанные переходы между подуровнями одного и того же уровня маловероятны. Однако такие переходы осуществляются индуцированно под влия-

нием внешнего электромагнитного поля. Необходимым условием является совпадение частоты электромагнитного поля с частотой фотона, соответствующего разности энергий между расщепленными подуровнями. При этом можно наблюдать поглощение энергии электромагнитного поля, которое называют ***магнитным резонансом***.

В зависимости от типа частиц — носителей магнитного момента — различают ***электронный парамагнитный резонанс*** (***ЭПР***) и ***ядерный магнитный резонанс*** (***ЯМР***).

ЭПР происходит в веществах, содержащих парамагнитные частицы: молекулы, атомы, ионы, радикалы, обладающие магнитным моментом, обусловленным электронами. Возникающее при этом явление Зеемана объясняют расщеплением электронных уровней (отсюда название резонанса — «электронный»). Наиболее распространен ЭПР на частицах с чисто спиновым магнитным моментом (в зарубежной литературе такую разновидность ЭПР иногда называют ***электронным спиновым резонансом***).

ЭПР был открыт Е. П. Завойским в 1944 г. В первых опытах наблюдалось резонансное поглощение в солях ионов группы железа. Завойскому удалось изучить ряд закономерностей этого явления.

Из выражений (23.31) и (25.3) получаем следующее условие резонансного поглощения энергии:

$$h\nu_{рез} = g\mu_B B_{рез}. \qquad (25.9)$$

Магнитный резонанс наблюдается, если на частицу одновременно действуют постоянное поле индукции $B_{рез}$ и электромагнитное поле с частотой ν. Из условия (25.9) понятно, что обнаружить резонансное поглощение можно двумя путями: либо при неизменной частоте плавно изменять магнитную индукцию, либо при неизменной магнитной индукции плавно изменять частоту. Технически более удобным оказывается первый вариант.

На рис. 25.3 показаны расщепление энергетического уровня электрона (*а*) и изменение мощности P электромагнитной волны, прошедшей образец, в зависимости от индукции магнитного поля (*б*). При выполнении условия (25.9) возникает ЭПР.

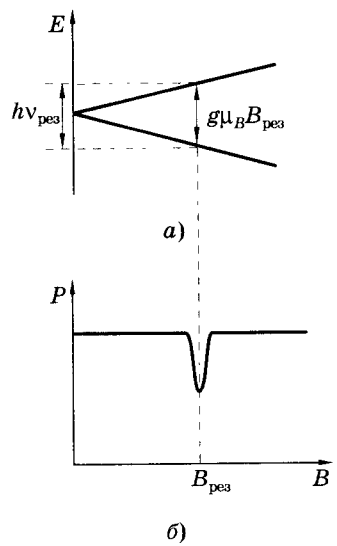


Рис. 25.3

Форма и интенсивность спектральных линий, наблюдаемых в ЭПР, определяются взаимодействием магнитных моментов электронов, в частности спиновых, друг с другом, с решеткой твердого тела и т. п. Выясним, как эти факторы влияют на характер спектров.

Предположим, что условие (25.9) выполняется. Для поглощения энергии необходимо, чтобы у атомов вещества была бóльшая населенность нижних подуровней, чем верхних. В противном случае будет преобладать индуцированное излучение энергии.

При электронном парамагнитном резонансе наряду с поглощением энергии и увеличением населенности верхних подуровней происходит и обратный процесс — безызлучательные переходы на нижние подуровни, энергия частицы передается решетке.

Процесс передачи энергии частиц решетке называют ***спин-решеточной релаксацией***, он характеризуется временем τ. По соотношению Гейзенберга (23.11) это приводит к уширению уровня.

Таким образом, резонансное поглощение вызывается не точно при одном значении B, а в некотором интервале ΔB (рис. 25.4). Вместо бесконечно узкой линии поглощения будет линия конечной ширины: чем меньше время спин-решеточной релаксации, тем больше ширина линии ($\tau_1 < \tau_2$, соответственно кривые *1* и *2* на рис. 25.4).

Уширение линий ЭПР зависит также от взаимодействия спинов электронов (спин-спиновое взаимодействие) и от других взаимодействий парамагнитных частиц. Разные типы взаимодействия влияют не только на ширину линии поглощения, но и на ее форму.

Поглощенная при ЭПР энергия, т. е. интегральная (суммарная) интенсивность линии, при определенных условиях пропорциональна числу парамагнитных частиц. Отсюда следует, что по измеренной интегральной интенсивности можно судить о концентрации этих частиц.

Важными параметрами, характеризующими синглетную (одиночную) линию поглощения, являются $\nu_{рез}$, $B_{рез}$, g (положение точки резонанса), соответствующие условию (25.9). При постоянной частоте ν значение $B_{рез}$ зависит от g-фактора. В простейшем случае g-фактор позволяет определить характер магнетизма системы (спиновый или орбитальный). Если же электрон связан с атомом, входящим в состав твердой кристаллической решетки или какой-либо молекулярной системы, то на него будут влиять

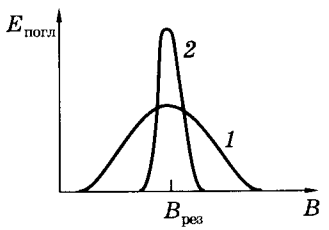


Рис. 25.4

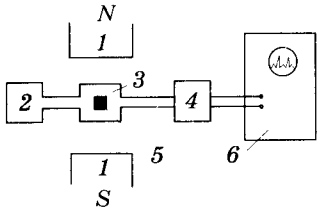


Рис. 25.5

сильные внутренние поля. Измеряя g-фактор, можно получить информацию о полях и внутримолекулярных связях.

Однако если бы при исследовании получалась только синглетная линия поглощения, то многие приложения магнитных резонансных методов были бы невозможны. Большинство приложений, в том числе и медико-биологических, базируется на анализе группы линий. Наличие в спектре ЭПР группы близких линий условно называют ***расщеплением***. Имеется два характерных типа расщепления для спектра ЭПР.

Первое — ***электронное расщепление*** — возникает в тех случаях, когда молекула или атом обладают не одним, а несколькими электронами, вызывающими ЭПР. Второе — ***сверхтонкое расщепление*** — наблюдается при взаимодействии электронов с магнитным моментом ядра.

Современная методика измерения ЭПР основывается на определении изменения какого-либо параметра системы, происходящего при поглощении электромагнитной энергии.

Прибор, используемый для этой цели называют ***ЭПР-спектрометром***. Он состоит из следующих основных частей (рис. 25.5): *1* — электромагнит, создающий сильное однородное магнитное поле, индукция которого может плавно изменяться; *2* — генератор СВЧ-излучения электромагнитного поля; *3* — специальная «поглощающая ячейка», которая концентрирует падающее СВЧ-излучение на образце и позволяет обнаружить поглощение энергии образцом (объемный резонатор); *4* — электронная схема, обеспечивающая наблюдение или запись спектров ЭПР; *5* — образец; *6* — осциллограф.

В современных ЭПР-спектрометрах используют частоту около 10 ГГц (длина волны 0,03 м). Это означает в соответствии с (25.9), что максимум ЭПР поглощения для $g = 2$ наблюдается при $B = 0{,}3$ Тл.

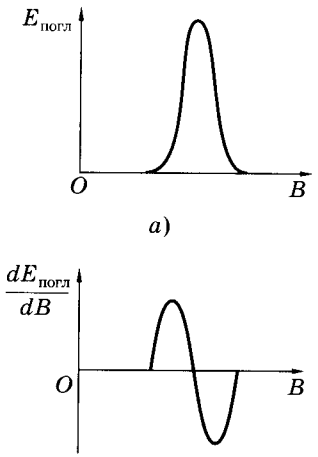


Рис. 25.6

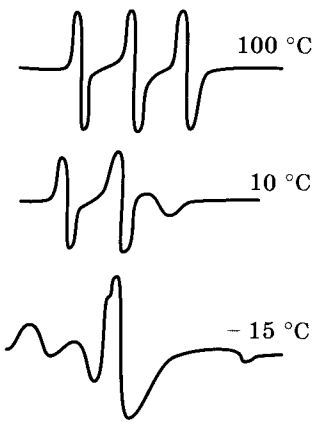


Рис. 25.7

Практически на ЭПР-спектрометрах регистрируют не кривую поглощения энергии (рис. 25.6, *а*), а ее производную (рис. 25.6, *б*).

Одно из медико-биологических применений метода ЭПР заключается в обнаружении и исследовании свободных радикалов. Так, например, спектры ЭПР облученных белков позволили объяснить механизм образования свободных радикалов и в связи с этим проследить изменения первичных и вторичных продуктов радиационного поражения.

ЭПР широко используют для изучения фотохимических процессов, в частности фотосинтеза. Исследуют канцерогенную активность некоторых веществ.

С санитарно-гигиенической целью метод ЭПР используют для определения концентрации радикалов в воздушной среде.

Сравнительно недавно специально для изучения биологических молекул был предложен метод спин-меток, сущность которого состоит в том, что с молекулой исследуемого объекта связывается парамагнитное соединение с хорошо известной структурой. По спектрам ЭПР находят положение такой спин-метки в молекуле. Вводя метки в различные части молекул, можно установить расположение различных групп атомов, их взаимодействия, изучать природу и ориентацию химических связей и обнаруживать молекулярное движение. Присоединение к молекуле не одной, а нескольких спин-меток, например двух, позволяет получить сведения о расстояниях меченых групп и их взаимной ориентации.

Используются также и спиновые зонды — парамагнитные частицы, которые нековалентно связаны с молекулами. Изменение ЭПР-спектра спиновых зондов дает информацию о состоянии окружающих его молекул. На рис. 25.7 показаны ЭПР-спектры нитроксильного радикала, который в качестве спинового зонда помещен в глицерин. С увеличением температуры уменьшается вязкость глицерина, и это изменяет вид спектра ЭПР. Таким образом, по форме спектра ЭПР можно определить микровязкость — вязкость ближайшего окружения спинового зонда. Так, в частности, удается определить микровязкость липидного слоя мембран (см. § 11.2).

В целом исследования биологических объектов методом ЭПР имеют широкую область применений.

§ 25.3. Ядерный магнитный резонанс. ЯМР-интроскопия (магнито-резонансная томография)

Ядерный магнитный резонанс не относится к разделу физики атомов и молекул, однако рассматривается в одной главе с ЭПР как явление магнитного резонанса.

Магнитный момент ядер суммируется из магнитных моментов нуклонов. Обычно этот момент выражают в ядерных магнетонах ($\mu_я$); $\mu_я = 5{,}05 \cdot 10^{-27}$ А · м^2. Магнитный момент протона приближенно равен $p_{mp} = 2{,}79\mu_я$, а нейтрона $p_{mn} = -1{,}91\mu_я$. Знак «–» означает, что магнитный момент нейтрона ориентирован противоположно спину.

Приведем магнитные моменты $p_{mя}$ некоторых ядер, выраженные в ядерных магнетонах.

Таблица 32

	$p_{mя}$		$p_{mя}$
$^4_2$He	0	$^{12}_6$C	0
$^9_4$Be	–1,2	$^{115}_{49}$In	5,5

Магнитный момент ядра, помещенного в магнитное поле, может принимать лишь дискретную ориентацию. Это означает, что энергии ядра будут соответствовать подуровни, расстояние между которыми зависит от индукции магнитного поля.

Если в этих условиях на ядро воздействовать электромагнитным полем, то можно вызвать переходы между подуровнями. Чтобы осуществить эти переходы, а также поглощение энергии электромагнитного поля, необходимо выполнение условия, аналогичного (25.9):

$$h\nu = g_{я}\mu_{я}B, \qquad \textbf{(25.10)}$$

где $g_{я}$ — ***ядерный множитель Ланде.***

Избирательное поглощение электромагнитных волн определенной частоты веществом в постоянном магнитном поле, обусловленное переориентацией магнитных моментов ядер, называют ядерным магнитным резонансом.

ЯМР можно наблюдать при выполнении условия (25.10) лишь для свободных атомных ядер. Экспериментальные значения резонансных частот ядер, находящихся в атомах и молекулах, не соответствуют (25.10). При этом происходит «химический сдвиг», который возникает в результате влияния локального (местного) магнитного поля, создаваемого внутри атома электронными токами, индуцированными внешним магнитным полем. В результате такого «диамагнитного эффекта» возникает дополнительное магнитное поле, индукция которого пропорциональна индукции внешнего магнитного поля, но противоположна ему по направлению. Поэтому полное эффективное магнитное поле, действующее на ядро, характеризуется индукцией

$$B_{эф} = (1 - \sigma)B, \qquad \textbf{(25.11)}$$

где σ — постоянная экранирования, по порядку величины равная 10^{-6} и зависящая от электронного окружения ядер.

Отсюда следует, что для данного типа ядер, находящихся в различных окружениях (разные молекулы или разные, не эквивалентные места одной и той же молекулы), резонанс наблюдается при различных частотах. Это и определяет химический сдвиг. Он зависит от природы химической связи, электронного строения молекул, концентрации данного вещества, типа растворителя, температуры и т. д.

Если два или несколько ядер в молекуле экранированы по-разному, т. е. ядра в молекуле занимают химически не эквивалентные положения, то они имеют различный химический сдвиг. Спектр ЯМР такой молекулы содержит столько резонансных линий, сколько химически не эквивалентных групп ядер данного типа в ней имеется. Интенсивность каждой линии пропорциональна числу ядер в данной группе.

В спектрах ЯМР различают два типа линий по их ширине. Спектры твердых тел имеют большую ширину, и эту область применения ЯМР называют ЯМР *широких линий*. В жидкостях наблюдают узкие линии, и это называют ЯМР *высокого разрешения*.

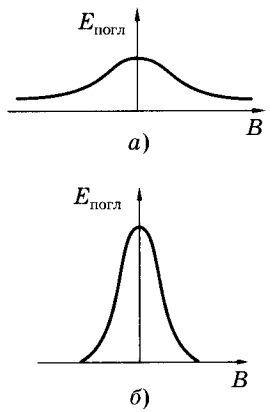


Рис. 25.8

На рис. 25.8 изображены кривые ядерного магнитного резонанса для твердых тел (*а*) и жидкостей (*б*). Острота пика в жидкостях обусловлена следующим. Каждое ядро взаимодействует со своими соседями. Так как ориентация ядерных магнитных моментов, окружающих ядро данного типа, изменяется от точки к точке в веществе, то полное магнитное поле, действующее на различные однотипные ядра, также изменяется. Это означает, что для всей совокупности ядер область резонанса должна представлять собой широкую линию. Однако из-за быстрых перемещений молекул в жидкости локальные магнитные поля недолговечны. Это приводит к тому, что ядра жидкости находятся под воздействием одного и того же среднего поля, поэтому линия резонанса является резкой.

Для химических соединений, в которых наблюдается ЯМР ядер, занимающих химически эквивалентные места в молекуле, наблюдается одиночная линия. Соединения более сложного строения дают спектры из многих линий.

По химическому сдвигу, числу и положению спектральных линий можно установить структуру молекул.

Химики и биохимики широко используют метод ЯМР для исследования структуры от простейших молекул неорганических веществ до сложнейших молекул живых объектов, а также при решении многих задач, связанных с протеканием химических реакций, изучением структур исходных веществ и получающихся в результате реакций продуктов. Одним из преимуществ этого анализа является то, что он не разрушает объектов исследования, как это происходит, например, при химическом анализе.

Очень интересные возможности для медицины может дать определение параметров спектра ЯМР во многих точках образца. Постепенно, послойно проходя весь образец (сканируя), можно получить полное представление о пространственном распределении молекул, содержащих, например, атомы водорода или фосфора (при магнитном резонансе от протонов или ядер фосфора соответственно).

Все это осуществляется без разрушения образца, и поэтому можно проводить исследование на живых объектах. Такой метод называют ***ЯМР-интроскопией*** (об интроскопии см. § 19.8) или ***магнито-резонансной томографией (МРТ)***. Он позволяет различать кости, сосуды, нормальные ткани и ткани со злокачественной патологией. ЯМР-интроскопия позволяет различать изображение мягких тканей, например, отличает изображение серого вещества мозга от белого, опухолевых клеток от здоровых, при этом минимальные размеры патологических «включений» могут составлять доли миллиметра. Можно ожидать, что ЯМР-интроскопия станет эффективным методом диагностики заболеваний, которые связаны с изменением состояний органов и тканей.

Частота электромагнитных волн, вызывающих переходы между энергетическими состояниями при ЭПР и ЯМР, соответствует радиодиапазону. Поэтому оба этих явления относятся к *радиоспектроскопии*.

РАЗДЕЛ

8

Ионизирующие излучения. Основы дозиметрии

Ионизирующим излучением называют потоки частиц и электромагнитных квантов, взаимодействие которых со средой приводит к ионизации ее атомов и молекул. Ионизирующим излучением являются рентгеновское и γ-излучения, потоки α-частиц, электронов, позитронов, протонов, нейтронов.

В разделе описываются как источники ионизирующего излучения (рентгеновские трубки, радионуклиды[1], ускорители), так и физические вопросы применения этого излучения для медицинских целей.

Медикам и биологам несомненно интересны и такие вопросы, как взаимодействие ионизирующего излучения с веществом и элементы дозиметрии ионизирующего излучения.

[1] *Нуклиды* — атомы, ядра которых отличаются по своему составу, т. е. содержат различные количества протонов или нейтронов либо и тех и других частиц. В ряде случаев этот термин относят к общему названию атомных ядер. *Радионуклиды* — нуклиды, способные к радиоактивному распаду.

ГЛАВА 26

Рентгеновское излучение

Рентгеновским излучением называют электромагнитные волны с длиной приблизительно от 80 до 10^{-5} нм. Наиболее длинноволновое рентгеновское излучение перекрывается коротковолновым ультрафиолетовым, коротковолновое — длинноволновым γ-излучением. По способу получения рентгеновское излучение подразделяют на тормозное и характеристическое.

§ 26.1. Устройство рентгеновской трубки. Тормозное рентгеновское излучение

Наиболее распространенным источником рентгеновского излучения является рентгеновская трубка, которая представляет собой двухэлектродный вакуумный прибор (рис. 26.1). Подогревный катод *1* испускает электроны *4*. Анод *2*, называемый часто антикатодом, имеет наклонную поверхность, для того чтобы направить возникающее рентгеновское излучение *3* под углом к оси трубки. Анод изготовлен из хорошо проводящего тепло материала для отвода теплоты, образующейся при ударе электронов. Поверхность анода выполнена из тугоплавких материалов, имеющих большой порядковый номер в таблице Менделеева, например из вольфрама. В отдельных случаях анод специально охлаждают водой или маслом.

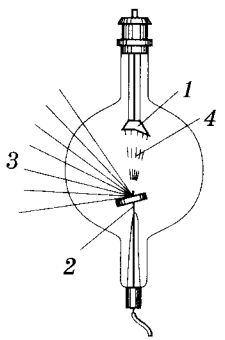


Рис. 26.1

Для диагностических трубок важна точечность источника рентгеновских лучей, чего можно достигнуть, фокусируя электроны в одном месте анода (антикатода). Поэтому конструктивно приходится учитывать две противоположные задачи: с одной стороны, электроны должны попадать на одно место антикатода, с другой стороны, чтобы не допустить перегрева, желательно распределение электронов по разным участкам анода. В качестве одного из интересных технических решений является рентгеновская трубка с вращающимся анодом (рис. 26.2).

В результате торможения электрона (или иной заряженной частицы) электростатическим полем атомного ядра и атомных электронов веществ антикатода возникает ***тормозное рентгеновское излучение.***

Механизм его можно пояснить следующим образом. С движущимся электрическим зарядом связано магнитное поле, индукция которого зависит от скорости электрона. При торможении уменьшается магнитная индукция и в соответствии с теорией Максвелла появляется электромагнитная волна.

При торможении электронов лишь часть энергии идет на создание фотона рентгеновского излучения, другая часть расходуется на нагревание анода. Так как соотношение между этими частями случайно, то при торможении большого количества электронов возникает рентгеновское излучение с непрерывным (сплошным) спектром. На рис. 26.3 представлены зависимости потока рентгеновского излучения от длины волны λ (спектры) при разных напряжениях на рентгеновской трубке: $U_1 < U_2 < U_3$.

В каждом из спектров наиболее коротковолновое тормозное излучение, соответствующее длине волны λ_{min}, возникает тогда, когда энергия, приобретенная электроном в ускоряющем поле, полностью переходит в энергию фотона:

$$eU = h\nu_{max} = hc/\lambda_{min}, \qquad \textbf{(26.1)}$$

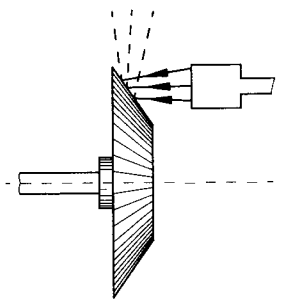
откуда

$$\lambda_{min} = hc/(eU). \qquad \textbf{(26.2)}$$

Эту формулу можно преобразовать в более удобное для практических целей выражение:

$$\lambda_{min} = 12{,}3/U, \qquad \textbf{(26.3)}$$

где λ_{min} — минимальная длина волны, 10^{-10} м; U — напряжение, кВ. Формула (26.3) соответствует рис. 26.3.


Рис. 26.2

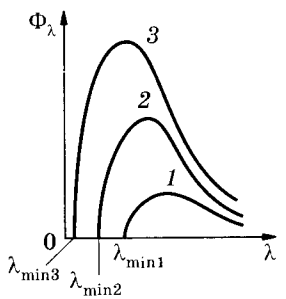


Рис. 26.3

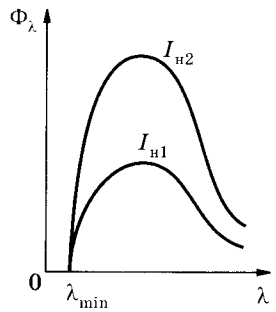


Рис. 26.4

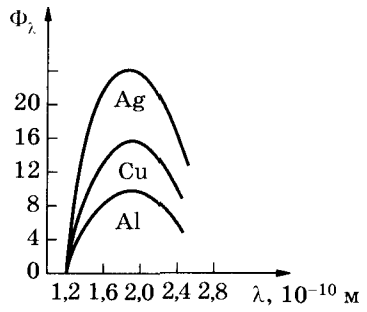


Рис. 26.5

Коротковолновое рентгеновское излучение обычно обладает большей проникающей способностью, чем длинноволновое, и называется *жестким*, а длинноволновое — *мягким*.

Увеличивая напряжение на рентгеновской трубке, изменяют спектральный состав излучения, увеличивая долю жесткой компоненты, как это видно из рис. 26.3 и формулы (26.3).

Если увеличить температуру накала катода, то возрастут эмиссия электронов и сила тока в трубке. Это приведет к увеличению числа фотонов рентгеновского излучения, испускаемых каждую секунду. Спектральный состав его не изменится. На рис. 26.4 показаны спектры тормозного рентгеновского излучения при одном напряжении, но при разной силе тока накала катода: $I_{н1} < I_{н2}$.

Поток рентгеновского излучения вычисляется по формуле

$$\Phi = kIU^2Z, \qquad (26.4)$$

где U и I — напряжение между электродами и сила тока в рентгеновской трубке, Z — порядковый номер атома вещества антикатода, $k = 10^{-9}$ В$^{-1}$ — коэффициент пропорциональности. Спектры, полученные от разных антикатодов при одинаковых U и $I_н$, изображены на рис. 26.5.

§ 26.2. Характеристическое рентгеновское излучение. Атомные рентгеновские спектры

Увеличивая напряжение на рентгеновской трубке, можно заметить на фоне сплошного спектра появление линейчатого, который соответствует ***характеристическому рентгеновскому излучению*** (рис. 26.6). Оно возникает вследствие того, что ускоренные электроны проникают в глубь атома и из внутренних слоев выбивают электроны. На свободные места переходят электроны с верхних уровней (рис. 26.7), в результате высвечиваются фотоны характеристического излучения. Как видно из рисунка, характеристическое рентгеновское излучение состоит из серий K, L, M и т. д., наименование которых и послужило для обозначения электронных слоев. Так как при излучении K-серии освобождаются места в более высоких слоях, то одновременно испускаются и линии других серий.

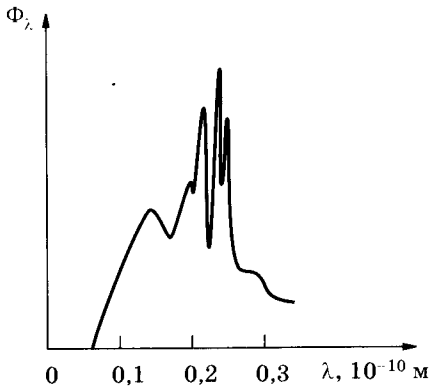


Рис. 26.6

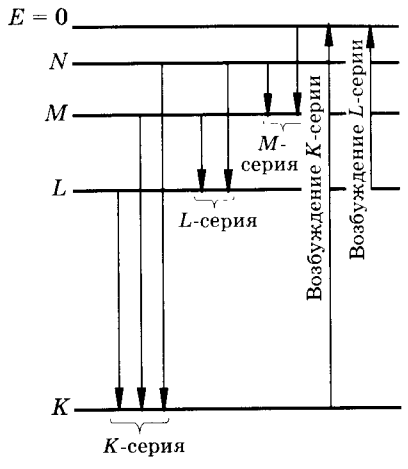


Рис. 26.7

В отличие от оптических спектров характеристические рентгеновские спектры разных атомов однотипны. На рис. 26.8 показаны спектры различных элементов. Однотипность этих спектров обусловлена тем, что внутренние слои у разных атомов одинаковы и отличаются лишь энергетически, так как силовое воздействие со стороны ядра увеличивается по мере возрастания порядкового номера элемента. Это обстоятельство приводит к тому, что характеристические спектры сдвигаются в сторону больших частот с увеличением заряда ядра. Такая закономерность известна как ***закон Мозли***:

$$\sqrt{\nu} = A(Z - B), \qquad (26.5)$$

где ν — частота спектральной линии, Z — атомный номер испускающего элемента, A и B — постоянные.

Экспериментальные зависимости рис. 26.8 иллюстрируют закон Мозли (серии K, L, M, по оси абсцисс отложена длина волны $\lambda = \frac{c}{\nu}$).

Есть еще одна разница между оптическими и рентгеновскими спектрами. Характеристический рентгеновский спектр атома не зависит от химического соединения, в которое этот атом входит. Так, например, рентгеновский спектр атома кислорода одинаков для O, O_2 и H_2O, в то время как оптические спектры этих соединений существенно различны. Эта особенность рентгеновского излучения атома послужила основанием и для его названия (***характеристическое***).

Характеристическое излучение возникает всегда при наличии свободного места во внутренних слоях атома независимо от причины, которая его вызвала. Так, например, характеристическое излучение сопровождает один из видов радиоактивного распада (см. § 27.1), который заключается в захвате ядром электрона с внутреннего слоя.

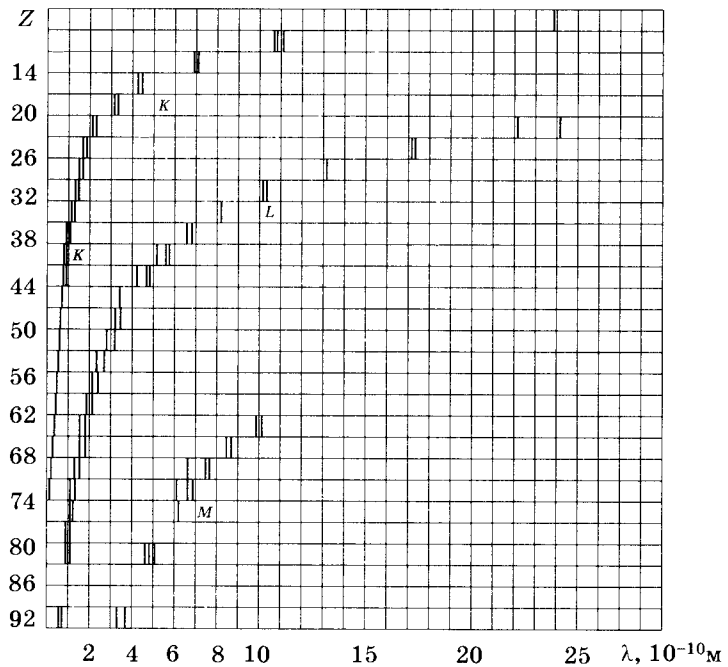


Рис. 26.8

§ 26.3. Взаимодействие рентгеновского излучения с веществом

Регистрация и использование рентгеновского излучения, а также воздействие его на биологические объекты определяются первичными процессами взаимодействия рентгеновского фотона с электронами атомов и молекул вещества.

В зависимости от соотношения энергии $h\nu$ фотона и энергии ионизации[1] $A_и$ имеют место три главных процесса.

Когерентное (классическое) рассеяние. Рассеяние длинноволнового рентгеновского излучения происходит в основном без изменения длины волны, и его принято называть ***когерентным***. Оно возникает, если энергия фотона меньше энергии ионизации: $h\nu < A_и$.

Так как в этом случае энергия фотона рентгеновского излучения и атома не изменяется, то когерентное рассеяние само по себе не вызывает биологического действия. Однако при создании защиты от рентгеновского излучения следует учитывать возможность изменения направления первичного пучка. Этот вид взаимодействия имеет значение для рентгеноструктурного анализа (см. § 19.7).

Некогерентное рассеяние (эффект Комптона). В 1922 г. А. Х. Комптон, наблюдая рассеяние жестких рентгеновских лучей, обнаружил уменьшение проникающей способности рассеянного пучка по сравнению с падающим. Это означало, что длина волны рассеянного рентгеновского излучения больше, чем падающего. Рассеяние рентгеновского излучения с изменением длины волны принято называть ***некогерентным***, а само явление — ***эффектом Комптона***.

Он возникает, если энергия фотона рентгеновского излучения больше энергии связи электрона в атоме (энергии ионизации): $h\nu > A_и$.

Это явление обусловлено тем, что при взаимодействии с атомом энергия $h\nu$ фотона расходуется на образование нового рассеянного фотона рентгеновского излучения с энергией $h\nu'$, на отрыв электрона от атома (энергия ионизации $A_и$) и сообщение электрону кинетической энергии $E_к$:

$$h\nu = h\nu' + A_и + E_к. \qquad \textbf{(26.6)}$$

Так как обычно $h\nu \gg A_и$, и тогда эффект Комптона происходит как бы на свободных электронах, то можно записать приближенно

$$h\nu \approx h\nu' + E_к. \qquad \textbf{(26.7)}$$

[1] Здесь под *энергией ионизации* понимают энергию, необходимую для удаления внутренних электронов за пределы атома или молекулы.

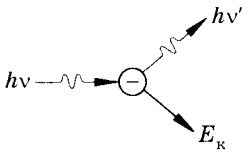


Рис. 26.9

Существенно, что в этом явлении (рис. 26.9) наряду с вторичным рентгеновским излучением (энергия $h\nu'$ фотона) появляются электроны отдачи (кинетическая энергия $E_к$ электрона). Атомы или молекулы при этом становятся ионами.

Фотоэффект. При фотоэффекте рентгеновское излучение поглощается атомом, в результате чего вылетают электроны из глубоких оболочек атома. Если энергия фотона недостаточна для ионизации, то фотоэффект может проявляться в возбуждении атомов без вылета электронов.

Три основных процесса взаимодействия, рассмотренные выше, являются первичными, они приводят к последующим вторичным, третичным и т. д. явлениям. Так, например, атомы с вакансией (отсутствием) электрона на одной из внутренних оболочек могут излучать характеристический рентгеновский спектр, возбужденные атомы могут стать источниками видимого света (рентгенолюминесценция) и т. п.

На рис. 26.10 приводится схема возможных процессов, возникающих при попадании рентгеновского излучения в вещество. Может происходить несколько десятков процессов, подобных изображенному, прежде чем энергия рентгеновского фотона перейдет в энергию молекулярно-теплового движения.

Процессы, представленные схемой рис. 26.10, лежат в основе явлений, наблюдаемых при действии рентгеновского излучения на вещество. Перечислим некоторые из них.

Рентгенолюминесценция — свечение ряда веществ при рентгеновском облучении. Такое свечение платиносинеродистого бария позволило Рентгену открыть лучи. Это явление используют для создания специальных светящихся экранов с целью визуального наблюдения рентгеновского излучения, иногда для усиления действия рентгеновских лучей на фотопластинку.

Известно *химическое действие рентгеновского излучения*, например образование перекиси водорода в воде. Практически важный пример — воздействие на фотопластинку, что позволяет фиксировать такие лучи.

Ионизирующее действие проявляется в *увеличении электропроводимости под воздействием рентгеновских лучей*. Это свойство используют в дозиметрии для количественной оценки действия этого вида излучения.

В результате многих процессов первичный пучок рентгеновского излучения ослабляется в соответствии с законом (24.3). Запишем его в виде

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu x}, \qquad \textbf{(26.8)}$$

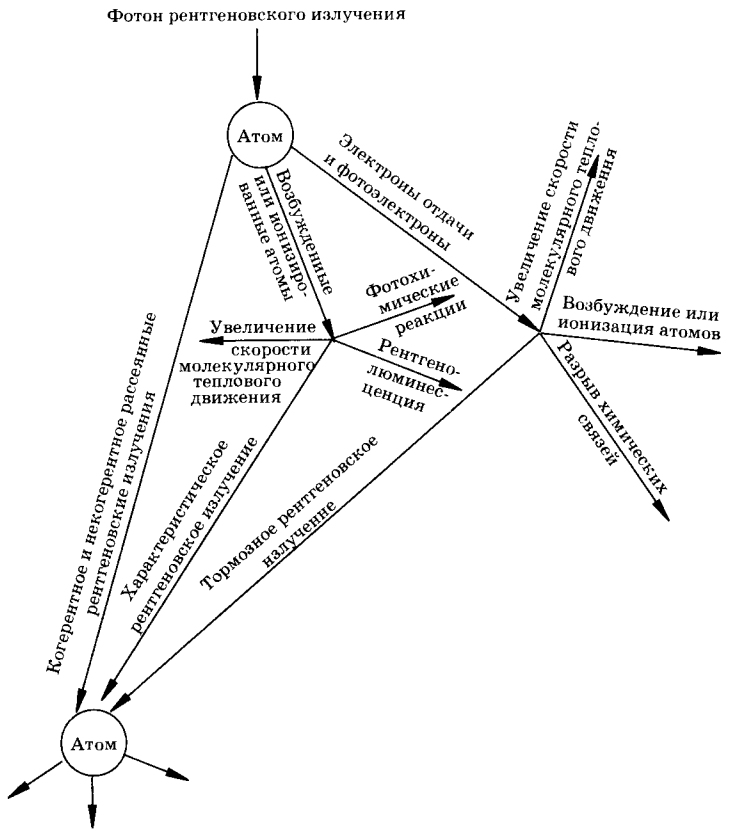


Рис. 26.10

где μ — ***линейный коэффициент ослабления***. Его можно представить состоящим из трех слагаемых соответствующих когерентному рассеянию $\mu_к$, некогерентному $\mu_{нк}$ и фотоэффекту $\mu_ф$:

$$\mu = \mu_к + \mu_{нк} + \mu_ф. \qquad \textbf{(26.9)}$$

Поток рентгеновского излучения ослабляется пропорционально числу атомов вещества, через которое этот поток проходит. Если сжать вещество вдоль оси X, например, в b раз, увеличив в b раз его плотность, то ослабление пучка не изменится, так как число атомов остается прежним. Следовательно, показатель степени в формуле (26.8) не изменится:

$$\mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \mu_2 x_1 / b; \qquad \textbf{(26.10)}$$

$x_2 = x_1/b$, так как при сжатии толщина поглощающего слоя уменьшилась в b раз. Из (26.10) имеем $\mu_1 = \mu_2/b$.

Это означает, что линейный коэффициент ослабления зависит от плотности вещества.

Поэтому предпочитают пользоваться массовым коэффициентом ослабления, который равен отношению линейного коэффициента ослабления к плотности поглотителя и не зависит от плотности вещества:

$$\mu_m = \mu/\rho. \qquad (26.11)$$

§ 26.4. Физические основы применения рентгеновского излучения в медицине

Одно из наиболее важных медицинских применений рентгеновского излучения — просвечивание внутренних органов с диагностической целью (***рентгенодиагностика***).

Для диагностики используют фотоны с энергией порядка 60—120 кэВ. При этой энергии массовый коэффициент ослабления в основном определяется фотоэффектом. Его значение обратно пропорционально третьей степени энергии фотона (пропорционально λ^3), в чем проявляется большая проникающая способность жесткого излучения, и пропорционально третьей степени атомного номера вещества-поглотителя:

$$\mu_m = k\lambda^3 Z^3, \qquad (26.12)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Поглощение рентгеновских лучей почти не зависит от того, в каком соединении атом представлен в веществе, поэтому можно легко сравнить по формуле (26.12) массовые коэффициенты ослабления $\mu_{mк}$ кости $Ca_3(PO_4)_2$ и $\mu_{mв}$ мягкой ткани или воды H_2O. Атомные номера Ca, P, O и H соответственно равны 20, 15, 8 и 1. Подставив эти числа в (26.12), получим

$$\frac{\mu_{mк}}{\mu_{mв}} = \frac{3 \cdot 20^3 + 2 \cdot 15^3 + 8 \cdot 8^3}{2 \cdot 1^3 + 8^3} = 68.$$

Существенное различие поглощения рентгеновского излучения разными тканями позволяет в теневой проекции видеть изображения внутренних органов тела человека.

Рентгенодиагностику используют в двух вариантах: ***рентгеноскопия*** — изображение рассматривают на рентгенолюминесцирующем экране, ***рентгенография*** — изображение фиксируется на фотопленке.

Если исследуемый орган и окружающие ткани примерно одинаково ослабляют рентгеновское излучение, то применяют специальные контрастные вещества. Так, например, наполнив желудок

и кишечник кашеобразной массой сульфата бария, можно видеть их теневое изображение.

Яркость изображения на экране и время экспозиции на фотопленке зависят от интенсивности рентгеновского излучения. Если его используют для диагностики, то интенсивность не может быть сделана большой, чтобы не вызвать нежелательных биологических последствий. Поэтому имеется ряд технических приспособлений, улучшающих изображение при малых интенсивностях рентгеновского излучения. При массовом обследовании населения широко используется вариант рентгенографии — ***флюорография***, при которой на чувствительной малоформатной пленке фиксируется изображение с большого рентгенолюминесцирующего экрана. При съемке используют линзу большой светосилы, готовые снимки рассматривают на специальном увеличителе.

Интересным и перспективным вариантом рентгенографии является метод, называемый ***рентгеновской томографией***, и его «машинный вариант» — ***компьютерная томография***.

Рассмотрим этот вопрос.

Обычная рентгенограмма охватывает большой участок тела, причем различные органы и ткани затеняют друг друга. Можно избежать этого, если периодически совместно (рис. 26.11) в противоположных направлениях перемещать рентгеновскую трубку *РТ* и фотопленку *Фп* относительно объекта *Об* исследования. В теле имеется ряд непрозрачных для рентгеновских лучей включений, они показаны кружочками на рисунке. Как видно, рентгеновские лучи при любом положении рентгеновской трубки (*1*, *2* и т. д.) проходят через одну и ту же точку объекта, являющуюся центром, относительно которого совершается периодическое движение *РТ* и *Фп*. Эта точка, точнее небольшое непрозрачное включение, показана темным кружком. Его теневое изображение перемещается вместе с *Фп*, занимая последовательно положения *1*, *2* и т. д. Остальные включения в теле (кости, уплотнения и др.) создают на *Фп* некоторый общий «фон», так как рентгеновские лучи непостоянно затеняются ими. Изменяя положение «центра качания»,

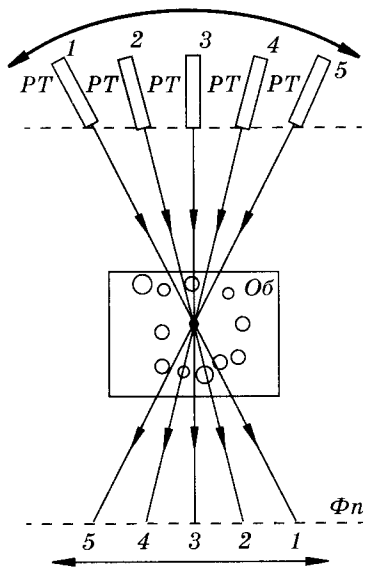


Рис. 26.11

можно получить послойное рентгеновское изображение тела. Отсюда и название — ***томография*** (послойная запись).

Можно, используя тонкий пучок рентгеновского излучения, экран (вместо фотопленки), состоящий из полупроводниковых детекторов ионизирующего излучения (см. § 27.5), и ЭВМ, обработать теневое рентгеновское изображение при томографии. Такой современный вариант томографии (*вычислительная* или *компьютерная рентгеновская томография*) позволяет получать послойные изображения тела на экране электронно-лучевой трубки или на бумаге с деталями менее 2 мм при различии поглощения рентгеновского излучения до 0,1%. Это позволяет, например, различать серое и белое вещество мозга и видеть очень маленькие опухолевые образования.

Первая Нобелевская премия была присуждена К. Рентгену (1901), в 1979 г. Нобелевская премия была присуждена Г. Хаунсфилду и Мак-Кормаку за разработку компьютерного рентгеновского томографа.

С лечебной целью рентгеновское излучение применяют главным образом для уничтожения злокачественных образований (***рентгенотерапия***).

ГЛАВА 27

Радиоактивность. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом

Одним из распространенных источников ионизирующего излучения является радиоактивный распад атомных ядер. В главе наряду с этим вопросом рассматривается и взаимодействие ионизирующего излучения с веществом.

§ 27.1. Радиоактивность

Радиоактивностью называют самопроизвольный распад неустойчивых ядер с испусканием других ядер или элементарных частиц. Характерным признаком, отличающим ее от других видов ядерных превращений, является *самопроизвольность* (*спонтанность*) этого процесса. Различают радиоактивность естественную и искусственную.

Естественная радиоактивность встречается у неустойчивых ядер, существующих в природных условиях. ***Искусственной*** называют радиоактивность ядер, образованных в результате различных ядерных реакций. Принципиального различия между естественной и искусственной радиоактивностями нет. Им присущи общие закономерности.

Рассмотрим основные типы радиоактивного распада.

Альфа-распад состоит в самопроизвольном превращении одного ядра в другое ядро с испусканием α-частицы (ядра атома гелия $_2$He). Схему альфа-распада с учетом правила смещения (закона сохранения зарядового и массового чисел) записывают в виде

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\alpha, \qquad \textbf{(27.1)}$$

где X и Y— символы соответственно материнского и дочернего ядер. Примером α-распада является превращение радона в полоний, а полония в свинец:

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\alpha \quad \text{и} \quad {}^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\alpha.$$

Суммарная масса дочернего ядра и α-частицы меньше массы материнского ядра, то же можно сказать относительно их энергий покоя. Разность этих энергий равна кинетической энергии α-частицы и дочернего ядра.

При α-распаде дочернее ядро может образоваться не только в нормальном, но и в возбужденных состояниях. Так как они принимают дискретные значения, то и значения энергии α-частиц, вылетающих из разных ядер одного и того же радиоактивного вещества, дискретны. Энергия возбуждения дочернего ядра чаще всего выделяется в виде γ-фотонов. Именно поэтому α-распад сопровождается γ-излучением.

Если дочерние ядра радиоактивны, то возникает целая цепочка превращений, концом которой является стабильное ядро.

Бета-распад заключается во внутриядерном взаимном превращении нейтрона и протона. Различают три вида β-распада.

1. *Электронный, или* β^-*-распад*, который проявляется в вылете из ядра β^--частицы (электрона). Энергии β^--частиц принимают всевозможные значения от 0 до E_{max}, спектр энергий сплошной (рис. 27.1). Это не соответствует дискретным ядерным энерге-

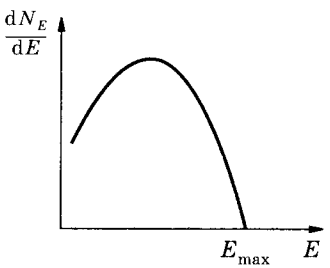


Рис. 27.1

тическим состояниям. В 1932 г. В. Паули высказал предположение о том, что одновременно с β^--частицей из ядра вылетает еще и другая, нейтральная, с очень малой массой. По предложению Э. Ферми эта частица была названа нейтрино. Позже было установлено, что нейтрино возникает при β^+-распаде, а при β^--распаде — антинейтрино.

Энергия, выделяющаяся при β-распаде, распределяется между β-частицей и нейтрино или антинейтрино.

Схема β^--распада с учетом правила смещения:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}\beta + \tilde{\nu}, \qquad (27.2) $$

где $\tilde{\nu}$ — обозначение антинейтрино.

Примером β^--распада может быть превращение трития в гелий:

$$ {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{0}_{-1}\beta + \tilde{\nu}. $$

При β^--распаде электрон образуется вследствие внутриядерного превращения нейтрона в протон:

$$ {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{+1}p + {}^{0}_{-1}\beta + \tilde{\nu}. \qquad (27.3) $$

2. *Позитронный*, или β^+-*распад*. Схема β^+-распада:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{+1}\beta + \nu, \qquad (27.4) $$

где ν — обозначение нейтрино. Примером β^+-распада является превращение рубидия в криптон:

$$ {}^{79}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{79}_{36}\mathrm{Kr} + {}^{0}_{+1}\beta + \nu. $$

При β^+-распаде позитрон образуется вследствие внутриядерного превращения протона в нейтрон:

$$ {}^{1}_{+1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}\beta + \nu. \qquad (27.5) $$

3. *Электронный*, или *е-захват*. Этот вид радиоактивности заключается в захвате ядром одного из внутренних электронов атома, в результате чего протон ядра превращается в нейтрон:

$$ {}^{1}_{+1}p + {}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{1}_{0}n + \nu. \qquad (27.6) $$

Схема электронного захвата:

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + \nu. \qquad (27.7) $$

Примером *е*-захвата может быть превращение бериллия в литий:

$$ {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + {}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu. $$

В зависимости от того, с какой внутренней оболочки захватывается электрон, иногда различают *K*-захват, *L*-захват и т. д. При

электронном захвате освобождаются места в электронной оболочке, поэтому этот вид радиоактивности сопровождается характеристическим рентгеновским излучением. Именно по рентгеновскому излучению и был обнаружен электронный захват.

При β-распаде возможно возникновение γ-излучения.

Радиоактивностью являются также спонтанное деление ядер, протонная радиоактивность и др. Понятие радиоактивности иногда распространяют и на превращения элементарных частиц.

§ 27.2. Основной закон радиоактивного распада. Активность

Радиоактивный распад — это статистическое явление. Невозможно предсказать, когда распадется данное нестабильное ядро, можно лишь сделать некоторые вероятностные суждения об этом событии. Для большой совокупности радиоактивных ядер можно получить статистический закон, выражающий зависимость нераспавшихся ядер от времени.

Пусть за достаточно малый интервал времени $\mathrm{d}t$ распадается $\mathrm{d}N$ ядер. Это число пропорционально интервалу времени $\mathrm{d}t$, а также общему числу N радиоактивных ядер:

$$ \mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t, \qquad (27.8) $$

где λ — ***постоянная распада***, пропорциональная вероятности распада радиоактивного ядра и различная для разных радиоактивных веществ. Знак «−» поставлен в связи с тем, что $\mathrm{d}N < 0$, так как число нераспавшихся радиоактивных ядер убывает со временем.

Разделим переменные и проинтегрируем (27.8) с учетом того, что нижние пределы интегрирования соответствуют начальным условиям ($t = 0$, $N = N_0$; N_0 — начальное число радиоактивных ядер), а верхние — текущим значениям t и N: $\int\limits_{N_0}^{N} \frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \int\limits_{0}^{t} dt$, т. е.

$$ \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t. $$

Потенцируя это выражение, имеем

$$ N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (27.9) $$

Это и есть основной закон радиоактивного распада: число радиоактивных ядер, которые еще не распались, убывает со временем по экспоненциальному закону.

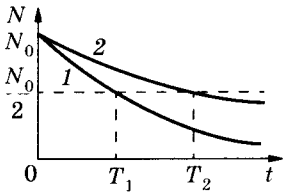


Рис. 27.2

На рис. 27.2 изображены кривые *1* и *2*, соответствующие разным веществам ($\lambda_1 > \lambda_2$); начальное число N_0 радиоактивных ядер одинаково.

На практике вместо постоянной распада чаще используют другую характеристику радиоактивного изотопа — ***период полураспада*** T. Это время, в течение которого распадается половина радиоактивных ядер. Естественно, что это понятие применимо к достаточно большому числу ядер. На рис. 27.2 показано, как с помощью кривых *1* и *2* можно найти периоды полураспада ядер; проводится прямая, соответствующая $N_0/2$, до пересечения с кривыми. Абсциссы точек пересечения дают T_1 и T_2.

Чтобы установить связь между T и λ, подставим в уравнение (27.9) $N = N_0/2$ и $t = T$, откуда следует $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T}$. Сокращая на N_0 и логарифмируя это равенство, получаем

$$T = \ln 2/\lambda \approx 0{,}69/\lambda. \qquad \textbf{(27.10)}$$

Работая с радиоактивными источниками, важно знать число частиц или γ-фотонов, вылетающих из препарата в секунду. Это число пропорционально скорости распада, поэтому скорость распада, называемая ***активностью***, является существенной характеристикой радиоактивного препарата:

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right|. \qquad \textbf{(27.11)}$$

Используя (27.8)—(27.10), можно найти следующие зависимости для активности:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}, \qquad \textbf{(27.12)}$$

$$A = \frac{N}{T}\ln 2. \qquad \textbf{(27.13)}$$

Таким образом, активность препарата тем больше, чем больше радиоактивных ядер и чем меньше их период полураспада. Активность препарата со временем убывает по экспоненциальному закону.

Единица активности — *беккерель* (Бк), что соответствует активности нуклида в радиоактивном источнике, в котором за 1 с происходит один акт распада.

Наиболее употребительной единицей активности является *кюри* (Ки); 1 Ки = 3,7 · 10^{10} Бк = 3,7 · 10^{10} $с^{-1}$. Кроме того, существует еще одна внесистемная единица активности — *резерфорд* (Рд); 1 Рд = 10^6 Бк = 10^6 $с^{-1}$.

Для характеристики активности единицы массы радиоактивного источника вводят величину, называемую ***удельной массовой активностью*** и равную отношению активности изотопа к его массе. Удельная массовая активность выражается в *беккерелях на килограмм* (Бк/кг).

§ 27.3. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом

Заряженные частицы и γ-фотоны, распространяясь в веществе, взаимодействуют с электронами и ядрами, в результате чего изменяется состояние как вещества, так и частиц.

Основным механизмом потерь энергии заряженной частицы (α и β) при прохождении через вещество является ионизационное торможение. При этом ее кинетическая энергия расходуется на возбуждение и ионизацию атомов среды.

Взаимодействие частицы с веществом количественно оценивается линейной плотностью ионизации, линейной тормозной способностью вещества и средним линейным пробегом частицы.

Под ***линейной плотностью ионизации i*** понимают отношение числа dn ионов одного знака, образованных заряженной ионизирующей частицей на элементарном пути dl, к этому пути: $i = dn/dl$.

Линейной тормозной способностью вещества S называют отношение энергии dE, теряемой заряженной ионизирующей частицей при прохождении элементарного пути dl в веществе, к длине этого пути: $S = dE/dl$.

Средним линейным пробегом заряженной ионизирующей частицы R является среднее значение расстояния между началом и концом пробега заряженной ионизирующей частицы в данном веществе.

График зависимости линейной плотности ионизации от пути x, проходимого α-частицей в среде (воздух), показан на рис. 27.3. По мере продвижения частицы в среде уменьшаются ее энергия и скорость, линейная плотность ионизации при этом возрастает и только при завершении пробега частицы резко убывает. Возрастание i обусловлено тем, что при меньшей скорости α-частица больше времени проводит вблизи атома и, таким образом, возрастает вероятность ионизации атома. Как видно из ри-

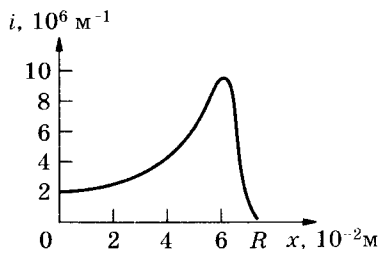


Рис. 27.3

сунка, линейная плотность ионизации α-частиц естественно-радиоактивных изотопов в воздухе при нормальном давлении составляет $i = (2 \div 8) \cdot 10^6$ пар ионов/м.

Так как для ионизации молекул, входящих в состав воздуха, требуется энергия около 34 эВ, то значения линейной тормозной способности вещества (воздуха) S лежат в интервале 70—270 МэВ/м.

Средний линейный пробег α-частицы зависит от ее энергии и от плотности вещества. В воздухе он равен нескольким сантиметрам, в жидкостях и в живом организме — 10—100 мкм. После того как скорость α-частицы уменьшается до скорости молекулярно-теплового движения, она, захватив два электрона в веществе, превращается в атом гелия.

Ионизация и возбуждение являются первичными процессами. Вторичными процессами могут быть увеличение скорости молекулярно-теплового движения частиц вещества, характеристическое рентгеновское излучение, радиолюминесценция, химические процессы.

Взаимодействие α-частиц с ядрами — значительно более редкий процесс, чем ионизация. При этом возможны ядерные реакции, а также рассеяние α-частиц.

Бета-излучение, так же как и α-излучение, вызывает ионизацию вещества. В воздухе линейная плотность ионизации β-частицами может быть вычислена по формуле

$$i = k(c/v)^2,$$

где $k \approx 4600$ пар ионов/м, c — скорость света, а v — скорость β-частиц.

Кроме ионизации и возбуждения β-частицы могут вызывать и другие процессы. Так, например, при торможении электронов возникает тормозное рентгеновское излучение. Бета-частицы рассеиваются на электронах вещества, и их пути сильно искривляются в нем. Если электрон движется в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения света в этой среде, то возникает ***характерное черенковское излучение (излучение Черенкова—Вавилова)***.

При попадании β^+-частицы (позитрона) в вещество с большой вероятностью происходит такое взаимодействие ее с электроном, в результате которого пара электрон — позитрон превращается в два γ-фотона. Этот процесс, схема которого показана на рис. 27.4, называют аннигиляцией. Энергия каждого γ-фотона, возникающего при аннигиляции, оказывается не меньше энергии покоя электрона или позитрона, т. е. не менее 0,51 МэВ.

Несмотря на разнообразие процессов, приводящих к ослаблению излучения, можно приближенно считать, что интенсивность его изменяется по экспоненциальному закону, подобному (26.8).

В качестве одной из характеристик поглощения β-излучения веществом используют слой половинного ослабления, при прохождении через который интенсивность β-частиц уменьшается вдвое.

Можно считать, что в ткани организма β-частицы проникают на глубину 10—15 мм. Защитой от β-излучения служат тонкие алюминиевые, плексигласовые и другие экраны. Так, например, слой алюминия толщиной 0,4 мм или воды толщиной 1,1 мм уменьшает вдвое β-излучение от фосфора $^{32}_{15}\mathrm{P}$.

При попадании γ-излучения в вещество наряду с процессами, характерными для рентгеновского излучения (когерентное рассеяние, эффект Комптона, фотоэффект, см. § 26.3), возникают и такие явления, которые неспецифичны для взаимодействия рентгеновского излучения с веществом. К этим процессам следует отнести образование пары электрон — позитрон, происходящее при энергии γ-фотона, не меньшей суммарной энергии покоя электрона и позитрона (1,02 МэВ), и фотоядерные реакции, которые возникают при взаимодействии γ-фотонов больших энергий с атомными ядрами. Для возникновения фотоядерной реакции необходимо, чтобы энергия γ-фотона была не меньше энергии связи, приходящейся на нуклон.

В результате различных процессов под действием γ-излучения образуются заряженные частицы; следовательно, *γ-излучение также является ионизирующим.*

Ослабление пучка γ-излучения в веществе обычно описывают экспоненциальным законом (26.8). Линейный (или массовый) коэффициент ослабления можно представить как сумму соответствующих коэффициентов ослабления, учитывающих три основных процесса взаимодействия — фотоэффект, Комптон-эффект и образование электрон-позитронных пар:

$$\mu = \mu_ф + \mu_{нк} + \mu_п. \qquad \textbf{(27.14)}$$

Эти основные процессы взаимодействия происходят с разной вероятностью, которая зависит от энергии γ-фотона (рис. 27.5;

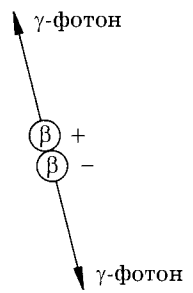


Рис. 27.4

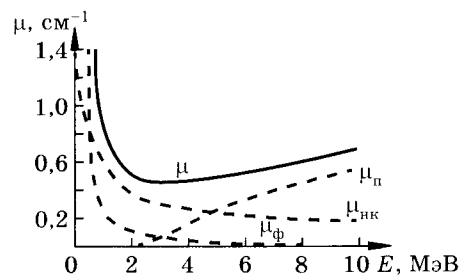


Рис. 27.5

кривая получена для свинца). Как видно из рисунка, при малых энергиях основную роль играет фотоэффект, при средних — Комптон-эффект и при энергиях, больших 10 МэВ, — процесс образования пары электрон — позитрон.

Экспоненциальный закон ослабления пучка γ-фотонов выполняется приближенно, особенно при больших энергиях. Это обусловлено вторичными процессами, возникающими при взаимодействии γ-излучения с веществом. Так, например, электроны и позитроны обладают энергией, достаточной для образования новых γ-фотонов в результате торможения и аннигиляции.

Поток нейтронов тоже является ионизирующим излучением, так как в результате взаимодействия нейтронов с ядрами атомов образуются заряженные частицы и γ-излучение. Проиллюстрируем это несколькими примерами:

— деление ядер при захвате ими нейтронов: образование радиоактивных осколков, γ-излучения и заряженных частиц;

— образование α-частиц, например: $^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{0}n = {}^{24}_{11}\mathrm{Na} + {}^{4}_{2}\alpha$;

— образование протонов, например: $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}n = {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}p$.

§ 27.4. Физические основы действия ионизирующих излучений на организм

Рассматривая первичные физико-химические процессы в организме при действии ионизирующих излучений, следует учитывать две принципиально разные возможности взаимодействия: с молекулами воды и с молекулами органических соединений.

Под действием ионизирующих излучений происходят химические превращения вещества, получившие название ***радиолиза***. Укажем возможные механизмы радиолиза воды:

$$H_2O \rightarrow H_2O^*, \quad H_2O^* \rightarrow H^\bullet + OH^\bullet,$$

$$H_2O \rightarrow H_2O^{\bullet+} + e^-, \quad H_2O^{\bullet+} + H_2O \rightarrow OH^\bullet + H_3O^+,$$

$$OH^- \rightarrow OH^\bullet + e^-, \quad H_2O + e^- \rightarrow H_2O^{\bullet-},$$

$$O_2 + e^- \rightarrow O_2^{\bullet-}, \quad O_2^{\bullet-} + H^+ \rightarrow HO_2^\bullet,$$

$$HO_2^\bullet + H^\bullet \rightarrow H_2O_2.$$

Наиболее реакционноспособными являются три типа радикалов (присутствие неспаренного электрона у свободных радикалов обозначается жирной точкой в верхнем правом индексе), образующихся при радиолизе воды: e^-, $H^\bullet$ и $OH^\bullet$. Взаимодействие органических молекул RH с этими радикалами может привести к образованию радикалов органических молекул, например:

$$RH + OH^\bullet \rightarrow R^\bullet + H_2O, \quad R^\bullet + O_2 \rightarrow RO_2^\bullet,$$

$$RO_2^\bullet + RH \rightarrow ROOH + R^\bullet \text{ и т. д.}$$

Взаимодействие молекул органических соединений непосредственно с ионизирующими излучениями может образовать возбужденные молекулы, ионы, радикалы и перекиси:

$$RH \rightarrow RH^* \rightarrow R^\bullet + H^\bullet \rightarrow \ldots, \quad RH \rightarrow RH^{\bullet+} + e^- \rightarrow \ldots .$$

Из приведенных реакций ясно, что эти высокоактивные в химическом отношении соединения будут взаимодействовать с остальными молекулами биологической системы, что приведет к повреждениям генетического аппарата, мембран, других структур клеток и, в итоге, нарушениям функций всего организма.

Рассмотрим некоторые общие закономерности, характерные для биологического действия ионизирующего излучения.

Значительные биологические нарушения вызываются ничтожно малыми количествами поглощаемой энергии излучения.

Ионизирующее излучение действует не только на биологический объект, подвергнутый облучению, но и на последующие поколения через наследственный аппарат клеток. Это обстоятельство, а также его условное прогнозирование особо остро ставят вопрос о защите организмов от излучения.

Для биологического действия ионизирующего излучения специфичен скрытый (*латентный*) период. Разные части клеток по-разному чувствительны к одной и той же дозе (см. гл. 28) ионизирующего излучения. Наиболее чувствительным к действию излучения является ядро клетки.

Способность к делению — наиболее уязвимая функция клетки, поэтому при облучении прежде всего поражаются растущие ткани. Это делает ионизирующее излучение особенно опасным для детского организма, включая период, когда он находится в утробе матери. Губительно действует излучение и на ткани взрослого организма, в которых происходит постоянное или периодическое деление клеток: слизистую оболочку желудка и кишечника, кроветворную ткань, половые клетки и т. д. Действие ионизирующего излучения на быстрорастущие ткани используют также при терапевтическом воздействии на ткани опухоли.

При больших дозах может наступить «смерть под лучом», при меньших — возникают различные заболевания (лучевая болезнь и др.).

§ 27.5. Детекторы ионизирующих излучений

Детекторами ионизирующих излучений называют приборы, регистрирующие α-, β-, рентгеновское и γ-излучения, нейтроны, протоны и т. д. Детекторы используют также для измерения энергии частиц, изучения процессов их взаимодействия, распада и т. п.

Работа детекторов основана на тех процессах, которые вызывают регистрируемые частицы в веществе.

С некоторой условностью детекторы могут быть представлены тремя группами: ***следовые*** (трековые) детекторы, ***счетчики*** и ***интегральные приборы.***

Следовые детекторы позволяют наблюдать траекторию частицы, счетчики регистрируют появление частицы в заданном пространстве, интегральные приборы дают информацию о потоке ионизирующего излучения. Еще раз отметим условность этой классификации. Так, например, следовые детекторы можно использовать, чтобы сосчитать пролетающие частицы, от «поштучной» регистрации частиц счетчиком можно перейти к суммарной оценке потока ионизирующего излучения и т. п.

К следовым детекторам относят камеру Вильсона, диффузионную, пузырьковую, искровую камеры и толстослойные фотопластинки. Общность всех этих устройств заключается в том, что наблюдаемая частица ионизирует молекулы или атомы вещества на своем пути. Образованные ионы проявляются по вторичным эффектам: *конденсация пересыщенного пара* (камера Вильсона и диффузионная); *парообразование перегретой жидкости* (пузырьковая камера); *образование разрядов в газах* (искровая камера); *фотохимическое действие* (толстослойные фотопластинки).

Так как многие из перечисленных методов знакомы читателю по курсу физики средней школы, то в качестве иллюстрации рассмотрим лишь работу искровой камеры. Она состоит из электродов, пространство между которыми заполнено газом. Высоковольтное напряжение подается на электроды во время прохождения частицей пространства камеры, сигнал для включения напряжения поступает с других детекторов. Электроны, возникшие вдоль траектории частицы при ионизации атомов газа, ускоряются электрическим полем и производят сами ударную ионизацию. В результате на небольших участках образуется видимый глазом искровой разряд.

На рис. 27.6 показана схема узкозазорной искровой камеры. Расстояние между электродами, помещенными в камеру (горизонтальные прямые на рис. 27.6), порядка 1 см. Искровые разряды возникают перпендикулярно электродам, их совокупность указывает траекторию частицы. В стримерной[1] искровой камере расстояние между электродами 5—20 см. Высоковольтное напряжение снимается примерно через 10^{-5} с после прохождения частицы. За это время искры зарождаются только в непосредственной области первичной ионизации, созданной регистрируемой частицей. Следы частиц в стримерной искровой камере изображены на рис. 27.7.

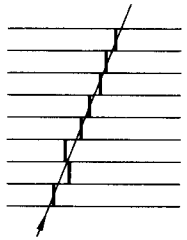


Рис. 27.6

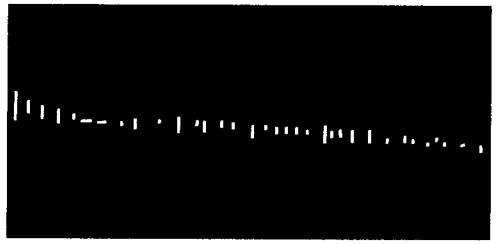


Рис. 27.7

К интегральным детекторам можно отнести фотопленки (фиксируется степень почернения после проявления пленки), ионизационные камеры непрерывного действия и др.

Рассмотрим устройство и работу ионизационной камеры непрерывного действия. Она представляет собой конденсатор K, внутри которого находится газ (рис. 27.8). При попадании излучения в газ происходит ионизация и по цепи протекает электрический ток, который обычно усиливают и измеряют. Сила тока пропорциональна числу ионов, образованных в камере в секунду, и, следовательно, потоку энергии проходящих ионизирующих частиц.

В некоторых приборах разрядка конденсатора под действием ионизирующего излучения фиксируется электрометром.

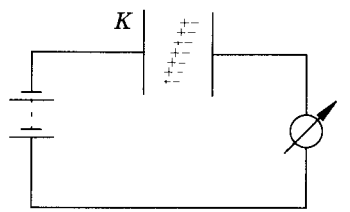


Рис. 27.8

К счетчикам относят большую группу газоразрядных устройств (*импульсные ионизационные камеры, пропорциональные счетчики, счетчики Гейгера—Мюллера*), *а также люминесцентные, полупроводниковые* и др.

[1] *Стримерами* называют светящиеся разветвленные каналы, образующиеся при электрическом разряде в газах.

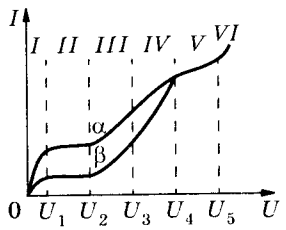


Рис. 27.9

Проанализируем зависимость импульса тока I, возникающего при попадании частицы в газовый промежуток (число ионов, участвующих в одном импульсе), от напряжения U на электродах (рис. 27.9; кривые соответствуют α- и β-частицам).

Обе кривые могут быть условно представлены шестью областями, для которых характерны различные процессы.

В области *I* рекомбинации часть ионов рекомбинирует. С ростом напряжения число рекомбинирующих ионов уменьшается, увеличивается число ионов, которые достигают электродов. Так как ионизирующая способность α-частиц больше, чем β-частиц, то кривые для них различны.

Область *II* соответствует насыщению. Все первичные ионы доходят до электродов, но вторичной ионизации еще нет. В этой области работает ионизационная камера.

В области *III* начинает проявляться вторичная ионизация, однако импульс тока при этом остается пропорциональным начальной ионизации. Число N пар ионов, присутствующих после усиления, пропорционально числу N_0 первичных пар ионов, образованных ионизирующей частицей:

$$N = kN_0, \qquad (27.15)$$

где k — коэффициент газового усиления ($k = 10^3 \div 10^6$). Он зависит от конструкции счетчика и природы используемого в нем газа. Именно в этой области работают пропорциональные счетчики.

Так как N_0 и, следовательно, N зависят не только от вида частиц, но и от их энергии, то пропорциональные счетчики могут измерять и энергию частиц.

Область *IV* называют областью ограниченной пропорциональности. Здесь еще проявляется зависимость от начальной ионизации, но к значению U_4 она уже пропадает. Значение U_4, называемое порогом области Гейгера, зависит от конструкции счетчика, а также от давления и вида газа, используемого в нем. В этой области импульс тока становится достаточно большим и при малой начальной ионизации.

В области *V* работают счетчики Гейгера—Мюллера. Здесь большой коэффициент газового усиления, но нельзя различать энергии частиц.

В области *VI* возникает непрерывный газовый разряд, который приводит к быстрой порче счетчика. Области *V* и *VI* соответствуют самостоятельному газовому разряду, который будет поддерживаться и после прекращения ионизирующего действия частицы.

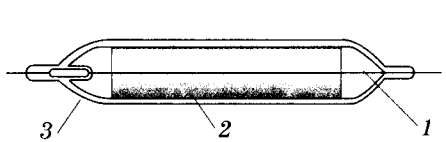


Рис. 27.10

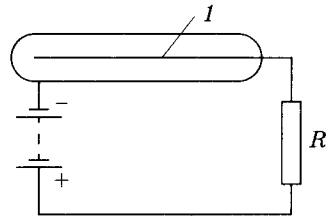


Рис. 27.11

В качестве примера газовых устройств рассмотрим счетчик Гейгера—Мюллера, он состоит из коаксиально расположенных цилиндрических электродов [рис. 27.10: *1* — анод (тонкая нить, натянутая вдоль оси), *2* — катод в виде напыленного на стеклянную трубку *3* металла]. Давление газа внутри счетчика 100—200 мм рт. ст. К электродам прикладывается напряжение порядка нескольких сотен вольт. При попадании в счетчик ионизирующей частицы в газе образуются свободные электроны, которые движутся к аноду. Так как нить тонкая (диаметр около 0,05 мм), то вблизи нити электрическое поле сильно неоднородно, напряженность поля велика. Электроны вблизи нити ускоряются настолько, что начинают ионизовать газ. В результате возникает разряд, и по цепи (рис. 27.11) протекает ток.

Самостоятельный разряд в счетчике Гейгера—Мюллера необходимо погасить, иначе счетчик не прореагирует на следующую частицу. Для гашения разряда применяют радиотехнический метод и метод, основанный на добавлении в трубку многоатомных газов (самогасящиеся счетчики).

Простейшим вариантом первого метода является включение последовательно со счетчиком высокоомного резистора. При протекании тока на этом резисторе происходит значительное падение напряжения, напряжение на счетчике уменьшается и разряд прекращается. Более распространены самогасящиеся счетчики, в которых благодаря специальному газовому наполнению разряд сам собой обрывается даже при малых сопротивлениях цепи.

Электрические импульсы, возникающие во внешней цепи на резисторе, усиливают и регистрируют специальным устройством.

Принцип действия сцинтилляционного (люминесцентного) счетчика основан на том, что под действием ионизирующего излучения в некоторых веществах происходят кратковременные вспышки света — сцинтилляции. На первом этапе развития ядерной физики сцинтилляции регистрировались при визуальном наблюдении. В люминесцентном счетчике они регистрируются автоматически с использованием фотоэлектронного умножителя.

Полупроводниковые счетчики реагируют на изменение электропроводимости p—n-перехода под воздействием заряженной частицы.

Как видно, все перечисленные выше детекторы работают тогда, когда частицы производят ионизацию в определенном объеме. В связи с этим для регистрации α- и β-частиц стенки счетчиков или камер должны пропускать эти частицы. В отдельных случаях для регистрации α-излучения соответствующий источник помещается внутрь камеры, так как трудно сделать стенки камеры прозрачными для этих частиц.

Рентгеновское и γ-излучения регистрируются благодаря ионизации, которую вызывают заряженные частицы, образованные при фотоэффекте, Комптон-эффекте и т. д.

Счетчики должны удовлетворять некоторым общим требованиям, связанным с эффективностью, разрешающим временем и т. д. ***Эффективностью*** называют отношение числа зарегистрированных частиц к общему числу частиц, пролетевших через счетчик. ***Разрешающим*** (или ***мертвым***) ***временем*** счетчика называют минимальное время, которое должно разделять следующие друг за другом частицы, чтобы они не были сосчитаны как одна.

§ 27.6. Использование радионуклидов и нейтронов в медицине

Медицинские приложения радионуклидов можно представить двумя группами. Одна группа — это методы, использующие радиоактивные индикаторы (меченые атомы) с диагностическими и исследовательскими целями. Другая группа методов основана на применении ионизирующего излучения радионуклидов для биологического действия с лечебной целью. К этой же группе можно отнести бактерицидное действие излучения.

Метод меченых атомов заключается в том, что в организм вводят радионуклиды и определяют их местонахождение и активность в органах и тканях. Так, например, для диагностирования заболевания щитовидной железы в организм вводят радиоактивный иод $^{125}_{53}\mathrm{J}$ или $^{131}_{53}\mathrm{J}$, часть которого концентрируется в этой железе. Счетчиком, расположенным поблизости от нее, фиксируют накопление иода. По скорости увеличения концентрации радиоактивного иода можно делать диагностический вывод о состоянии щитовидной железы.

Рак щитовидной железы может давать метастазы в разные органы. Накопление радиоактивного иода в них может дать информацию о метастазах.

Для обнаружения распределения радионуклидов в разных органах тела используют *гамма-топограф* (сцинтиграф), который автоматически регистрирует распределение интенсивности радиоактивного препарата. Гамма-топограф представляет собой сканирующий счетчик, который постепенно проходит большие участки над телом больного. Регистрация излучения фиксируется, например, штриховой отметкой на бумаге. На рис. 27.12, *а* схематически показан путь счетчика, а на рис. 27.12, *б* — регистрационная карта.

Применяя радиоактивные индикаторы, можно проследить за обменом веществ в организме. Объемы жидкостей в организме трудно измерить непосредственно, метод меченых атомов позволяет решить эту задачу. Так, например, вводя определенное количество радиоактивного индикатора в кровь и выдержав время для его равномерного распределения по кровеносной системе, можно по активности единицы объема крови найти ее общий объем.

Гамма-топограф дает сравнительно грубое распределение источников ионизирующего излучения в органах. Более детальные сведения можно получить *методом авторадиографии.*

В этом методе на исследуемый объект, например биологическую ткань, наносится слой чувствительной фотоэмульсии. Содержащиеся в объекте радионуклиды оставляют след в соответствующем месте эмульсии, как бы фотографируя себя (отсюда и название метода). Полученный снимок называют *радиоавтографом* или *авторадиограммой.* На рис. 27.13 схематически показан слой биологического препарата, содержащий радионуклиды (радиоактивные метки) и слой фотоэмульсии, в котором, после проявления, возникнут темные точки от ионизирующего излучения.

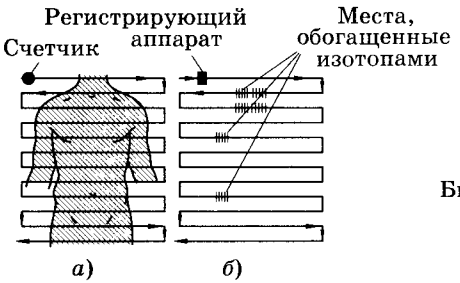


Рис. 27.12

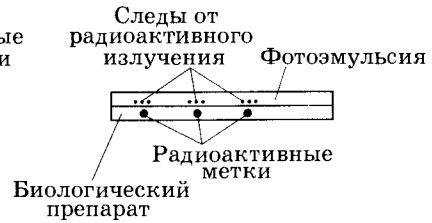


Рис. 27.13

В живой организм радиоактивные атомы вводятся в таком небольшом количестве, что ни они, ни продукты их распада не оказывают вреда организму.

Лечебное применение радионуклидов в основном связано с использованием γ-излучения (гамма-терапия). Гамма-установка состоит из источника, обычно ^{60}Co, и защитного контейнера, внутри которого помещен источник; больной размещается на столе. Применение гамма-излучения высокой энергии позволяет разрушать глубоко расположенные опухоли, при этом поверхностно расположенные органы и ткани подвергаются меньшему губительному действию.

Терапевтическое применение имеют и α-частицы. Так как они обладают значительной линейной плотностью ионизации, то поглощаются даже небольшим слоем воздуха. Поэтому использование α-частиц в терапии (*альфа-терапия*) возможно лишь при их непосредственном контакте с организмом, либо при введении внутрь организма.

Характерным примером является радоновая терапия: минеральные воды, содержащие $^{222}_{86}$Rn и его дочерние продукты (см. § 27.1), используются для воздействия на кожу (ванна), органы пищеварения (питье), органы дыхания (ингаляция).

Еще одно лечебное применение α-частиц связано с использованием потока нейтронов. В опухоль предварительно вводят элементы, ядра которых под действием нейтронов вступают в ядерную реакцию с образованием α-частиц. Облучая после этого больной орган потоком нейтронов, вызывают ядерную реакцию и, следовательно, образование α-частиц (например, реакции $^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\alpha$ или ${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\alpha$).

Таким образом, α-частицы образуются прямо внутри органа, на который они должны оказать разрушительное воздействие. Можно ввести радиоактивный препарат в больной орган на острие иглы.

Существуют и другие приемы лечебного воздействия ионизирующим излучением радионуклидов и нейтронами.

§ 27.7. Ускорители заряженных частиц и их использование в медицине

Ускорителем называют устройство, в котором под действием электрических и магнитных полей формируется пучок заряженных частиц высокой энергии.

Различают ***линейные*** и ***циклические ускорители***. В линейных ускорителях частицы движутся по прямолинейной траектории, в циклических — по окружности или спирали.

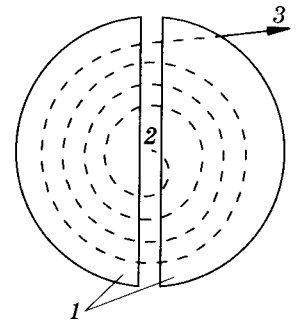


Рис. 27.14

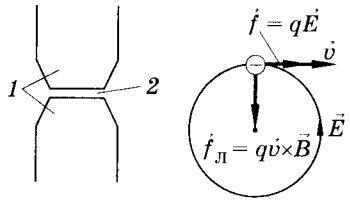
Наиболее известным циклическим ускорителем является ***циклотрон*** (рис. 27.14), в котором под действием магнитного поля индукции $\vec{B}$, направленной перпендикулярно плоскости рисунка, заряженная частица движется по окружностям. Переменное электрическое поле между дуантами *1* ускоряет частицу. Согласно формуле (13.23), период T вращения частицы не зависит от ее скорости и радиуса траектории, поэтому время прохождения частицей любой полуокружности в каждом дуанте одинаково. Оно соответствует половине периода колебаний электрического поля. Таким образом, магнитное поле обеспечивает вращение частицы по окружности, а электрическое поле — изменение ее кинетической энергии. Источник частиц *2* находится вблизи центра циклотрона, пучок ускоренных частиц *3* вылетает из циклотрона после ускорения.

Циклотрон способен ускорять протоны до 20—25 МэВ. Ограничение энергии ускоряемых частиц обусловлено релятивистской зависимостью в формуле (13.23) массы[1] от скорости, что приводит к увеличению периода вращения частицы с возрастанием ее скорости. В результате этого нарушится синхронность между движением частицы и изменением электрического поля. Электрическое поле будет не ускорять, а замедлять частицы. В связи с этим в циклотроне нельзя ускорять электроны, так как они быстро достигают релятивистских скоростей.

Из этого затруднения можно найти выход, изменяя частоту электрического поля в соответствии с изменением периода вращения заряженной частицы. Такой ускоритель называют ***фазотроном*** (***синхроциклотроном***), он способен ускорять протоны до энергии ~ ГэВ.

Можно предположить и другое решение вопроса: по мере возрастания массы увеличивать индукцию магнитного поля. Как

[1] В настоящее время в физической литературе принято использовать релятивистскую зависимость импульса от скорости частицы. Здесь эти подробности не рассматриваются.



а) *б)*

Рис. 27.15

видно из формулы (13.23), в этом случае можно сохранить период вращения частицы неизменным. Ускоритель такого типа называют ***синхротроном.***

Для ускорения тяжелых частиц до энергий порядка гигаэлектронвольт и выше используют ***синхрофазотрон,*** в котором изменяют и магнитное поле, и частоту электрического поля.

Довольно распространенным ускорителем электронов невысоких энергий является ***бетатрон.*** В отличие от других циклических ускорителей в нем электрическое поле не подается от внешних источников, а создается при изменении магнитного поля (явление электромагнитной индукции).

На рис. 27.15, *а* схематически показано, что при изменении магнитного поля электромагнита *1* возникает, согласно теории Максвелла, вихревое электрическое поле. В зазоре *2* магнита расположена вакуумная камера, в которой ускоряются электроны. Силовые линии электрического поля в виде концентрических окружностей проходят в плоскости, перпендикулярной плоскости рис. 27.15, *а*. На рис. 27.15, *б* изображена отдельная линия напряженности электрического поля, которая приближенно совпадает с траекторией электрона. На этом рисунке линии вектора $\vec{B}$ в основном перпендикулярны плоскости чертежа, магнитная индукция возрастает.

Электрон удерживается на орбите магнитным полем (сила Лоренца) и ускоряется электрическим.

Бетатроны способны ускорять электроны до десятков мегаэлектрон-вольт. В настоящее время бетатроны используют главным образом в прикладных целях, в том числе и медицинских.

Остановимся на медицинских приложениях ускорителей.

Ускорители заряженных частиц применяют как средство лучевой терапии в двух основных направлениях.

Во-первых, используют тормозное рентгеновское излучение, возникающее при торможении электронов, ускоренных бетатроном. Использование тормозного излучения оказывается более эффективным, чем гамма-терапия.

Во-вторых, используют прямое действие ускоренных частиц: электронов, протонов. Электроны ускоряются бетатроном, а протонный пучок получают от других ускорителей. Как видно из

рис. 27.3, заряженные частицы, в том числе и протоны, наибольшую ионизацию производят перед остановкой. Поэтому при попадании пучка протонов в биологический объект извне наибольшее воздействие будет оказано не на поверхностные слои, а на опухолевые ткани, которые расположены в глубине организма. В этом основная выгода применения заряженных частиц для лучевой терапии глубинных опухолей. Поверхностные слои в этом случае повреждаются минимально.

Малое рассеяние протонов позволяет формировать узкие пучки и, таким образом, очень точно воздействовать на опухоль. Наряду с лечебным применением ускорителей в последние годы открылись возможности использования их в диагностике. Здесь можно указать две области.

Одна — *ионная медицинская радиография.* Суть метода заключается в следующем. Пробег тяжелых заряженных частиц (α-частицы, протоны) зависит от плотности вещества. Поэтому если регистрировать поток частиц до и после прохождения объекта, то можно получить сведения о средней плотности вещества.

Таким образом, так же как и при рентгенографии, возможно различать структуры большей и меньшей плотности. Преимущество у этого метода перед рентгенографией — более низкая контрастность, что позволяет лучше различать структуру мягких тканей.

Другая область применения связана с синхротронным излучением.

Синхротронным излучением называют интенсивное ультрафиолетовое и мягкое рентгеновское излучение, которое испускают электроны, движущиеся по круговой орбите со скоростями, близкими к скорости света. Впервые это излучение как световое наблюдалось на синхротронах, поэтому оно и называется синхротронным. Синхротронное излучение в целях диагностики применяют аналогично обычному рентгеновскому излучению. Одно из преимуществ синхротронного излучения перед рентгеновским заключается в возможности поглощения этого излучения преимущественно некоторыми элементами, например иодом, который может иметь повышенную концентрацию в тканях. Отсюда возникают условия для ранней диагностики злокачественных опухолей.

Отметим, что синхротронное излучение начинают также применять и в лучевой терапии.

ГЛАВА 28

Элементы дозиметрии ионизирующих излучений

Необходимость количественной оценки действия ионизирующего излучения на различные вещества живой и неживой природы привела к появлению дозиметрии.

Дозиметрией называют раздел ядерной физики и измерительной техники, в котором изучают величины, характеризующие действие ионизирующего излучения на вещества, а также методы и приборы для их измерения. Первоначально развитие дозиметрии было обусловлено необходимостью учета действия рентгеновского излучения на человека.

§ 28.1. Доза излучения и экспозиционная доза. Мощность дозы

Уже отмечалось, что ионизирующее излучение только тогда оказывает действие на вещество, когда это излучение взаимодействует с частицами, входящими в состав вещества.

Независимо от природы ионизирующего излучения его взаимодействие количественно может быть оценено отношением энергии, переданной элементу облученного вещества, к массе этого элемента. Эту характеристику называют ***дозой излучения*** (***поглощенной дозой излучения***) ***D***.

Различные эффекты ионизирующего излучения прежде всего определяются поглощенной дозой. Она сложным образом зависит от вида ионизирующего излучения, энергии его частиц, состава облучаемого вещества и пропорциональна времени облучения. Дозу, отнесенную ко времени, называют ***мощностью дозы***.

Единицей поглощенной дозы излучения является *грей* (Гр), который соответствует дозе излучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия ионизирующего излучения 1 Дж; *мощность дозы излучения* выражается в *греях в секунду* (Гр/с). Внесистемная единица дозы излучения — *рад*[1] (1 рад = 10^{-2} Гр = 100 эрг/г), ее мощности — *рад в секунду* (рад/с).

Казалось бы, для нахождения поглощенной дозы излучения следует измерить энергию ионизирующего излучения, падающего на тело, энергию, прошедшую сквозь тело, и их разность разделить на массу тела. Однако практически это сделать трудно, так как тело неоднородно, энергия рассеивается телом по всевозможным направлениям и т. п. Таким образом, вполне конкретное и ясное понятие «дозы излучения» оказывается малопригодным в эксперименте. Но можно оценить поглощенную телом дозу по ионизирующему действию излучения в воздухе, окружающем тело.

В связи с этим вводят еще одно понятие дозы для рентгеновского и γ-излучения — ***экспозиционную дозу излучения X***, которая является мерой ионизации воздуха рентгеновскими и γ-лучами.

За единицу экспозиционной дозы принят *кулон на килограмм* (Кл/кг). На практике используют единицу, называемую *рентгеном* (Р), — экспозиционная доза рентгеновского или γ-излучения, при которой в результате полной ионизации в 1 $см^3$ сухого воздуха (0,001293 г) при 0 °С и 760 мм рт. ст. образуется $2{,}08 \cdot 10^9$ пар ионов. 1 Р = $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг.

Единицей мощности экспозиционной дозы является 1 А/кг, а внесистемной единицей — 1 Р/с.

Так как доза излучения пропорциональна падающему ионизирующему излучению, то между ней и экспозиционной дозой должна быть пропорциональная зависимость

$$D = fX, \qquad (28.1)$$

где f — некоторый переходный коэффициент, зависящий от ряда причин и прежде всего от облучаемого вещества и энергии фотонов.

Наиболее просто установить значение коэффициента f, если облучаемым веществом является воздух. При X = 1 Р в 0,001293 г воздуха образуется $2{,}08 \cdot 10^9$ пар ионов; следовательно, в 1 г воздуха содержится $2{,}08 \cdot 10^9/0{,}001293$ пар ионов. В среднем на образование одной пары ионов расходуется энергия 34 эВ. Это означает, что в 1 г воздуха поглощается энергия излучения, равная

$$\frac{2{,}08 \cdot 10^9}{0{,}001293} \cdot 34 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж/г} = 88 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж/кг}.$$

[1] Единица *рад* является аббревиатурой английских слов *Radiation Absorbed Dose*.

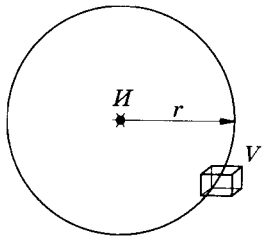


Рис. 28.1

Итак, поглощенная доза $88 \cdot 10^{-4}$ Дж/кг в воздухе энергетически эквивалентна 1 Р. Тогда по формуле (28.1) имеем

$$D = 0{,}88X, \quad f = 0{,}88,$$

если D измеряется в радах, а X — в рентгенах.

Коэффициент f для воздуха мало зависит от энергии фотонов.

Для воды и мягких тканей тела человека $f = 1$; следовательно, доза излучения в радах численно равна соответствующей экспозиционной дозе в рентгенах. Это и обусловливает удобство использования внесистемных единиц — рада и рентгена.

Для костной ткани коэффициент f уменьшается с увеличением энергии фотонов приблизительно от 4,5 до 1.

Установим связь между активностью радиоактивного препарата — источника γ-фотонов — и мощностью экспозиционной дозы. Из источника $И$ (рис. 28.1) γ-фотоны вылетают по всем направлениям. Число этих фотонов, пронизывающих 1 м^2 поверхности некоторой сферы в 1 с, пропорционально активности A и обратно пропорционально площади поверхности сферы ($4\pi r^2$). Мощность экспозиционной дозы (X/t) в объеме V зависит от этого числа фотонов, так как именно они и вызывают ионизацию. Отсюда получаем

$$\frac{X}{t} = k_\gamma \frac{A}{r^2}, \qquad \textbf{(28.2)}$$

где k_γ — гамма-постоянная, которая характерна для данного радионуклида.

§ 28.2. Количественная оценка биологического действия ионизирующего излучения. Эквивалентная доза

Для данного вида излучения биологическое действие обычно тем больше, чем больше доза излучения. Однако различные излучения даже при одной и той же поглощенной дозе оказывают разные воздействия.

В дозиметрии принято сравнивать биологические эффекты различных излучений с соответствующими эффектами, вызванными рентгеновским и γ-излучениями.

Коэффициент K, показывающий, во сколько раз эффективность биологического действия данного вида излучения больше, чем рентгеновского или γ-излучения, при одинаковой дозе излучения в тканях, называется ***коэффициентом качества***. В радиобиологии его называют также ***относительной биологической эффективностью*** (ОБЭ).

Коэффициент качества устанавливают на основе опытных данных. Он зависит не только от вида частицы, но и от ее энергии. Приведем приближенные значения K (табл. 33) для некоторых излучений (в скобках указана энергия частиц).

Таблица 33

Вид излучения	K
Рентгеновское, γ- и β-излучения	1
Тепловые нейтроны (~0,01 эВ)	3
Нейтроны (5 МэВ)	7
Нейтроны (0,5 МэВ), протоны	10
α-излучение	20

Поглощенная доза совместно с коэффициентом качества дает представление о биологическом действии ионизирующего излучения, поэтому произведение DK используют как единую меру этого действия и называют ***эквивалентной дозой*** излучения H:

$$H = DK. \qquad \textbf{(28.3)}$$

Так как K — безразмерный коэффициент, то эквивалентная доза излучения имеет ту же размерность, что и поглощенная доза излучения, но называется *зивертом* (Зв). Внесистемная единица эквивалентной дозы — *бэр*[1], 1 бэр = 10^{-2} Зв.

Эквивалентная доза в бэрах равна дозе излучения в радах, умноженной на коэффициент качества.

Естественные радиоактивные источники (космические лучи, радиоактивность недр, воды, радиоактивность ядер, входящих в состав человеческого тела, и др.) создают фон, соответствующий приблизительно эквивалентной дозе 125 мбэр в течение года. Предельно допустимой эквивалентной дозой при профессиональном облучении считается 5 бэр в течение года. Минимальная летальная доза от γ-излучения около 600 бэр. Эти данные соответствуют облучению всего организма.

[1] *Бэр* — аббревиатура слов «биологический эквивалент рентгена».

§ 28.3. Дозиметрические приборы

Дозиметрическими приборами, или дозиметрами называют устройства для измерения доз ионизирующих излучений или величин, связанных с дозами.

Конструктивно дозиметры состоят из детектора ядерных излучений и измерительного устройства. Обычно они проградуированы в единицах дозы или мощности дозы. В некоторых случаях предусмотрена сигнализация о превышении заданного значения мощности дозы.

В зависимости от используемого детектора различают дозиметры ионизационные, люминесцентные, полупроводниковые, фотодозиметры и др.

Дозиметры могут быть рассчитаны на измерение доз какого-либо определенного вида излучения или регистрацию смешанного излучения.

Дозиметры для измерения экспозиционной дозы рентгеновского и γ-излучения или ее мощности называют ***рентгенометрами.***

В качестве детектора у них обычно применяется ионизационная камера. Заряд, протекающий в цепи камеры, пропорционален экспозиционной дозе, а сила тока — ее мощности. На рис. 28.2 показан микрорентгенометр МРМ-2 со сферической ионизационной камерой, вынесенной отдельно от прибора.

Состав газа в ионизационных камерах, а также вещество стенок, из которых они состоят, подбирают такими, чтобы осуществлялись тождественные условия с поглощением энергии в биологических тканях.

На рис. 28.3 показан комплект индивидуальных дозиметров ДК-0,2 с общим измерительным устройством. Каждый индивидуальный дозиметр представляет собой миниатюрную цилиндрическую ионизационную камеру, которая предварительно заряжается. В результате ионизации происходит разрядка камеры, что фиксируется вмонтированным в нее электрометром. Показания его зависят от экспозиционной дозы ионизирующего излучения.

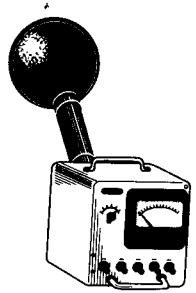


Рис. 28.2

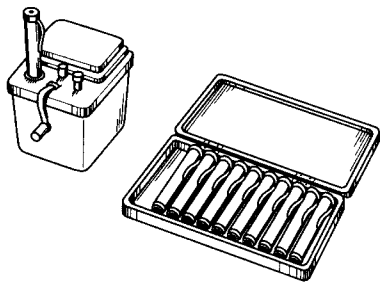


Рис. 28.3

Существуют дозиметры, детекторами которых являются газоразрядные счетчики.

Для измерения активности или концентрации радиоактивных изотопов применяют приборы, называемые ***радиометрами.*** Принцип их работы в основном изложен в § 27.5.

В заключение заметим, что общая структурная схема всех дозиметров аналогична той, которая изображена на рис. 17.1. Роль датчика (измерительного преобразователя) выполняет детектор ядерных излучений. В качестве выходных устройств могут использоваться стрелочные приборы, самописцы, электромеханические счетчики, звуковые и световые сигнализаторы и т. п.

§ 28.4. Защита от ионизирующего излучения

Работа с любыми источниками ионизирующих излучений требует защиты персонала от их вредного действия. Это большая и специальная проблема, в значительной степени выходящая за пределы чисто физических вопросов. Рассмотрим кратко некоторые аспекты этой проблемы.

Различают три вида защиты: защита временем, расстоянием и материалом.

Проиллюстрируем первые два вида защиты на модели точечного источника γ-излучения. Преобразуем формулу (28.2):

$$X = k_\gamma \frac{A}{r^2} t. \qquad (28.4)$$

Отсюда видно, что чем больше время и чем меньше расстояние, тем больше экспозиционная доза. Следовательно, необходимо находиться под воздействием ионизирующего излучения минимальное время и на максимально возможном расстоянии от источника этого излучения.

Защита материалом основывается на различной способности веществ поглощать разные виды ионизирующего излучения.

Защита от α-излучения проста: достаточно листа бумаги или слоя воздуха толщиной в несколько сантиметров, чтобы полностью поглотить α-частицы. Однако, работая с радиоактивными источниками, следует остерегаться попадания α-частиц внутрь организма при дыхании или приеме пищи.

Для защиты от β-излучения достаточно пластин из алюминия, плексигласа или стекла толщиной в несколько сантиметров. При взаимодействии β-частиц с веществом может появиться тормозное рентгеновское излучение, а от β^+-частиц — β^+-излучение, возникающее при аннигиляции этих частиц с электронами. Наиболее сложна защита от «нейтрального» излучения: рентгеновское и γ-излучения, нейтроны. Эти излучения с меньшей вероятностью взаимодействуют с частицами вещества и поэтому глубже проникают в вещество. Ослабление пучка рентгеновского и γ-излучений приближенно соответствует закону (26.8). Коэффициент ослабления зависит от порядкового номера элемента вещества поглотителя [см. (26.12)] и от энергии γ-фотонов (см. рис. 27.5). При расчете защиты учитывают эти зависимости, рассеяние фотонов, а также вторичные процессы. Некоторые из них для рентгеновского излучения показаны на рис. 26.10. Защита от нейтронов наиболее сложна. Быстрые нейтроны сначала замедляют, уменьшая их скорость в водородсодержащих веществах. Затем другими веществами, например кадмием, поглощают медленные нейтроны.

Заключение

В медицине достаточно давно используются физические методы. Еще в древности для лечения применяли охлаждение и нагревание различных участков тела, фиксирование конечностей при переломах и др.

Ряд ученых (врачи и физиологи) в своих профессиональных и жизненных увлечениях разрабатывали физические вопросы, укрепляя своими трудами взаимопроникновение этих важных отраслей естествознания. Поучительны в этом отношении жизнеописания некоторых великих ученых.

Юнг Томас (1773—1829) учился в ряде университетов, где сначала изучал медицину, но потом увлекся физикой. Объяснил явление аккомодации глаза изменением кривизны хрусталика, первый объяснил явление интерференции света и ввел термин «интерференция», разрабатывал теорию цветового зрения, исследовал деформацию тел.

Пуазейль Жан Луи Мари (1799—1869) — французский физик и физиолог. Изучал течение жидкости в тонких цилиндрических трубках и внутреннее трение, первый применил ртутный манометр для измерения давления крови.

Майер Юлиус Роберт (1814—1878) — немецкий врач. Как корабельный врач во время плавания заметил, что цвет венозной крови матросов в тропиках приближается по яркости к артериальной. Это дало ему основание считать, что при высокой внешней температуре для поддержания температуры тела нужна меньшая степень окисления поступающих в организм веществ. Майер установил, что количество окисляемых продуктов в организме человека возрастает с увеличением выполняемой им работы. Майер один из первых открыл закон сохранения и превращения энергии.

Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (1821—1894) — немецкий врач, физиолог и физик. Математически обосновал закон сохранения энергии, отметив его всеобщий характер, разработал

термодинамическую теорию химических процессов, существенных успехов достиг в области физиологической акустики и в физиологии зрения, впервые измерил скорость распространения нервного возбуждения.

Дарсонваль Жак Арсен (1851—1940) — французский физик и физиолог. Проводил исследования в области электричества и его применения в медицине, основоположник электрофизиотерапии.

Применение достижений физики в медицине происходило и происходит постоянно. Проиллюстрируем это несколькими примерами из XX столетия: открытие электромагнитных волн — микроволновая терапия, открытие рентгеновских лучей — рентгенодиагностика и рентгенотерапия, открытие радиоактивности — радиодиагностика и радиотерапия, появление лазеров — лазерная терапия и лазерная хирургия и др.

Из учебника видно, что практически в любом разделе физики можно обнаружить медицинские приложения физических знаний и физической аппаратуры, а медицинская техника, по существу, целиком основана на использовании физических законов, правил, закономерностей, физических явлений, физических свойств материалов и др.

Именно поэтому физико-математические и биофизические знания являются существенным элементом высшего медицинского образования и способствуют всестороннему изучению организма человека. *Это важно для формирования медицины как точной науки.*

Освоение настоящего курса не просто, но затраченные время и усилия окупятся при изучении последующих курсов и в практической деятельности **ВРАЧА** — главной фигуры лечебного процесса.

Предметный указатель к учебнику «Медицинская и биологическая физика»

Аберрации линз 376
Аберрация линз сферическая 376
— — хроматическая 379
Автоволны 213
Автоколебания 86
Авторадиография 531
Аккомодация 365
Активность 466, 500, 519
— удельная массовая 521
Актинометр 411
Акустика 63, 93
Анализатор 366
Анизотропия 374
Апертура угловая 397
— числовая 398
Аппарат вестибулярный 106
— искусственного кровообращения 5, 157
— медицинский 304, 307, 328, 331
Аппаратура медицинская 296
Астигматизм 377
Аудиометрия 98, 99
Аускультация 100
Аэроионизатор 250
Аэроионы 250

Бетатрон 534
Биения 80
Биомеханика 3, 150
Биопотенциалы 7, 15, 16
Биофизика 12, 15, 418

Биотелеметрия 314
Биолюминесценция 465
Близорукость 388

Величина случайная 32
— — дискретная 33
— — непрерывная 33
Вероятность случайного события 27
— безотказной работы 305
— доверительная 51
— термодинамическая 175, 176
— условная 32
Вершина импульса 279
Вещества оптически активные 371
Вибрации 25, 85, 86, 94, 110
Видеоимпульсы 279
Вискозиметрия 119, 120
Внутривидение 364
Волны
— возбуждения 216
— звуковые 93
— де Бройля 420
— когерентные 339
— механические 87
— плоские 88
— пульсовые 154, 156
— ударные 90
— электромагнитные 280
— — плоскополяризованные 365
Время разрешающее 530
Выборка 46
Вязкость 113
— динамическая 114
— кинематическая 122
— крови 121

Гальванизация 284
Генератор колебаний звуковых 97
— — релаксационных 327
— — электромагнитных 328, 331
Гемодинамика 150
Гистограмма 48

Глаз 383, 388
Глаза ближняя точка 386
Голограмма 361
— волны плоской 361
— точки 362
Голография 8, 339, 360
Градиент давления 117
— концентрации 193
— скорости 114
Громкости звука уровни 99
Громкость звука 96

Давления крови метод измерения 158
Давление звуковое 95
Дальнозоркость 388
Датчика чувствительность 313
Датчики 19, 311
Дарсонвализация 289
Дебай 236
Декремент затухания логарифмический 77
Детекторы ионизирующих излучений 532, 547
Деформация тела 66, 139
— — пластическая 139
— — упругая 139
Диамагнетики 263
Диатермия 289
Диполь токовый 232, 233
— электрический 228
Дисперсия величины случайной 36
— выборочная 49
— угловая дифракционной решетки 354
Дисторсия 382
Дифракция 353
Диффузия 200, 204, 206
Диэлектрики 238, 292
Диэлектрическая проницаемость 241, 276
Длина волны 88, 91, 105, 294, 345, 414, 456
Доза излучения (поглощенная) 542
— эквивалентная 544
— экспозиционная 543
Дозиметрия ионизирующих излучений 25, 542
Доплеровский сдвиг частоты 93

Единица физической величины 20

Жидкость, особенность молекулярного строения 123
— вязкая 114
— неньютоновская 114
— ньютоновская 114

Закон Ампера 254
— Брюстера 370
— Бугера 452
— Бугера—Ламберта—Бера 453
— Вавилова 468
— Вебера—Фехнера 96
— Вина 413
— Гука 146
— Кирхгофа 411
— Малюса 369
— Мозли 515
— распада радиоактивного 525
— распределения нормального 38
— Рэлея 454
— Стефана—Больцмана 413
— Стокса 118
— Фарадея 280
Заряд удельный частицы 257
Заряды связанные 241, 491
Звук 93, 98
Звука громкость 96, 97

Излучение вынужденное (индуцированное) 471, 472
— инфракрасное 418
— рентгеновское 511
— рентгеновское тормозное 512
— рентгеновское характеристическое 513
— синхротронное 541
— спонтанное 472
— тепловое 408, 421
— ультрафиолетовое 419
— черенковское 528
Измерение 19
Измерения физические, классификация 19, 25
Иммерсия 398

Импеданс электрический 273, 275
— удельный акустический 101
Импульс электрический 278, 279
Индуктотермия 290
Индукция магнитная 252
Инерциальные системы ориентации 69
Интенсивность волны 96
— звука 95
— отказов 305
— света 451
Интенсивности звука уровни 99
Интерференция 344
Интерферометры 347, 349
Интроскопия 366
Инфразвук 111
Искажения линейные (частотные) 324
— нелинейные (амплитудные) 322
Источник тока 154
Источники света когерентные 341

Калориметрия 182
Канал связи 314
Капиллярные явления 127
Кардинальные плоскости 386
— точки 386, 387
Катодолюминесценция 464
Колебания ангармонические 77
— вынужденные 84
— гармонические 73
— затухающие 75
— механические 71
— свободные 71
— сложные 83
— электрические (электромагнитные) 265
Количество теплоты приведенное 291, 294
Колориметрия концентрационная 454
Корреляции коэффициент 60
Корреляция 60
Коэффициент диффузии 193, 194
— заполнения 280
— затухания 76, 86
— излучения приведенный 417

— качества 544
— ослабления линейный 518
— — массовый 519
— поглощения 414, 417, 466
— — монохроматический 411
— полезного действия 20
— проникновения звуковой волны 102
— проницаемости 195, 200
— пропускания 452, 454
— трения 75, 142
— усиления усилителя 323, 326
Криотерапия 183
Криохирургия 183
Кристаллы жидкие 137
Критерий подобия 122
Крутизна фронта импульса 279

Лазер (оптический квантовый генератор) 466, 469, 472, 475
Липосомы 187
Лупа 389
Лупы увеличение 390
Люминесценция 459

Магнетики 261
Магнетон Бора 252
— — ядерный 252
Магнитобиология 264
Магнитокардиография 264
Макросостояние 175
Медиана 49
Мембраны биологические 185, 190
— — биопотенциалы 196, 203, 205
— — модели 186, 187
Метод контраста фазового 405
Метрология 21
— медицинская 22
Механика квантовая 437, 439, 441
Механические свойства биологических тканей 145
Микропроекция 400
Микроскоп 390
— биологический 394
— интерференционный 347

— люминесцентный 416, 464
— поляризационный 377
— ультрафиолетовый 416
— электронный 422, 426
Микроскопа увеличение 399, 403
— — полезное 399, 403
Микросостояние 175
Микрофотография 400
Мода 49
Модель 14
— кровообращения 150, 153
— механическая Кельвина—Фойхта 145
— — Максвелла 143
Момент дипольный 228
— импульса 259, 437, 438, 440
— магнитный 251, 262, 500, 507
— силы 229, 251, 252
Мощность дозы 542
— сердца 158
Мультиполь 231

Надежность медицинской аппаратуры 305
Намагниченность 260
Напряжение линейное 302
— механическое 140
— пилообразное 331
— фазовое 302
Напряженность поля электрического 223
Нарушение единичное 301
Натяжение поверхностное 125
Начало термодинамики второе 167
— — первое 166
Невесомость 67
Несмачивание 126
Нефелометрия 457

Обертон 96
Ожидание математическое 35
Оптика волоконная 408
— геометрическая 379
— электронная 427
Освещенность 343

Острота зрения 392, 494
Осциллограф 337
Оценка интервальная 54, 55

Парамагнетики 262
Перегрузка 66
Переноса явления 191
Период маятника математического 74
— — пружинного 74
— полураспада 525
Перкуссия 101
Плоскость поляризации 373, 375
Плотность ионизации линейная 526
Плотность потока вещества 193
— — энергии волн 281
— раствора оптическая 454
— спектральная энергетической светимости 410
— тока 246
— энергии объемная 281
— — поля магнитного 254
— — — электрического 245
— — — электромагнитного 281
Поглощение света 447, 478, 485
Подвижность ионов 247
Поле вихревое 534
— магнитное 251, 260, 261, 280, 331
— электрическое 195, 241, 245, 250
— электромагнитное 417, 497
Ползучесть 145, 146
Полигон 48
Полимеры 131, 135
Полоса пропускания 324
Поляризатор 369
Поляризация диэлектриков 239
— света 368
Поляризованность 242, 276
Поляриметрия 372
Порог тока неотпускающего 287
— — ощутимого 287
Порядок спектра дифракционного 354
Постоянная вращения 372
— распада 525
— солнечная 410

Потенциал
— действия 207
— ионизационный 249
— покоя 204
— электрического поля 225, 231
Поток вещества 195
— излучения 405
— магнитный 253
— энергии волн 89
Предел разрешения микроскопа 395
— — — электронного 422
Прецессия 262
Прибор медицинский 23
Призма Николя 370
Принцип Гюйгенса—Френеля 348
— Паули 438
— Пригожина 177
Протезирование кохлеарное 46, 330
Процессы обратимые 168, 170
— фотобиологические 476, 483

Работа газа 169
— поля электрического 223
— — электростатического 224
— сердца 157
— человека 65
Радиоактивность 522
Радиография ионная медицинская 540
Радиоимпульсы 279
Радиотелеметрия 314
Разность биопотенциалов 236
— потенциалов 225
— хода волн оптическая 347
Распад радиоактивный 522
Распределение биномиальное 34
— Больцмана 44
— Гаусса (нормальное) 38
— дискретных случайных величин 33
— непрерывных случайных величин 37
— Максвелла 41, 42
— статистическое 47

Рассеяние когерентное 516
— молекулярное 455
— некогерентное 516
— света 455
Расстояние зрения наилучшего 386, 390, 399
Расходометрия ультразвуковая 160
— электромагнитная 160
Расщепление электронное 499
Реверберация 101, 103
Резонанс 85
— магнитный 494, 497, 500, 502, 507
— напряжения 274
— — ядерный 502, 506
— парамагнитный электронный 502
Релаксация напряжения 143, 145, 147
Рентгенодиагностика 519
Рентгенолюминесценция 459
Рентгеноструктурный анализ 357
Рентгенотерапия 521
Реография 278
Реология 145
Решетка дифракционная 351, 357, 395
— кристаллическая 130, 240
Ряд вариационный 47

Сдвиг 93, 114, 502, 509
Светимости энергетической спектральная плотность 405
Светимость энергетическая 405, 409
Светочувствительность глаза 384, 489
Свечение сверхслабое 465
Связь обратная 86
Сила вынуждающая 84
— квазиупругая 73
— Лоренца 257
— сопротивления 75
— термоэлектродвижущая 311
— тока 275, 300, 309, 313
— электродвижущая 232
Система закрытая 164
— замкнутая 174
— открытая 164, 176
— самоуправляющаяся 86

Скважность следования импульсов 280
Скорость волн 88
— — групповая 88
— — фазовая 88
— — электромагнитных 280
— кровотока 160
— наивероятнейшая 42
— средняя молекулы 43
— угловая 74
Слуха физика 103
Смачивание 126
События достоверные 29
— невозможные 29
— случайные 26
— — противоположные 30
— — равновозможные 28
Совокупность выборочная (выборка) 46
— генеральная 46
Соотношения неопределенностей 430
Сопротивление активное 273
— волновое 101
— гидравлическое 116
— емкостное 271, 274
— индуктивное 271, 274
— омическое 270, 311
— полное электрическое (импеданс) 272
— реактивное 273
Состояние стационарное 179, 164
Спектр акустический 94
— гармонический 83
Спектроскопия 418
Спектры атомные 453, 454
— дифракционные 351, 354
— излучения 407, 409
— испускания 453, 455
— молекулярные 456
— поглощения 452, 457, 462
Спин 433, 444, 460, 500
Способность разрешающая глаза 387
— — дифракционной решетки 356
— — микроскопа 395
— тормозная линейная 521

Среда активная 468
Среднее квадратическое отклонение выборочное 37, 49
— — — генеральное 51
Средство измерений 308
Срез импульса 279
Статистика математическая 45, 46
Степень поляризации 368
Стимуляторы 329
Счетчик Гейгера—Мюллера 534

Телеметрия 314
Тело абсолютно твердое 129
— аморфное 131
— кристаллическое 129
— серое 406, 409
— черное 406, 408
Тембр звука 96
Температура термодинамическая 181
Теорема сложения вероятностей 29
— умножения вероятностей 31
Теория Аббе 340
— Бора 440
— вероятностей 26
Теплота превращения фазового 174
Тепловизор 414
Терапия лучевая 521, 540
— микроволновая 294
Термография 416, 422
Термодинамика 165
Термометрия 180
Термометры 181
Техника медицинская 299
Течение жидкости (газа) 113
— — ламинарное 121
— — турбулентное 121, 122
Ток импульсный 280, 286
— квазистационарный 268
— круговой 259
— переменный 268
— утечки 300
Тока плотность 258, 287, 291, 293
— сила 247

Томография рентгеновская 520, 521
Тон 94
— основной 94
— простой (чистый) 94
— сложный 94
Транспорт частиц 191
— — активный 200
— пассивный 199

УВЧ-терапия 291
Угол зрения 391
— — наименьший 392
— полной поляризации 372
— потерь диэлектрических 292
Удар звуковой 95
Удельное вращение 376
Удлинение относительное 139
Ультразвук 106
Ультрамикроскопия 402, 407
Уравнение волновое
— — электромагнитное 282
— волны плоской 38
— диффузии 193
— Ламе 149
— Нернста 204
— Нернста—Планка 195, 196
— Ньютона 113, 114
— Фика 193
— Шредингера 431
Уровень значимости 52, 61
Усилители 320—326
Ускорители 538
Условие нормировки 33, 38, 430
Устройство аналоговое 315
— отображения 316
— съема 308
Ухо 103

Фаза колебаний 74
Ферромагнетики 261
Физика 14
— медицинская 17

Фигуры Лиссажу 82, 337
Флуоресценция 465, 466
Фосфоресценция 464, 466
Фотоизомеризация 483
Фотолюминесценция 464, 465
Фотон 440, 452, 457
Фотоупругость 377
Формула Вульфа—Брэггов 361
— Моенса—Кортевега 156
— Планка 412
— Пуазейля 116
— решетки дифракционной 354
— Томсона 267
Фронт волны 216, 365
— импульса 279
Функция волновая 429
— преобразования датчика 312
— распределения непрерывной случайной величины 38

Характеристика амплитудная усилителя 322
— частотная усилителя 324
Хемилюминесценция 418, 459, 465

Центрированная оптическая система 383
Цикл 168
— Карно 170
Циклотрон 257

Числа квантовые 437, 438, 439
Число Рейнольдса 121
— главное квантовое 436

Шкала электромагнитных волн 282
Шум 94

Эквипотенциальные поверхности 226
Эластичность высокая 146, 151
Электробезопасность медицинской аппаратуры 299
Электроды 309, 310
Электрокардиографии физические основы 234
Электроника 297
— медицинская 298

Электропроводимость тканей биологических 206
— электролитов 246, 248
Электрофорез 285
Эндоскоп 408
Энергия внутренняя 166, 167, 169
— кинетическая 44, 517, 526
— колебательного движения 89, 112, 447
— конденсатора 244
— поля магнитного 254
— — электрического 243
— потенциальная 154, 224
Энтропия 172, 177
ЭПР-спектрометр 499
Эргометрия 65
Эффект Доплера 91
— Зеемана 496
— Комптона 511
— микрофонный 327
— пьезоэлектрический 242, 311
— фотоэлектрический 517
— Холла 265

ЯМР-интроскопия 501

Учебное издание

Ремизов Александр Николаевич,
Максина Александра Генриховна,
Потапенко Александр Яковлевич

МЕДИЦИНСКАЯ И БИОЛОГИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Учебник для вузов

Заведующий редакцией *Б. В. Понкратов*
Редактор *И. Я. Ицхоки*
Оформление *Т. Е. Добровинская-Владимирова*
Технический редактор *М. В. Биденко*
Компьютерная верстка *А. В. Маркин*
Корректоры *Г. И. Мосякина, И. Т. Белугина*

Изд. лиц. № 061622 от 07.10.97.

Подписано к печати 31.10.02. Формат $60\times90^{1}/_{16}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 35,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 2495.

ООО «Дрофа».
127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазин «Переплетные птицы».
127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.
Тел.: (095) 912-45-76.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП ордена «Знак Почета»
Смоленской областной типографии им. В. И. Смирнова.
214000, г. Смоленск, пр-т им. Ю. Гагарина, 2.